Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Балаба Ирина Николаевна

Градуированные кольца и модули

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета имени Л.Н.Толстого.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Михалёв Александр Васильевич
Официальные оппоненты:	Кожухов Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, профессор (Национальный исследовательский университет „МИЭТ“); Мищенко Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, профессор (Ульяновский государственный университет, заведующий кафедрой); Туганбаев Аскар Аканович, доктор физико-математических наук, профессор (Российский государственный торгово-экономический университет).
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 26 октября 2012 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 26 сентября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов
Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория градуированных колец представляет собой важную самостоятельную ветвь теории колец со своими специфическими методами и проблемами, интенсивно развивающуюся в последнее время. Градуировки естественным образом возникают при рассмотрении таких классических объектов как кольца многочленов, групповые и полугрупповые кольца, кольца матриц. Понятие градуировки играет важную роль во многих кольцевых конструкциях, теории алгебр Ли, гомологической алгебре.

В последние десятилетия активно развивается структурная теория градуированных колец. С периодом около четверти века вышли две монографии К. Настасеску и Ф. ван Ойстайена[1,2]. В первых работах градуировка рассматривалась по группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Отдельно рассматривалась градуировка по двухэлементной группе $\mathbb{Z}_2$, так называемый „супер“ случай. В 90-е годы прошлого века появилось много работ, касающихся колец и модулей, градуированных полугруппой. Различные аспекты этой теории исследовались в работах Г. Абрамса, А.В. Келарева, В.Д. Манна, К. Менини и других, при этом существенную роль в этих исследованиях играла структура самой полугруппы[3,4,5]. В то же время рядом авторов рассматривались кольца, градуированные по группе, и модули, градуированные по множеству, на котором действует эта группа[6,7,8], а С.В. Зеленовым[9] была рассмотрена и более общая ситуация, когда градуировка колец рассматривалась полугруппами, а градуировка модулей – полигонами над этими полугруппами.

[1] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded ring theory. – Amsterdam: North-Holland, 1982

[2] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Methods of graded rings. – Berlin: Springer, 2004.

[3] Abrams G., Menini C., del Rio A. Realization theorems for categories of graded module over semigroup-graded rings // Comm. Algebra. – 1994. – V. 22, no. 13. – P. 5343–5388.

[4] Келарев А.В. Недавние результаты и открытые вопросы о кольцах, градуированных полугруппами // Фундамент. и прикл. матем. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 1115–1139.

[5] Munn W.D. A class of band-graded rings // J. Lond. Math. Soc. – 1992. – V. 45. – P. 1–16.

[6] Dade E.C. Clifford theory for group graded rings // J. Reine Angew. Math. – 1986. – V. 369. – P. 40-86.

[7] Năstăsescu C., Raianu S., van Oystaeyen F. Modules graded by G-sets // Math. Z. – 1990. – V. 203, no. 4. – P. 605–627.

[8] Beattie M.A., Dăscălescu S. Categories of modules graded by G-sets // J. Pure Appl. Alg. – 1996. – V. 107. – P. 129–139.

[9] Зеленов С.В. Теоремы плотности Зельмановича для колец, градуированных по полугруппам // Фундамент. и прикл. матем. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 373–385.

Существенную роль в теории градуированных колец играют градуированные тела, то есть градуированные кольца, каждый ненулевой однородный элемент которых обратим. Поскольку градуированные модули над градуированными телами обладают рядом свойств, аналогичных линейным пространствам, то они называются градуированными линейными пространствами. Например, изучая суперкольца, М.Л. Расин[10] показал, что супералгебры эндоморфизмов конечномерных суперпространств над супертелами изоморфны в том и только том случае, если существует полулинейный изоморфизм суперпространств.

В теории колец широко известна и находит многочисленные применения теорема плотности Джекобсона: примитивное кольцо является плотным подкольцом кольца линейных преобразований линейного пространства над некоторым телом[11]. В дальнейшем появилось много обобщений этой теоремы на всё более широкие классы колец: Р.Е. Джонсон[12] рассматривал первичные кольца, обладающие минимальными ненулевыми правым первичным и левым первичным идеалами; К. Кох и А.С. Мьюборн[13] распространили результат Джонсона на первичные антисингулярные справа кольца с однородным правым идеалом; Дж. Зельмановичем[14] была доказана расширенная теорема плотности для слабо примитивных колец.

В 90-е годы получен ряд результатов, касающихся теорем плотности для градуированных по группе колец: была доказана теорема плотности для градуированных примитивных колец[15]; получена теорема плотности для градуированных полупростых модулей[16]. Автором диссертации был получен градуированный аналог теоремы Зельмановича для градуированных группой колец, С.В. Зеленовым была доказана теорема плотности для градуированных слабо примитивных колец в случае, когда градуировка колец

[10]Racine M. L. Primitive superalgebras with superinvolution // J. Algebra. – 1998. – V. 206. – P. 588–614.

[11]Джекобсон Н. Строение колец. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

[12]Johnson R.E. Representations of prime rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 74, no. 2. – P. 351–357.

[13]Koh K., Mewborn A.C. Prime rings with maximal annihilator and maximal complement right ideals // Proc. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 16, no. 5. – P. 1073–1076.

[14]Zelmanowitz J. Weakly primitive rings // Comm. Algebra. – 1981. – V. 9, no. 1. – P. 23–45.

[15]Liu S.-X., Beattie M., Fang Hongjin. Graded division rings and the Jacobson density theorem// J. Boijing Normal University (Natural Science). – 1991. – V. 27, no. 2. – P. 129–134.

[16]Gomez Pardo J.L. , Nastasescu C. Topological aspects of graded rings// Comm. Algebra. – 1993. – V. 21, no. 12. – P. 4481–4493.

рассматривалась по полугруппам, а градуировка модулей – по полигонам над этими полугруппами, при некоторых условиях сокращения наложенных на полигоны, а С.В. Лимаренко[17] доказал расширенную теорему плотности для суперколец, сформулированную в терминах ровной однородности. В совместной работе автора диссертации, А.В.Михалёва и уже упомянутых авторов [5] дан обзор новых градуированных теорем плотности.

При исследовании колец нередко оказывается полезным вложить рассматриваемое кольцо в кольцо, обладающее теми или иными дополнительными свойствами. Первоначально рассматривался вопрос о вложении колец в тела. В начале 30-х годов прошлого века О. Оре[18] нашел необходимые и достаточные условия вложимости некоммутативного кольца без делителей нуля в тело частных, К. Асано[19] расширил конструкции Оре на кольца с делителями нуля. В конце 50-х годов с появлением работ Р.Е. Джонсона, Ю. Утуми, А.В. Голди, П. Габриэля, И. Ламбека и других значение колец частных возросло не только в связи с вложением колец, но и в связи со структурной теорией колец. В монографии Б. Стенстрёма[20], вышедшей в 1975 году, было дано систематическое изложение теории колец частных ассоциативных колец и ее применение к структурной теории колец. Дальнейшее развитие колец частных во многом связано с теорией Бейдара-Михалёва[21] ортогонального пополнения и циклом исследований В.К.Харченко по теории Галуа колец.

При построении структурной теории градуированных колец значительный интерес представляет изучение колец частных градуированных колец. При этом кольца частных градуированных колец должны естественным образом наследовать градуировку исходного кольца. Используя конструкцию Утуми, Е. Джерперс и П. Ваутерс[22] определили градуированные аналоги максимального, мартиндейловских и симметрического колец частных;

[17]Лимаренко С.В. Слабо примитивные суперкольца // Фундамент. и прикл. матем. — 2004. — Т.10, № 3. — С. 97–142

[18]Ore O. Linear equations in non-commutative fields //Ann. of Math.-1931.- V. 32.- P. 463-477.

