МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.982.256, 517.538.5

Бородин Петр Анатольевич

ИЗБРАННЫЕ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2012

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Иванов Валерий Иванович (декан механико-математического ф-та Тульского государственного ун-та)
	доктор физико-математических наук, профессор Семенов Евгений Михайлович (зав. каф. теории функций и геометрии Воронежского государственного ун-та)
	доктор физико-математических наук, профессор Царьков Игорь Германович (профессор каф. математического анализа МГУ имени М.В. Ломоносова)
Ведущая организация:	Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Защита диссертации состоится 26 октября 2012 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8-й этаж).

Автореферат разослан 11 сентября 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационого совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физ.-матем. наук,
профессор В.Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена избранным вопросам теории приближений в линейных нормированных пространствах (геометрической теории приближений).

Актуальность темы. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, M — непустое подмножество X, $\rho(x, M) := \inf\{\|x-y\| : y \in M\}$ — расстояние от элемента $x \in X$ до M, $P_M(x) = \{y \in M : \|x-y\| = \rho(x, M)\}$ — метрическая проекция элемента x на множество M, то есть множество элементов наилучшего приближения для x в M. Основные аппроксимативные свойства множества M определяются свойствами оператора метрического проектирования $P_M : x \to P_M(x)$ — вообще говоря, неоднозначного и определенного не на всем X. Так, M называется *множеством существования*, если оператор P_M определен на всем пространстве X, и *множеством единственности*, если P_M однозначен на своей области определения. Если M является одновременно множеством существования и множеством единственности, то есть для любого $x \in X$ в M существует ровно один элемент наилучшего приближения $P_M(x)$, то M называется *чебышевским* множеством.

Теория приближений в нормированных пространствах берет свое начало в классической работе П.Л. Чебышева (1859), в которой, в частности, доказана чебышевость множества $\mathcal{P}_n$ алгебраических многочленов степени не выше n и множества $\mathcal{R}_{mn}$ рациональных функций со степенью числителя не выше m и степенью знаменателя не выше n в пространстве $C[a, b]$ действительнозначных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. В этой же работе П.Л. Чебышев по существу описал оператор метрического проектирования на множества $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{R}_{mn}$ (теорема об альтернансе). В дальнейшем геометрические вопросы теории приближений в пространстве C изучались А. Хааром (1918), С.Н. Бернштейном (1938), А.Н. Колмогоровым (1948), Е.Я. Ремезом (1953). Окончательное становление геометрической теории приближений как самостоятельной ветви теории приближений произошло в конце 1950-х и в 1960-е годы благодаря работам, в первую очередь, В. Кли, Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина, а затем В.И. Бердышева, Л.П. Власова, А.Л. Гаркави, Е.В. Ошмана, С.Я. Хавинсона, Е. Асплунда, А. Брауна, А. Брёндстеда, Д. Вульберта, Ф. Дойча, И. Зингера, Б. Крипке, Й. Линденштраусса, П. Морриса, Т. Ривлина, У. Рудина, Р. Фелпса, Р. Холмса, Э. Чини, М. Эдельштейна и др. В дальнейшем исследования по геометрической теории приближений в нашей стране проводились в основном представителями научной школы С.Б. Стечкина: А.Р. Алимовым, П.В. Альбрехтом, В.И. Андреевым, В.С. Балаганским, А.А. Васильевой, В.И. Ивановым, М.И. Карловым, С.В. Конягиным, В.А. Кощеевым, Е.Д. Лившицем, А.В. Мариновым, К.С. Рютиным, Г.Ф. Устиновым, И.Г. Царьковым и др., а также М.В. Балашовым, С.И. Дудовым, Г.Е. Ивановым, В.П. Фонфом и многими другими математиками.

В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными свойствами множеств (чебышевость, единственность, существование, аппроксимативная компактность, солнечность, антипроксиминальность и т.д.) с их тополого–геометрическими свойствами (линейность, выпуклость, разного рода связность, гладкость и т.д.) при различных условиях (строгая выпуклость, равномерная выпуклость, гладкость и т.д.) на нормированное пространство.