[19]Asano K. Aritheoremetische idealtheorie' in nichtkommutativen Ringen //Japan J. Math.-1939.-V. 15.-P. 1-36.

[20]Stenström B. Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory. – Berlin: Springer, 1975.

[21]Бейдар К.И., Михалёв А.В. Ортогональная полнота и алгебраические системы //Успехи матем. наук. – 1985. – Т. 40, вып. 6(246).– С. 77–115.

[22]Jespers E., Wauters P. A general notion of noncommutative Krull rings // J. Algebra. – 1988. – V. 112. – P. 388–398.

установили связь между этими кольцами и их неградуированными аналогами. Максимальные градуированные кольца частных исследовались в диссертации М.Т.Рахмана[23], классическим кольцам частных посвящены работы[24,25,26,27]. В [14] дан обзор современных результатов по кольцам частных градуированных колец. Градуированным кольцам частных посвящена третья глава данной работы.

Для различных алгебраических систем важную роль при построении структурной теории играет понятие радикала. В 50-х годах прошлого века в работах А.Г. Куроша[28] и С.А. Амицура[29,30] было заложено начало общей теории радикалов колец и алгебр. Было замечено, что общую теорию радикалов можно развивать в любых алгебраических системах, в которых имеет смысл понятие ядра с его обычными свойствами, т.е. в достаточно "хороших" категориях. Основные результаты общей теории радикалов колец и алгебр можно найти, например, в монографиях В.А. Андрунакиевича и Ю.М. Рябухина[31] и Б. Дж. Гарднера и Р. Вигандта[32]

В 1964 году В.А.Андрунакиевич и Ю.М.Рябухин[33] показали, что общая теория радикалов ассоциативных колец может быть изложена внешним образом – на языке модулей или, что то же самое, на языке теории представлений. При таком изложении существенную роль играют общие модули, обобщающие понятия неприводимых и первичных модулей, причем специальные радикалы характеризуются некоторыми подклассами первичных

[23] Рахман М. Т. Инъективные модули, кольца эндоморфизмов и локализации в случае градуированных колец: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1982.

[24] Jensen A., Jondrup S. Classical quotient rings of group graded rings // Comm. Algebra. – 1992. – V. 20. – P. 2923–2936

[25] Năstăsescu C., Nauwelaerts E., van Oystaeyen F. Arithmetically graded rings revisited // Comm. Algebra. – 1986. – V. 14, no. 10. – P. 1191–2017

[26] Goodearl K.R., Stafford J.T. The graded version of Goldie‘s theorem // Contemp. Math. – 2000. – V. 259. – P.237–240

[27] Канунников А.Л. Градуированные варианты теоремы Голди // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 2011. – № 3. – С. 46–50.

[28] Курош А.Г. Радикалы колец и алгебр// Матем. сб. – 1953. – Т. 33, № 1. – С. 13–26.

[29] Amitsur S.A. A general theory of radicals, I: Radicals in complete lattices// Amer. J. Math. – 1952. – V. 74. – P. 774–786.

[30] Amitsur S.A. A general theory of radicals, II: Radicals in rings and bicategories// Amer. J. Math. –, 1954. – V. 76. – P. 100–125.

[31] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. – М.: Наука, 1979.

[32] Gardner B.J., Wiegandt R., Radical theory of rings – New York: Marcel Dekker, 2004.

[33] Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Модули и радикалы// ДАН СССР 1964. – Т. 156, № 5. – С. 991–994.

модулей[34,35].

При рассмотрении градуированных колец градуированную версию радикала можно определить различными способами. Градуированные радикалы градуированных колец активно изучались Г. Бергманом, М. Коен, К. Менини, С. Монтгомери, М.А.Бити, П.Стьюартом и другими[36,37,38,39]. Было установлено, что градуированный радикал Джекобсона можно определить с помощью gr-неприводимых модулей[40], а градуированный первичный радикал – с помощью gr-первичных модулей[41].

Многими авторами изучались радикалы градуированных по полугруппе колец, в их числе А.Д Белл, Б.Гарднер, А.В.Келарев, Е.Джерперс, В.Д. Манн, П.Ваутерс[42,43,44,45,46]. В этих работах исследовались свойства радикалов градуированных колец и алгебр, однородность радикалов и характеризация радикалов через радикалы компонент для отдельных классов полугрупп. Были поэлементно охарактеризованы градуированные радикалы Бэра, Левицкого, Кёте и Брауна-Маккоя кольца, градуированного сократимым моноидом[47]. Радикалам градуированных колец посвящена дис-

---

[34] Андрунакиевич В.А. Первичные модули и радикал Бэра// Сиб. матем. журн. – 1961. – Т. 2, №6. – С. 801–806.

[35] Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Специальные модули и специальные радикалы// ДАН СССР. – 1962. – Т. 147, №6. – С. 1274–1277.

[36] Beattie M.A., Stewart P.N. Graded radicals of graded rings// Acta Math. Hung. – 1991. – V. 58, no. 3–4. – P. 261–272.

[37] Beattie M.A., Liu S.-X., Stewart P. Comparing graded versions of the prime radical// Canad. Math. Bull. – 1991. – V. 34, no. 2. – P. 158–164.

[38] Cohen M., Montgomery S. Group-graded ring, smash products, and group action// Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 282, no. 1. –. P. 237–258.

[39] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. The strongly prime radical of graded rings// Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B. – 1984. – V. 36. – P. 243–251.

[40] Bergman G. On Jacobson radicals of graded rings// preprint

[41] Liu S.-X., van Oystaeyen F. Group-graded rings, smash product and additive categories// Perspectives in ring theory. – Kluwer Academ Press, 1988. – P. 299– 300.

[42] Bell A.D., Stalder S.S.,Temply M.L. Prime ideals and radicals in semigroup-graded rings// Proc. Edinb. Math. Soc. – 1996. – V. 39, no. 1. – P. 1–25.

[43] Clase M.V., Jespers E. On the Jacobson radical of semigroup graded rings// J. Algebra. 1994. – V. 169. – P. 79–97.

[44] Kelarev A.V. The regular radical of semigroup rings of commutative semigroups// Glasgow Math. J. – 1992. – V. 34. – P. 133–141.

[45] Kelarev A.V. Radicals of algebras graded by cancellative linear semigroups// Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – V. 124, no. 1. – P. 61–65.

[46] Wauters P., Jespers E. Rings graded by an inverse semigroups with finite many idempotents// Houston J. Math. – 1989. – V. 15. – P. 291–304.

[47] Wnag Yao, Ren Yan-li. The characterization of graded radicals by means of elements// J. Jishou Univ.

сертация С.А. Абдэль Азиз[48]. В четвертой главе данной работы продолжено изучение градуированных радикалов градуированных колец.

Важное значение при исследовании градуированных колец и модулей играют так называемые градуированные эквивалентности, т.е. эквивалентности, которые перестановочны со всеми функторами сдвига градуировок. В случае $G = \mathbb{Z}$, такие эквивалентности были охарактеризованы автором диссертации[49], а также Р. Гордоном и Е. Л. Грином[50]. К. Менини и К. Настасеску[51] заметили, что результаты остаются верными и для произвольной группы G. Дж. Хейфнер[52] рассматривал градуированные эквивалентности градуированных колец с локальными единицами, А. дель Рио[53] описал градуированные эквивалентности между категориями градуированных модулей над кольцами в том случае, когда градуировка колец рассматривалась по различным группам. Градуированным эквивалентностям в категориях градуированных модулей посвящена пятая глава данной работы.

При изучении колец линейных операторов линейных пространств и колец эндоморфизмов модулей одним из центральных вопросов является описание их изоморфизмов. Описание изоморфизмов колец линейных преобразований линейных пространств над телами приведено в монографии Р. Бэра[54]. Проблема описания изоморфизмов колец эндоморфизмов модулей фактически стартовала с теоремы Бэра-Капланского о характеризации абелевых групп их кольцами эндоморфизмов (важность модульного подхода в этой задаче была подчеркнута в монографии И. Капланского[55] по бесконечным абелевым группам). Классическая постановка задачи выясняет, когда изоморфизм колец эндоморфизмов модулей индуцирует-

Natur. Sci. Ed. – 1999. – V. 20, no. 3. – P. 41–45.

[48]Абдэль Азиз С.А. Радикалы градуированных колец: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1986.

[49]Балаба И.Н. Градуированный вариант теоремы Мориты. // Сб. тезисов V Всесозн. симп. по теории колец, алгебр и модулей. - Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982.– С. 10-11.

[50]Gordon R., Green E.L. Graded Artin algebras // J. Algebra. – 1982. – V. 76, no. 1. – P. 111–137.

[51]Menini C., Năstăsescu C. When is R-gr equivalent to the category of modules? // J. Pure Appl. Alg. – 1988, no. 3. – P. 277-291.

[52]Haefner J. Graded Equivalence Theory with Applications // J. Algebra. – 1995. – V. 172, no. 2. – P. 385–424.

[53]del Rio A. Graded rings and equivalence categories // Comm. Algebra. – 1991. – V. 19, no. 3. – P. 997–1012.

[54]Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955.

[55]Kaplansky I. Infinite abelian groups. – The University of Michigan, 1954.

ся полулинейным преобразованием; начиная с работы К. Мориты[56] стала рассматриваться индуцируемость эквивалентностью Мориты, т.е. функтором, ассоциированным с конечно порожденным проективным образующим[57]. А.В.Михалёвым[58] была рассмотрена и более общая ситуация, когда изоморфизм колец эндоморфизмов индуцируется функтором, ассоциированным с образующим модулем: были доказаны три критерия, решающие вопрос о том, когда изоморфизм колец эндоморфизмов строгих образующих модулей (т.е. модулей, имеющих свободное циклическое прямое слагаемое) индуцируется функтором, ассоциированным с образующим модулем, эквивалентностью Мориты или полулинейным преобразованием. Наряду с описанием изоморфизмов колец эндоморфизмов модулей значительный интерес представляет описание антиизоморфизмов колец эндоморфизмов. В уже упомянутой монографии Р. Бэра было установлено, что кольца линейных преобразований линейных пространств V_D и W_E над телами антиизоморфны в том и только в том случае, если пространства V_D и W_E конечномерны и существует антиполулинейное преобразование сопряженного пространства ${}_DV^*$ на пространство W_E, которое индуцирует антиизоморфизм. К.Г. Уолфсон[59] привел критерий индуцируемости антиизоморфизма колец эндоморфизмов строгих образующих антиполулинейным преобразованием. А.В. Михалёвым и К.И.Бейдаром[60] был установлен критерий индуцируемости антиизоморфизма колец эндоморфизмов строгих образующих антиэквивалентностью Мориты.

При рассмотрении градуированных колец вместо кольца эндоморфизмов для градуированного модуля естественно рассматривать градуированное кольцо эндоморфизмов вообще говоря, строго содержащееся в кольце эндоморфизмов модуля, рассматриваемого без градуировки. Изоморфиз-

[56]Morita K. Category-isomorphisms and endomorphism rings of modules// Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – V. 103. – P. 451-469.

[57]Bolla M.L. Isomorphisms between endomorphism rings of progenerators// J. Algebra. – 1984. – V. 87. – P. 261–281.

[58]Михалёв А.В. Изоморфизмы колец эндоморфизмов модулей, близких к свободным// Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 1989. –. № 2. – С. 20–27.

[59]Wolfson K. G. Anti-isomorphism of endomorphism rings of locally free modules// Math. Z. – 1989. – V.202. – P. 151–159.

[60]Бейдар К.И., Михалёв А.В. Антиизоморфизмы колец эндоморфизмов модулей, близких к свободным, индуцированные антиэквивалентностями Мориты// Тр. семинара им. И.Г.Петровского. – 1996. – Вып. 19. – С. 338–344.

мам и антиизоморфизмам градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей близких к свободным посвящена заключительная глава данной работы.

Важное место в теории градуированных колец занимает проблема описания градуировок. В последние годы было опубликовано много работ, касающихся описанию всех возможных градуировок на кольце матриц $M_n(k)$ над полем k[61,62,63]. В этих работах были выделены, так называемые *хорошие* (или *элементарные*) градуировки, которые характеризовались тем свойством, что все матричные единицы E_{ij} являются однородными элементами. Результаты данной работы позволяют дать описание „хороших“ градуировок на кольцах матриц над любыми градуированными кольцами.

Целью работы является развитие структурной теории градуированных колец на основе градуированных колец эндоморфизмов, градуированных радикалов, градуированной эквивалентности Мориты и градуированных колец частных, позволяющих, например, решить для градуированных колец проблему В.А. Андрунакиевича о специальных радикалах, градуированные варианты проблем Мориты и Бэра-Капланского.

Основные методы исследования. В диссертации используются методы классической теории колец, теории категорий и развитые методы теории градуированных структур.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получен градуированный аналог "треугольной теории Галуа": построены изоморфизм (антиизоморфизм) между решеткой градуированных подпространств градуированного линейного пространства над градуированным телом и решеткой правых (левых) градуированных аннуляторных идеалов его градуированного кольца эндоморфизмов, антиизоморфизм между решеткой правых и решеткой левых градуированных аннуляторных идеалов градуированного кольца эндоморфизмов. Установлено, что любой изоморфизм градуированных колец линейных преобразований градуирован-

---

[61] Бахтурин Ю.А., Зайцев М.В., Сегал С.К. Конечномерные простые градуированные алгебры// Матем. сб. – 2008. – Т. 199. – № 7. – С. 21–40.

[62] Bahturin Yu. A., Sehgal S.K., Zaicev M.V. Group graging on associative algebras// J. Algebra. – 2001. – V. 241. – P. 677–698.

[63] Dăscălescu S., Ion B., Năstăsescu C. and Rios Montes J. Group gradings on full matrix rings// J. Algebra. – 1999. – V. 220. – P. 709–728.

ных линейных пространств над градуированными телами индуцируется специального вида полулинейным преобразованием линейных пространств.

2. Доказана расширенная теорема плотности для градуированных колец; описаны градуированные слабо примитивные кольца в случае, если градуировка кольца рассматривается по полугруппе, а градуировки модулей – по различным полигонам над этой полугруппой (при некоторых условиях сокращения, наложенных на полигон).

3. Описаны свойства градуированного центроида Мартиндейла полупервичного градуированного кольца. Получена градуированная версия теоремы Познера, утверждающая, что градуированная первичная PI-алгебра обладает градуированной простой конечномерной над своим градуированным центром алгеброй частных.

4. Дана характеристика специальных радикалов категории градуированных колец на языке теории представлений; рассмотрены градуированные версии классических радикалов и охарактеризованы классы модулей, им соответствующие; определен класс строго первичных градуированных модулей, характеризующий градуированный строго первичный радикал. Установлено, что локально разрешимый градуированный радикал обобщенно специальной супералгебры Ли совпадает с первичным градуированным радикалом.

Введено понятие первичного радикала градуированной Ω-группы, дано его поэлементное описание; доказано, что градуированный первичный радикал градуированной Ω-группы с условием конечности совпадает с нижним слабо разрешимым (в смысле Парфенова) радикалом.

5. Дано описание градуированных эквивалентностей Мориты в полных подкатегориях категорий градуированных модулей.