При всем многообразии исследований по геометрической теории приближений, эта теория содержит большое число давно поставленных проблем, не поддающихся решению. Наиболее острой из них признается проблема выпуклости чебышевских множеств (Н.В. Ефимов, С.Б. Стечкин, В. Кли): *всякое ли чебышевское множество в гильбертовом пространстве выпукло*? В конечномерном евклидовом пространстве выпуклость всякого чебышевского множества была доказана Л. Бунтом еще в 1934 г. Ни в одном бесконечномерном банаховом пространстве чебышевские множества не охарактеризованы в геометрических терминах. С проблемой выпуклости тесно связана также проблема характеризации банаховых пространств, в которых каждое чебышевское множество выпукло (эта проблема до конца не решена и в конечномерном случае).

В связи с проблемой выпуклости чебышевских множеств была доказана

Теорема A (Н.В. Ефимов и С.Б. Стечкин[1] , 1961). *Чебышевское множество в гладком равномерно выпуклом банаховом пространстве (в частности, в гильбертовом пространстве) выпукло тогда и только тогда, когда оно аппроксимативно компактно.*

Теорема A позволяет переформулировать проблему выпуклости следующим образом: существует ли в гильбертовом пространстве не аппроксимативно компактное чебышевское множество? В I главе диссертации для целого класса банаховых пространств, в частности, для сепарабельного гильбертова пространства дается утвердитель-

[1] Н.В. Ефимов, С.Б. Стечкин, "Аппроксимативная компактность и чебышевские множества", *Докл. АН СССР*, 1961, **140**:3, 522–524.

ный ответ на менее категоричный вопрос: существует ли такое не аппроксимативно компактное множество M, что метрическая проекция $P_M(x)$ непуста и конечна для любого $x \in X$?

В то же время введенное в связи с теоремой А понятие аппроксимативной компактности оказалось основополагающим в геометрической теории приближений и ее приложениях. Аппроксимативно компактные множества стали исследоваться сами по себе.

В любом банаховом пространстве X всякое ограниченно компактное множество (то есть множество, пересечение которого с любым замкнутым шаром компактно) является аппроксимативно компактным. В частности, в любом X все конечномерные подпространства являются аппроксимативно компактными. В достаточно "хороших" пространствах X аппроксимативно компактными являются все замкнутые подпространства. Такие пространства названы пространствами Ефимова–Стечкина.

Именно, банахово пространство X называется *пространством Ефимова–Стечкина* (И. Зингер), если любое секвенциально слабо замкнутое множество $M \subset X$ аппроксимативно компактно в X.

Теорема B (И. Зингер[2] , 1964). *Следующие условия эквивалентны:*
(1) X — пространство Ефимова–Стечкина;
(2) каждое замкнутое подпространство в X аппроксимативно компактно;
(3) каждое выпуклое замкнутое множество в X аппроксимативно компактно;
(4) X рефлексивно и удовлетворяет следующему условию: если последовательность его элементов $\{x_n\}$ слабо сходится к элементу x и $\|x_n\| \to \|x\|$, то найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\|x_{n_k} - x\| \to 0$.

Примерами пространств Ефимова–Стечкина служат пространства L_p, $1 < p < \infty$. В силу теоремы B задача описания аппроксимативно компактных подпространств содержательна (и до сих пор не решена) для пространств, не являющихся пространствами Ефимова–Стечкина, в первую очередь для пространств L_1, L_∞ и пространства $C(K)$ функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K. Во II главе настоящей работы получено полное описание аппроксимативно компактных подпространств в пространствах типа $\mathbf{c}$ (то есть в пространствах $C(K)$ для компактов K с конечным числом предельных точек).

[2] I. Singer, "Some remarks on approximative compactness", *Rev. roum. math. pures et appl.*, **9**:2 (1964), 167–177.

Для банаховых пространств, не являющихся пространствами Ефимова–Стечкина, актуальны две другие задачи: во всяком ли таком пространстве существует аппроксимативно компактное, но не ограниченно компактное множество?; во всяком ли таком пространстве существует ограниченное выпуклое аппроксимативно компактное тело? Глава I диссертации содержит положительное решение этих задач соответственно для любого слабо компактно порожденного банахова пространства (WCG–пространства) и для любого рефлексивного пространства или несепарабельного WCG–пространства. Попутно в произвольном WCG–пространстве строится пример нетривиального чебышевского множества (вопрос о существовании неодноточечного собственного чебышевского подмножества в произвольном банаховом пространстве возник в школе С.Б. Стечкина и до сих пор не решен).