6. Решена проблема Бэра-Капланского для градуированных модулей, близких к свободным. Получены три критерия для изоморфизма градуированных колец эндоморфизмов быть индуцированным при помощи градуированного полулинейного преобразования, градуированной эквивалентности Мориты или градуированного точного вложения соответственно. Получены два критерия для антиизоморфизма градуированных колец эндоморфизмов быть индуцированным градуированным антиполулинейным преобразованием или градуированной антиэквивалентностью Мориты соответственно. Описаны „хорошие“ градуировки на кольцах матриц над градуи-

рованными кольцами.

Тем самым в диссертации решены следующие проблемы:

– построение градуированной треугольной теории Галуа;

– градуированный вариант проблемы В.А. Андрунакиевича о специальных радикалах;

– градуированный вариант проблемы Мориты;

– градуированный вариант проблемы Бэра-Капланского.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и может быть применима при исследовании различных градуированных структур.

Апробация диссертации. Результаты диссертации неоднократно докладывалась автором

— на заседаниях научно-исследовательском семинаре по алгебре и семинаре „Кольца и модули“ кафедры Высшей алгебры МГУ имени М.В.Ломоносова

— и на следующих научных конференциях:

международной конференции по алгебре (Красноярск, 1993); Ш международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“(Тула, 1996); международной алгебраической конференции памяти А.Г. Куроша (Москва, 1998); международной конференции „Универсальная алгебра и ее приложения“(Волгоград, 1999); международном алгебраическом семинаре, посвященного 70-летию научно-исследовательского семинара МГУ по алгебре (Москва, 2000); IV международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“(Тула, 2001); международной алгебраической конференции, посвященной памяти З.И.Боревича (Санкт-Петербург, 2002); V международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“(Тула, 2003); международной конференции по радикалам (ICOR-2003) посвященной памяти В.Андранукиевича (Кишинев, 2003); международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию МГУ и 75-летию кафедры высшей алгебры (Москва, 2004); международном семинаре „Компьютерная алгебра и информатика“, посвященном 30-летию лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета МГУ (Москва, 2005); Ломоносовских чтения МГУ им. Ломоносова (Москва, 2007); международной научной конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики“(Тула, 2007); международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященная 80-летию В.Е.Воскресенского (Самара, 2007); международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша (Москва, 2008, пленарный доклад); международном алгебраическом семинаре кафедры высшей алгебры, посвященном 80-летию А.И.Кострикина (Москва, 2009); VII международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“, посвященной памяти А.А.Карацубы (Тула, 2010, пленарный доклад); международном алгебраическом симпозиуме, посвященном 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию А.В.Михалёва (Москва, 2010, пленарный доклад); VIII международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“, посвященной 190-летию П.Л.Чебышева и 120-летию И.М.Виноградова (Саратов, 2011); международной конференции „Алгебра и математическая логика“, посвященной 100-летию со дня рождения В.В.Морозова (Казань, 2011); IX международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“, посвященной 80-летию со дня рождения М.Д.Гриндлингера (Тула, 2012, пленарный доклад).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 39 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации Диссертация состоит из введения, 6 глав, разбитых на параграфы (нумерация параграфов подчинена нумерации глав, нумерация теорем подчинена нумерации параграфов) и списка литературы. Полный объем диссертации – 212 страниц, библиография включает 201 наименование, из которых 39 – публикации автора по теме диссертации.

Содержание диссертации

Во введении содержится формулировка результатов диссертации; анализируются результаты, предшествующие появлению представленной работы, дается краткое содержание глав.

Глава 1 носит вспомогательных характер, в ней содержатся основные определения, понятия и факты, необходимые для дальнейшего изложения.

Если не оговорено противное, то всюду в работе: G – мультипликативная группа с единичным элементом e; кольцо – ассоциативное G-градуированное с единицей, модуль – G-градуированный модуль (чтобы подчеркнуть с какой стороны определена структура модуля будем использовать обозначения: M_A, ${}_AM$, ${}_AM_R$ и т.д.); gr.mod-A (A-gr.mod) – категория правых (левых) градуированных A-модулей, объектами которой являются правые (левые) градуированные A-модули, а морфизмами – сохраняющие градуировку гомоморфизмы.

Идеал I кольца A называется *градуированным*, если $I = \bigoplus_{g\in G}(I \cap A_g)$. Для любого (левого, правого или двустороннего) идеала I в A, всюду далее I_{gr} – наибольший градуированный идеал, содержащийся в I.

Если A – алгебра над полем k, то все A_g ($g \in G$) должны быть k-подпространствами пространства A.

Отображение $\varphi : A \to B$ градуированных колец называется *изоморфизмом* (*антиизоморфизмом*) градуированных колец, если φ является кольцевым изоморфизмом (антиизоморфизмом) и $\varphi(A_g) \subseteq B_g$ ($\varphi(A_g) \subseteq B_{g^{-1}}$) для всех $g \in G$.

Для $M_A, N_A \in$ gr.mod-A обозначим через $\mathrm{HOM}(M_A, N_A)_g$ множество *градуированных морфизмов степени* g, т.е. A-линейных отображений, для которых $f(M_h) \subseteq N_{gh}$ для всех $h \in G$; $\mathrm{HOM}(M_A, N_A) = \bigoplus_{g\in G}\mathrm{HOM}(M_A, N_A)_g$ – градуированная абелева группа; $\mathrm{END}(M_A) = \mathrm{HOM}(M_A, M_A)$ – градуированное кольцо, которое называется *градуированным кольцом эндоморфизмов* модуля M_A. Если группа G конечна или модуль M – конечно порожден, то $\mathrm{END}(M_A)$ совпадает с кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}(M_A)$ модуля M, рассматриваемого без градуировки. Отметим, что при рассмотрении левых модулей гомоморфизмы будем писать слева, а $f \in \mathrm{HOM}({}_AM,\ {}_AN)_g$ означает, что $(M_h)f \subseteq N_{hg}$.

Пусть $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ и $\sigma \in G$, тогда $M(\sigma)$ – модуль M, рассматриваемый с градуировкой $M(\sigma)_g = M_{\sigma g}$ для правого модуля (и $M(\sigma)_g = M_{g\sigma}$ – для левого), $h(M) = \bigcup_{g\in G} M_g$ – множество однородных элементов модуля M.

Всюду далее градуированные аналоги стандартных определений будем обозначать приставкой "gr-".

В § 1.2 приведены свойства gr-инъективных и gr-проективных модулей. Введено понятие gr-образующего категории градуированных модулей gr.mod-A. Градуированный A-модуль U_A называется gr-образующим категории gr.mod–A, если он удовлетворяет условиям следующей леммы.

Лемма 1.2.3. *Для градуированного A-модуля U_A следующие условия равносильны:*

1) $\bigoplus_{g\in G} U(g)$ *является образующим категории* gr.mod-A*;*

2) функтор $\mathrm{HOM}_A(U,-) : \text{gr.mod-}A \to \text{gr.mod-}\mathrm{END}_A(U)$ *унивалентен;*

3) существуют конечные множества градуированных морфизмов $f_1, f_2, \dots, f_n \in h(\mathrm{HOM}_A(U, A))$ *и однородных элементов* $u_1, u_2, ..., u_n \in h(U)$*, такие что* $\sum_{i=1}^{n} f_i(u_i) = 1$*;*

4) U_A *– образующий категории* mod–A*.*

В § 1.3 дана характеристика первичных и полупервичных градуированных колец.

В § 1.4 введено понятие полулинейного и антиполулинейного σ-изоморфизма для градуированных модулей.

Полулинейный изоморфизм (β, γ) градуированных модулей M_A и N_B будем называть *полулинейным σ-изоморфизмом* ($\sigma \in G$), если $(M_g)^\beta \subseteq N_{g\sigma}$ и $(A_g)^\gamma \subseteq B_{\sigma^{-1}g\sigma}$ для всех $g \in G$.

Антиполулинейный изоморфизм (γ, β) градуированных модулей ${}_AM$ и N_B будем называть *антиполулинейным σ-изоморфизмом* ($\sigma \in G$), если $(M_g)^\beta \subseteq N_{g^{-1}\sigma}$ и $(A_g)^\gamma \subseteq B_{\sigma^{-1}g^{-1}\sigma}$ для всех $g \in G$.

Глава 2 посвящена градуированным телам, регулярным кольцам и теоремам плотности.

В § 2.1 рассмотрены градуированные модули над градуированными телами, являющимися gr-свободными модулями, описаны их однородные базисы. Установлено, что градуированное кольцо с единицей, каждый правый (левый) градуированный модуль над которым является gr-свободным, является градуированным телом (теорема 2.1.1).

§ 2.2 посвящен градуированным кольцам эндоморфизмов градуированных линейных пространств над градуированными телами. Установлено, что они является gr-регулярными кольцами (теорема 2.2.1).

Пусть V_D — градуированное линейное пространство над градуированным телом D, $A = \mathrm{END}_D(V)$ - его градуированное кольцо эндоморфизмов. Для $H \subseteq A$, $S \subseteq V$, положим:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{Ann}_V(H) = \{v \in V \mid Hv = 0\}, & \mathrm{Ann}_A(S) = \{f \in A \mid f(S) = 0\}, \\
\mathrm{Coann}_V(H) = HV = \{hv \mid h \in H, v \in V\}, & \mathrm{Coann}_A(S) = (S : V)_A, \\
l_A(H) = \{a \in A \mid aH = 0\}, & r_A(H) = \{a \in A \mid Ha = 0\}.
\end{array}$$

Обозначим через $\mathcal{L}^{gr}(V)$ решетку градуированных подпространств пространства V, а через $\mathcal{L}_0^{gr}({}_AA)$ $(\mathcal{L}_0^{gr}(A_A))$ решетку левых (правых) градуированных аннуляторных идеалов кольца A

К основным результатом данного параграфа следует отнести теорему, являющуюся градуированным аналогом "треугольной теории Галуа"

Теорема 2.2.3. *Пусть V – G-градуированного линейное пространство над градуированным телом D, $A = \mathrm{END}_D(V)$ – его градуированное кольцо линейных преобразований. Тогда:*

1) отображение $\mathrm{Ann}_A : \mathcal{L}^{gr}(V) \longrightarrow \mathcal{L}_0^{gr}({}_AA)$ является антиизоморфизмом (с обратным отображением Ann_V);

2) отображение $\mathrm{Coann}_A : \mathcal{L}^{gr}(V) \longrightarrow \mathcal{L}_0^{gr}(A_A)$ является изоморфизмом (с обратным отображением Coann_V);

3) отображение $l_A : \mathcal{L}_0^{gr}(A_A) \longrightarrow \mathcal{L}_0^{gr}({}_AA)$ является антиизоморфизмом (с обратным отображением r_A).

и следующую теорему об изоморфизме

Теорема 2.2.4. *Пусть $A = \mathrm{END}_D(V)$ и $B = \mathrm{END}_E(W)$ – градуированные кольца линейных преобразований градуированных линейных пространств V_D и W_E над градуированными телами D и E соответственно. Тогда $\phi : A \to B$ является изоморфизмом градуированных колец в том и только том случае, если существуют элемент $\sigma \in G$ и полулинейный σ-изоморфизм (β, α) градуированных линейных пространств V_D и W_E, такие что $f^\phi = \beta f \beta^{-1}$ для любого $f \in A$.*

Третий и четвертый параграф второй главы посвящен градуированным регулярным кольцам и модулям, причем в § 2.4 градуировка рассматривается по регулярной полугруппе S.

В § 2.5 доказывается расширенная теорема плотности для градуированного группой кольца.

Градуированное кольцо называется *слабо примитивным*, если оно обладает точным критически сжимаемым градуированным модулем, т. е. таким модулем, который может быть вложен однородным мономорфизмом в каждый свой ненулевой градуированный подмодуль, но не может быть вложен ни в один из своих собственных градуированных фактор-модулей.

Пусть A – градуированное кольцо. Назовем *градуированной A-решеткой* тройку $(\Delta, {}_\Delta V_A, M_A)$, где Δ – градуированное тело, V – градуированный Δ–A-бимодуль, M_A – градуированный A-модуль, $\Delta M = V$, и A действует точно на M (значит мы можем считать, что $A \subseteq \mathrm{END}_\Delta(V)$).

Теорема 2.5.4. *Для градуированного кольца A следующие условия эквивалентны:*

1) A слабо примитивно;

2) существует A-решетка $(\Delta, {}_\Delta V_A, M_A)$ такая, что для данных линейно независимых над Δ элементов $v_1, \ldots, v_k \in h(V)$ существует $0 \neq \alpha \in h(\Delta)$ такой, что для любых элементов $m_1, \ldots, m_k \in M$ найдется такой $a \in A$, что $\alpha m_i = v_i a \in M$ для каждого $i = 1, \ldots, k$; причем, при $k = 1$ и $m_1 \in h(M)$ элемент a можно выбрать однородным.

Описаны градуированные слабо примитивные кольца в случае, если градуировка кольца рассматривается по полугруппе, а градуировки модулей – по различным полигонам над этой полугруппой (при некоторых условиях сокращения, наложенных на полигоны).

Глава 3 посвящена градуированным кольцам частных.

В § 3.1 приводятся результаты, касающихся правых градуированных классических колец частных, т.е. колец частных относительно множества всех однородных неделителей нуля.

§ 3.2 посвящен градуированным максимальным кольцам частных, исследуются свойства градуированных максимальных колец частных gr-полупервичных колец. Градуированное кольцо называется несингулярным справа, если его правый градуированный сингулярный идеал $\mathrm{sing}_{gr}(A) = \mathrm{sing}(A)_{gr} = 0$.

Теорема 3.2.1 *Пусть $Q = Q^{gr}(A)$ — максимальное градуированное правое кольцо частных gr-полупервичного кольца A. Тогда кольцо $Q^{gr}(A)$ gr-регулярно в том и только том случае, если* $\mathrm{sing}_{gr}(A) = 0$.

В § 3.3 описаны свойства градуированного расширенного центроида $C^{gr}(A)$ gr-полупервичного кольца A, являющегося максимальным градуированным подкольцом центра градуированного мартиндейловского правого кольца частных $Q_r^{gr}(A)$. Установлено, что он является gr-регулярным и gr-самоинъективным подкольцом расширенного центроида $C(A)$ (теорема 3.3.2).

Теорема 3.3.3. *Пусть A – gr-полупервичное кольцо, $Q^{gr} = Q^{gr}(A)$, $C^{gr} = C^{gr}(A)$, ${}_AU_A$ – градуированный подбимодуль A–A-бимодуля Q^{gr} и $f : {}_AU_A \longrightarrow {}_AQ^{gr}_A$ – гомоморфизм бимодулей, такой что $f(U_h) \subseteq Q^{gr}_{gh}$ для* *некоторого g лежащего в центре группы G. Тогда существует элемент $\lambda \in C_g^{gr}$, такой что $f(u) = \lambda u$ для всех $u \in U$.*

С помощью теоремы 3.3.3. получено следующее предложение.

Предложение 3.3.6. *Пусть $C^{gr}(A)$ – градуированный расширенный центроид gr-полупервичного кольца A. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) A – gr-первично;

2) $C^{gr}(A)$ — градуированное поле;

3) $C^{gr}(A)_e$ — поле.

В § 3.4 рассматриваются gr-первичные алгебры над полем k, являющиеся PI-алгебрами как алгебры без градуировки.