Вернемся к проблеме выпуклости.

К настоящему времени получены десятки результатов, в которых выпуклость чебышевского множества M доказана в различных классах банаховых пространств при различных условиях на структуру M или на оператор метрического проектирования P_M. Наибольший вклад в развитие этого направления геометрической теории приближений был внесен Л.П. Власовым. Вот одна из его многочисленных теорем.

Теорема C. (Л.П. Власов[3] , 1967) *Пусть X — локально равномерно выпуклое гладкое банахово пространство. Если множество $M \subset X$ чебышевское и для любого $x \notin M$ с $P_M(x) = \{y\}$ справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda \to 0+} P_M(x + \lambda(x - y)) = y,$$

то M выпукло.

Теорема C продолжает наметившуюся в теореме A "линию" условий выпуклости чебышевского множества M, формулируемых в терминах того или иного вида непрерывности оператора метрического проектирования P_M (так, в теореме C фигурирует так называемая "радиальная непрерывность" оператора P_M). В дальнейшем такого рода условия стали формулироваться в терминах множества точек разрыва оператора P_M. Наиболее слабые из этих условий получены В.С. Балаганским (1996), а также С.В. Конягиным (1996)[4] .

[3] Л.П. Власов, "О чебышевских и аппроксимативно выпуклых множествах", *Матем. заметки*, **2**:2 (1967), 191–200.

[4] В.С. Балаганский, Л.П. Власов, "Проблема выпуклости чебышевских множеств", *Успехи матем. наук*, **51**:6 (1996), 125–188.

В III главе диссертации проблема выпуклости чебышевского множества получает положительное решение при дополнительном аппроксимативном условии иного типа, а именно, при условии N-чебышевости этого множества с $N \geqslant 2$. Приведем необходимые определения.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — действительное банахово пространство. Для элементов $x_1, \dots, x_N \in X$ и множества $M \subset X$ положим
$\rho(x_1, \dots, x_N; M) = \inf\{\sum_{k=1}^N \|x_k - y\| : y \in M\}$;
$P_M(x_1, \dots, x_N) = \{y \in M : \sum_{k=1}^N \|x_k - y\| = \rho(x_1, \dots, x_N; M)\}$
— метрическая N-проекция точек $x_1, \dots, x_N$ на множество M.

Отметим, что сама по себе постановка задачи о минимизации суммы расстояний от заданных элементов $x_1, \dots, x_N$ до элемента заданного множества M в банаховом пространстве далеко не нова: еще в 1965 г. Г.Ш. Рубинштейн рассматривал даже более общие суммы (с положительными весами при нормах) и получал характеристики элементов выпуклого множества M, минимизирующих такие суммы.

Множество M назовем *N-чебышевским*, если для любых
$x_1, \dots, x_N \in X$ выполнено одно из следующих двух условий:
(1) $\rho(x_1, \dots, x_N; M) > \rho(x_1, \dots, x_N; X)$ и $P_M(x_1, \dots, x_N)$ одноточечна;
(2) $\rho(x_1, \dots, x_N; M) = \rho(x_1, \dots, x_N; X)$ и $P_M(x_1, \dots, x_N) \neq \emptyset$.

В случае $N = 1$ это определение дает обычные чебышевские множества. Всякое N-чебышевское множество является чебышевским.

Основной результат III главы состоит в доказательстве выпуклости N-чебышевского множества: при четном N — в любом равномерно выпуклом банаховом пространстве, при нечетном $N \geqslant 3$ — в любом равномерно выпуклом гладком банаховом пространстве. Доказать последнее утверждение при $N = 1$ означало бы решить проблему выпуклости. Однако до сих пор вероятная выпуклость чебышевского множества M в равномерно выпуклом гладком банаховом пространстве доказывалась лишь при дополнительным условиях (см. выше).

При доказательстве результатов III главы существенно используется теорема C, а также другая теорема Л.П. Власова о связности чебышевских множеств.