Теорема 3.4.4. *Пусть A – gr-примитивная алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d. Тогда A является конечномерной над своим градуированным центром $Z_{gr}(A)$ gr-простой алгеброй и $\dim_{Z_{gr}(A)}(A) \leq [d/2]^2$, где $[d/2]$ – целая часть $d/2$.*

Предложение 3.4.1. *Пусть A – gr-первичная PI-алгебра, Z_{gr} – ее градуированный центр. Тогда $I \cap Z_{gr} \neq 0$ для любого ненулевого градуированного идеала I в A.*

С помощью теоремы 3.4.4. и предложения 3.4.1. доказывается градуированный аналог теоремы Познера.

Теорема 3.4.5. *Пусть A – gr-первичная PI-алгебра, A_0 – градуированная центральная алгебра частных алгебры A. Тогда:*

1) A_0 конечномерная над своим градуированным центром F gr-простая алгебра, причем F – градуированное поле частных центра $Z_{gr}(A)$;

2) A_0 является градуированной (левой и правой) классической алгеброй частных для A;

3) A и A_0 удовлетворяют одним и тем же полиномиальным тождествам.

Глава 4 посвящена радикалам градуированных колец.

В § 4.1 исследовались первичные и строго первичные градуированные модули. Описаны свойства gr-первичных, gr-копервичных модулей и gr-строго первичных колец и модулей.

§ 4.2 посвящен специальным радикалам категории градуированных колец.

Показано, что наибольший специальный класс градуированных колец совпадает с классом всех gr-первичных колец (предложение 4.2.3).

Установлено, что любой специальный радикал категории градуированных колец может быть определен посредством некоторого класса градуированных модулей, являющегося подклассом gr-первичных модулей. Охарактеризованы классы модулей, определяющие классические градуированные радикалы, такие как градуированные радикалы Левицкого, Кёте и Брауна-Маккоя, а также градуированный компрессивный и градуированный строго первичный радикалы.

В § 4.3 рассматривались радикалы в категории сжатых градуированных полугруппой колец. Определен аналог радикала Джекобсона в данной категории и доказано, что он будет специальным радикалом.

В § 4.4 введено понятие градуированной Ω-группы, включающее в себя не только ассоциативные алгебры (с градуировкой и без оной) и группы, но также алгебры и супералгебры Ли, конформные и вертексные алгебры.

Дано поэлементное описание первичного радикала градуированной Ω-группы (теорема 4.4.1.), установлено, что градуированный первичный радикал градуированной Ω-группы с условием конечности совпадает с нижним слабо разрешимым (в смысле Парфенова) радикалом (теорема 4.4.3.).

§ 4.5 посвящен исследованию первичного радикала обобщенно специальной супералгебры Ли. Установлено, что он совпадает с локально разрешимым градуированным радикалом.

Глава 5 посвящена эквивалентностям и полным вложениям в категориях градуированных модулей.

§ 5.1 доказана теорема

Теорема 5.1.1. *Пусть $\mathcal{A}$ – жесткая подкатегория категории* $\mathrm{gr.mod}\text{–}A$, *т.е. полная подкатегория, замкнутая относительно подмодулей, гомоморфных образов, прямых сумм и сдвигов градуировки,* $U \in \mathcal{A}$ *и* $B = \mathrm{END}_A(U)$. *Тогда, если модуль U является gr-образующим категории $\mathcal{A}$, то функтор* $\mathrm{HOM}_A(U, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{gr.mod}-B$ *является полным унивалентным функтором, и имеет место естественная эквивалентность функторов* $\mathrm{HOM}_A(U, -) \bigotimes_B U \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

§ 5.2 посвящен градуированному Морита-контексту и эквивалентностям им порождаемым. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 5.2.4. *Для градуированных колец A и B следующие условия* *эквивалентны:*

1) категории gr.mod–A *и* gr.mod–B *являются gr-эквивалентными;*

2) категории A–gr.mod *и* B–gr.mod *являются gr-эквивалентными;*

3) существуют конечно порожденный проективный gr-образующий модуль P_A *и изоморфизм градуированных колец* $B \approx \mathrm{END}_A(P)$*;*

4) существуют градуированные бимодули ${}_BP_A$ *и* ${}_AQ_B$ *и изоморфизм градуированных бимодулей* $P \bigotimes_A Q \approx B, \quad Q \bigotimes_B P \approx A.$

Эквивалентность категорий осуществляют функторы:

$$\mathrm{HOM}_A(P,-) : \mathrm{gr.mod}-A \longrightarrow \mathrm{gr.mod}-B \quad \textit{и}$$

$$-\bigotimes_B P : \mathrm{gr.mod}-B \longrightarrow \mathrm{gr.mod}-A.$$

В §5.3 рассматриваются градуированные эквивалентности в жестких подкатегориях, индуцированные локализациями и колокализациями. Дано описание градуированных эквивалентностей между полными подкатегориями категорий градуированных модулей (теорема 5.3.1).

В **главе 6** рассматриваются изоморфизмы и антиизоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным.

В § 6.1 установлено, что изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов конечно порожденных проективных gr-образующих индуцируются градуированной эквивалентностью Мориты (теорема 6.1.2).

В § 6.2 вводится понятие строго градуированного образующего и исследуются его свойства.

Модуль U_A – строгий gr-образующий, если $U_A = P_A \bigoplus H_A$ и $P_A \cong A(\sigma)$ – gr-свободный циклический модуль. В этом случае существуют однородный идемпотент $v = v^2 \in END(M_A)_e$, такой что $vM_A \cong P_A$, называемый идемпотентным эндоморфизмом ранга 1 и обозначать это: $gr.r(v) = 1$.

В § 6.3 получены три критерия для изоморфизма градуированных колец эндоморфизмов строгих gr-образующих быть индуцированным при помощи градуированного полулинейного преобразования, градуированной эквивалентности Мориты или градуированного точного вложения соответственно.

Пусть A и B – градуированные кольца, M_A и N_B – строгие gr-образующие, $R = END_A(M)$ и $S = END_B(N)$ – их градуированные кольца эндоморфизмов, $\alpha : R \to S$ – изоморфизм градуированных колец.

Теорема 6.3.1. *Следующие условия равносильны:*

1) если $v \in R$ и $gr.r(v) = 1$, то $v^\alpha N_B$ – конечно порожден и проективен;

2) если $v \in R$, $w \in S$ и $gr.r(v) = gr.r(w) = 1$, то $v^\alpha SwSv^\alpha = v^\alpha Sv^\alpha$;

3) если $w \in S$ и $gr.r(w) = 1$ то $w^{\alpha^{-1}}M$ – gr-образующий;

4) существует gr-образующий U_A, для которого $B = END(U_A)$, и изоморфизм градуированных B-модулей $\sigma : HOM(U_A, M_A) \to N$, такой, что $[HOM(U_A, r)(x)]^\sigma = r^\alpha x^\sigma$ для всех $x \in HOM(U_A, M_A)$, $r \in R$.

Теорема 6.3.2. *Следующие условия равносильны:*

1) если $v = v^2 \in R$, $gr.r(v) = 1$, то $v^\alpha N_B$ – gr-прообразующий;

2) если $v = v^2 \in R$ и $w = w^2 \in S$, $gr.r(v) = gr.r(w) = 1$, то $v^\alpha N_B$ и $w^{\alpha^{-1}}M_A$ – конечно порожденные проективные градуированные модули;

3) если $v = v^2 \in R$ и $w = w^2 \in S$, $gr.r(v) = gr.r(w) = 1$, то $v^\alpha N_B$ и $w^{\alpha^{-1}}M_A$ – gr-образующие модули;

4) существует градуированная эквивалентность $T : gr.mod-A \to gr.mod-B$, такая что $T(M) = N$ и $T(r)x = r^\alpha x$ для всех $x \in N$, $r \in R$.

Теорема 6.3.3. *Следующие условия равносильны:*

1) если $v = v^2 \in R$ и $gr.r(v) = 1$, то $gr.r(v^\alpha) = 1$;

2) существуют $\sigma \in G$ и полулинейный σ-изоморфизм (β, γ) модулей M_A и N_B, такой, что $r^\alpha = \beta r \beta^{-1}$ для всех $r \in R$.

В § 6.4 получены два критерия для антиизоморфизма градуированных колец эндоморфизмов строгих gr-образующих быть индуцированным градуированным антиполулинейным преобразованием или градуированной антиэквивалентностью Мориты соответственно.

Пусть M_A и N_B – строгие gr-образующие, причем M_A – полурефлексивен (т.е. канонический гомоморфизм $\omega_M : M \to M^{**} = \mathrm{HOM}_A(\mathrm{HOM}(M, A), A)$ является мономорфизмом), $R = END(M_A)$, $S = END(N_B)$ и $\alpha : R \to S$ антиизоморфизм градуированных колец.

Теорема 6.4.2. *Следующие условия равносильны:*

1) если $v \in R$ и $gr.r(v) = 1$, то $gr.r(v^\alpha) = 1$;

2) существуют $\sigma \in G$ и антиполулинейный σ-изоморфизм (γ, β) модулей ${}_AM^*$ и N_B, такие что $(f\eta^*)^\beta = \eta^\alpha f^\beta$ для всех $f \in M^*$, $\eta \in End(M_A)$.

При выполнении этих условий модули M_A и N_B – рефлексивны и существует антиполулинейный σ^{-1}-изоморфизм модулей ${}_BN^*$ и M_A.

Теорема 6.4.4. *Следующие условия равносильны:*

1) если $v \in R$ и $gr.r(v) = 1$, то $v^\alpha N_B$ – gr-прообразующий;

2) если $v \in R$, $w \in S$ и $gr.r(v) = gr.r(w) = 1$, то $v^\alpha N_B$ и $w^{\alpha^{-1}} M_A$ – gr-образующие;

3) $\phi : R \to END({}_AM^*)$ является изоморфизмом и существует градуированная эквивалентность категорий $H : gr.mod{-}A^{op} \to gr.mod{-}B$, такая что $H((M^*)^{op}) = N$ и $H(r)n = r^\alpha n$ для всех $n \in N$, $r \in R^{op}$.

При выполнении этих условий модули M_A и N_B – рефлексивны.

§ 6.5 посвящен хорошим градуировкам на кольцах матриц над градуированными кольцами.

Будем говорить, что кольцо матриц $R = M_n(A)$ снабжено хорошей градуировкой, если $R = M_n(A)(\bar{g})$ для некоторого $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$; в этом случае R изоморфно кольцу $\mathrm{END}_A(F)$ для некоторого конечно порожденного gr-свободного G-градуированного левого (или правого) A-модуля F.

Так как gr-свободный A-модуль является проективным, то из § 6.3 следует, что любой изоморфизм матричных колец, снабженных хорошими градуировками, индуцируется либо градуированной эквивалентностью Мориты, либо некоторым полулинейным σ-изоморфизмом.

Результаты § 2.2 позволяют классифицировать хорошие градуировки на кольце матриц над телом.

Теорема 6.5.1. *Пусть D – тело, $M_n(D)(g_1, \ldots, g_n)$ и $M_n(D)(h_1, \ldots, h_n)$ – две хорошие G-градуировки на матричной алгебре $M_n(D)$. Тогда градуированные алгебры $M_n(D)(g_1, \ldots, g_n)$ и $M_n(D)(h_1, \ldots, h_n)$ изоморфны в том и только том случае, если существуют $g \in G$ и перестановка $\sigma \in S_n$, такие, что $h_i = g_{\sigma(i)} g$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Следующую теорему можно считать градуированным аналогом теоремы Веддербёрна.

Теорема 6.5.2. *Пусть $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ – gr-простое gr-артиново кольцо. Тогда кольцо A изоморфно кольцу матриц с хорошей градуировкой над некоторым градуированным телом D. При этом если $A \cong M_n(D)(\bar{g}) \cong M_m(E)(\bar{h})$, то $n = m$ и существуют элемент $\sigma \in G$ и σ-изоморфизм колец $\varphi : D \to E$, для которого $\varphi(D_g) = E_{\sigma^{-1} g \sigma}$.*

В качестве следствия получим следующую теорему

Теорема 6.5.3. *Пусть $M_n(k)$ – кольцо матриц полем k, градуированное группой G, тогда существуют натуральное число m, являющееся делителем числа n, градуированное тело D и $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m) \in G^m$, такие* *что* $M_n(k) \cong M_m(D)(\bar{g})$.

Работа выполнена при поддержки Российского Фонда Фундаментальных исследований (гранты №№ 02-01-00584а, 05-01-00672а, 08-01-00790а, 11-01-00571а)

Автор выражает глубокую благодарность своему Учителю – профессору Александру Васильевичу Михалёву за постоянное внимание к работе, а также неоценимую человеческую поддержку. Автор выражает глубокую благодарность заведующему кафедрой профессору Виктору Николаевичу Латышеву, профессорам Вячеславу Александровичу Артамонову, Михаилу Владимировичу Зайцеву, Альфреду Львовичу Шмелькину и всему коллективу кафедры Высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за помощь, доброжелательное отношение и поддержку. Автор также благодарен заведующему кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета имени Л.Н. Толстого профессору Николаю Михайловичу Добровольскому за поддержку. Автор признателен профессору Сергеею Алексеевичу Пихтилькову за полезные обсуждения.

Список работ автора по теме диссертации:

Публикации в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК

[1] Балаба И.Н. Эквивалентности Мориты категорий градуированных модулей // Успехи матем. наук. – 1987. – Т. 42, вып. 3(255).– С. 177–178.

[2] Балаба И.Н. О слабо примитивных градуированных кольцах // Успехи матем. наук. – 2001. – Т. 56, вып. 6.– С. 139–140.

[3] Балаба И.Н. Градуированные регулярные кольца // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2002.– Т. 8, вып.1.– С. 5–9.

[4] Балаба И.Н. Градуированные первичные PI-алгебры //Фундаментальная и прикладная математика. – 2003. – Т.9, вып.1.– С. 19-26. (Balaba I. N. Graded prime PI-algebras// Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V. 128, no. 6. – P.3345–3349).

[5] Балаба И.Н., Зеленов С.В., Лимаренко С.В, Михалёв А.В. Теоремы плотности для градуированных колец // Фундаментальная и прикладная

математика. – 2003. – Т.9, вып.1. – С. 27–50 (Balaba I. N., Limarenko S. V., Mikhalev A. V., Zelenov S. V. Density theorems for graded rings // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V. 128, no. 6. – P. 3350–3364). MR2072616

Диссертанту принадлежит раздел, описывающий свойства градуированных слабо примитивных колец; автор также принимал активное участие в разработке общей части статьи.

[6] Балаба И.Н., Пихтильков С.А. Первичный радикал специальных супералгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. – 2003. – Т.9, вып.1. – С. 51–60 (Balaba I. N., Pikhtilkov S. A. Prime radicals of special Lie superalgebras // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V. 128, no. 6. – P. 3365–3371). MR2072617

С.А.Пихтильков предложил методику исследования первичного радикала в супералгебрах Ли. В данной работе автор диссертации доказал локальную разрешимость первичного радикала обобщенно специальной супералгебры Ли, применяя технику градуированных радикалов.

[7] Михалёв А.В., Балаба И.Н., Пихтильков С.А. Первичный радикал градуированных Ω-групп // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006.– Т. 12, вып. 2. – С. 159–174 (Mikhalev A. V., Balaba I. N., Pikhtilkov S. A. Prime radicals of graded Ω-groups // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – V. 149, no. 2. – P. 1146–1156). MR2249699

А.В.Михалёву принадлежит постановка задачи и общий план работы, С.А.Пихтилькову принадлежит идея рассмотрения слабо разрешимого радикала. В этой работе автором диссертации было введено понятие градуированного первичного радикала; доказана его разрешимость для групп с условием максимальности и совпадение с нижним слабо разрешимым радикалом для групп с условием конечности.

[8] Балаба И.Н. Индуцируемость антиизоморфизмов колец эндоморфизмов градуированных модулей антиполулинейным преобразованием // Успехи математических наук. – 2008. – Т. 63, вып. 3. – С. 151–152.

[9] Балаба И.Н., Михалёв А.В. Изоморфизмы и антиизоморфизмы колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 425, № 5. – С. 1-4.

А.В.Михалёву принадлежит постановка задачи и общий план работы. Автору диссертации принадлежат доказательства основных результатов, касающихся описания изоморфизмов и антиизоморфизмов градуиро-

ванных колец эндоморфизмов.

Прочие публикации

[10] Балаба И.Н. Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов прообразующих // Фундаментальная и прикладная математика.– 2007.– Т. 13, вып. 1.– С. 3–10 (Balaba I. N. Isomorphisms of graded endomorphism rings of progenerators // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – V. 152, no. 4. – P. 451-455). MR2322956

[11]Балаба И.Н., Михалёв А.В. Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13, вып.5. – С. 3–18 (Balaba I. N. Mikhalev A. V. Isomorphisms of graded endomorphism rings of graded modules close to free ones // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – V. 156, no. 2. – P. 209–218). MR2379739

Постановка задачи и общий план работы принадлежит А.В.Михалёву, доказательства основных результатов, использующие специфику градуированного случая, принадлежат автору диссертации.

[12] Балаба И.Н. Первичные градуированные модули // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008.– Т. 14, вып. 4. – С. 65–74 (Balaba I. N. Prime graded modules// Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – V.163, no. 5. – P. 487–492). MR2482033

[13] Балаба И.Н., Михалёв А.В. Антиизоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – Т. 14, вып. 7. – С. 23 – 36 (Balaba I. N. Mikhalev A. V. Anti-isomorphisms of graded endomorphism rings of graded modules close to free ones// Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – V. 164, no. 2. – P. 168–177). MR2533594

Постановка задачи и общий план работы принадлежит А.В.Михалёву, доказательства основных результатов, использующие специфику градуированного случая, принадлежат автору диссертации.

[14] Балаба И. Н., Канунников А.Л., Михалёв А.В. Кольца частных градуированных ассоциативных колец // Фундамент. и прикл. матем. – 2011–2012. – Т. 17, № 2. – С. 3 – 74.

Диссертанту принадлежит раздел 7, касающийся мартиндейловских градуированных колец частных; автор также принимал активное участие в разработке общей части статьи.

[15] Балаба И.Н. Градуированное максимальное кольцо частных. // Известия ТГУ, матем., механ., информат. – 1997 – Т.3, вып.1. – С. 5–7.

[16] Balaba I.N. Special radicals of graded rings. // Bull. Academie de stinte a Republici Moldova. Matematica. – 2004. – V. 44, no. 1. – P. 26–33. MR2097593

[17] Балаба И.Н. Радикалы в категории градуированных по полугруппе колец // Чебышевский сборник. – 2004. – Т. 5, вып. 4 (12).– С. 58–64.

[18] Балаба И. Н.Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств // Чебышевский сборник. – 2005. – Т. 6, вып. 4(16).– С. 6–23.

[19] Балаба И. Н., Ефремов В.А. Градуированные кольца частных полупервичных градуированных колец // Чебышевский сборник. – 2010. – Т. 11, вып. 1(33) – С. 20-30.

Диссертанту принадлежат формулировка основных результатов и доказательства теорем 1-3.

[20] Балаба И. Н. Градуированные регулярные кольца и модули // Чебышевский сборник. – 2010. – Т 11, вып. 3 (35) – С. 22–31.

[21] Балаба И.Н. Кольца частных полупервичных градуированных колец// Труды международного семинара „Универсальная алгебра и ее приложения“– Волгоград, 2000. – С.21–28.

[22] Балаба И.Н. Теоремы плотности градуированных колец // Сб. трудов ППС ТГПУ (Толстовские чтения), ч.2. – Тула, 1996. – С. 23.

[23] Балаба И. Н. Хорошие градуировки на кольцах матриц // Материалы VII международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“, посвященная памяти профессора А.А.Карацубы. – Тула: Изд-во Тул.гос.пед.ун-та им. Л.Н.Толстого, 2010. – С. 35–36.

Тезисы:

[24] Балаба И.Н. Эквивалентности в категории градуированных модулей// Сб. тезисов Международной конф.по алгебре. – Красноярск, 1993. – С. 12.

[25] Балаба И.Н. Градуированные слабо примитивные кольца // Сб. тезисов III Междунар. конфер.„Современные проблемы теории чисел и ее приложения“– Тула, 1996. – С. 12.

[26] Balaba I.N. Graded maximal right ring of quotient // Тезисы докладов Международ. алгебр. конф. памяти А.Г. Куроша. – М.: МГУ, 1998. – С. 33.

[27] Балаба И.Н. Кольца частных полупервичных градуированных ко-

лец // Сб. тезисов междунар. конфер. „Универсальная алгебра и ее приложения“. – Волгоград, 1999. – С. 16.

[28] Балаба И.Н. Градуированные регулярные модули // Сб. тезисов международного алгебраического семинара, посвященного 70-летию научно-исследовательского семинара МГУ по алгебре. – М., 2000. – С. 5-6.

[29] Балаба И.Н. Регулярные кольца, градуированные полугруппой // Тезисы докладов IV Международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“. – Тула, 2001. – С. 16–17.

[30] Балаба И.Н. Градуированный вариант теоремы Познера // Тезисы докладов международной алгебраической конференции, посвященной памяти З.И.Боревича - СПб: ПОМИ им.Стеклова, 2002. – С. 15–16.

[31] Балаба И.Н. Регулярные строго градуированные кольца // Тезисы докладов V Международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“– Тула: ТГПУ, 2003 – С. 21–22.

[32] Balaba I.N. Graded radicals of graded rings. // International conference on radicals (ICOR-2003) dedicated to the memory of prof. V.Andrunakievich (program and abstacts) - Chishinev, 2003. – P.14–16.

[33] Балаба И.Н. О градуированном радикале Джекобсона // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию МГУ и 75-летию кафедры высшей алгебры. – М., 2004. – С. 9–10.

[34] Балаба И.Н. Градуированные кольца линейных преобразований // Международная научная конференция „Современные проблемы математики, механики, информатики“, Тула, 2007. – С. 8–10.

[35] Балаба И.Н. Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов // Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященная 80-летию В.Е. Воскресенского: тезисы докладов. – Самара: Изд-во „Универс групп“, 2007. – С. 7–8.

[36] Балаба И.Н. Об индуцируемости антиизоморфизма колец градуированных эндоморфизмов антиполулинейным изоморфизмом // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша. Тезисы докладов. - М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2008. – С. 31–32

[37] И. Н. Балаба, А. В. Михалёв. Изоморфизмы и антиизоморфизмы колец эндоморфизмов градуированных модулей // Материалы VII международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы

и приложения“, посвященная памяти профессора А.А.Карацубы. - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н.Толстого, 2010. – С. 36-38.

[38] Балаба И.Н. Градуированная проективная алгебра //Тезисы докладов VIII международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“, посвященной 190-летию П.Л.Чебышева и 120-летию И.М.Виноградова. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. – С. 7–8.

[39] Балаба И.Н. Градуированные простые артиновы кольца // Материалы международной конференции „Алгебра и математическая логика“, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В.В.Морозова. – Казань: КФУ, 2011. – С. 43–44.