Теорема D. (Л.П. Власов[5] , 1968) *В равномерно выпуклом банаховом пространстве X всякое P–связное (в частности, чебышевское) множество V–связно.*

Здесь P–связность множества M означает непустоту и связность метрической проекции $P_M(x)$ для любого $x \in X$, а V–связность мно-

[5] Л.П. Власов, "Чебышевские множества и некоторые их обобщения", *Матем. заметки*, **3**:1 (1968), 59–69.

жества M означает, что пересечение M с любым замкнутым шаром пространства X или пусто, или связно.

Теорема D в III главе по необходимости переносится на случай несимметрично нормированных пространств, что само по себе является проявлением общей тенденции: последние двадцать лет теория приближений в несимметричной норме активно развивается, и это развитие стимулировало перенесение основных результатов теории банаховых пространств на случай несимметричной нормы.

Метрическая N-проекция естественно связана с точками Штейнера.

Точкой Штейнера элементов $x_1, \ldots, x_N$ банахова пространства X называется такой элемент $s = s(x_1, \ldots, x_N) \in X$, что $\sum_{k=1}^N \|x_k - s\| = \inf_{x \in X} \sum_{k=1}^N \|x_k - x\|$. Нетрудно видеть, что точки Штейнера составляют метрическую N-проекцию $P_X(x_1, \ldots, x_N)$.

Например, в случае гильбертова пространства $X = H$ и $N = 3$ точка Штейнера $s(x_1, x_2, x_3)$ существует и единственна: она лежит в аффинной плоскости точек x_1, x_2, x_3 и либо совпадает с одной из них (если в треугольнике $x_1 x_2 x_3$ есть угол, не меньший 120°), либо совпадает с точкой Торичелли (из которой все стороны треугольника видны под углом 120°).

Нетрудно показать, что в рефлексивном пространстве X точка Штейнера существует для любого набора точек $x_1, \ldots, x_N$.

Первый пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве построил Л. Веселы (1993). При этом он доказал, что всякое нерефлексивное банахово пространство можно так эквивалентно перенормировать, что в новой норме для некоторых трех точек x_1, x_2, x_3 точка Штейнера $s(x_1, x_2, x_3)$ не существует.

В заключительном параграфе I главы диссертации для каждого $N = 3, 4, 5, \ldots$ построен пример такого банахова пространства X и таких элементов $x_1, \ldots, x_N$ в этом пространстве, что точка Штейнера $s(x_1, \ldots, x_N)$ не существует. Этот пример отличен от примеров Л. Веселы и других авторов и обладает дополнительным свойством "устойчивости". Идейно результаты о точках Штейнера примыкают, конечно, к III главе, и порождают целый ряд вопросов о кратчайших сетях в банаховых пространствах (несуществование точки Штейнера для заданных трех точек означает и несуществование кратчайшей сети, то есть связного графа минимальной длины, затягивающего эти три точки).

Вообще отметим, что круг задач, возникающих в связи с результатами III главы, не ограничивается "геометрическими" рамками: ведь эти, условно говоря, N–приближения (когда в заданном множестве ищется элемент с наименьшей суммой расстояний до заданных N

элементов), допускают все основные постановки задач теории приближений — получение прямых и обратных теорем, сходимость различных методов приближения, оценки поперечников и т.д. При этом вместо суммы расстояний до заданных N элементов можно брать их максимум или другую подходящую функцию от этих расстояний.

II глава диссертации, а также часть III главы связаны с другим классическим направлением геометрической теории приближений — теорией чебышевских подпространств.

Хорошо известно, что одновременная рефлексивность и строгая выпуклость банахова пространства необходимы и достаточны для того, чтобы все его линейные подпространства были чебышевскими (например, такими являются пространства L_p, $1 < p < \infty$). Поэтому особый интерес представляет задача описания чебышевских подпространств в нерефлексивных пространствах (прежде всего в пространствах L_1 и C). В пространстве C конечномерные чебышевские подпространства описаны А. Хааром (1918) и Дж. Мэйрхьюбером (1956), а чебышевские подпространства конечной коразмерности — А.Л. Гаркави (1967). Соответствующие результаты для пространства L_1 получены Р. Фелпсом (1966) и А.Л. Гаркави (1970). Однако даже в самых простых нерефлексивных банаховых пространствах о чебышевских подпространствах с бесконечными размерностью и коразмерностью известно очень мало (неизвестно, существуют ли такие подпространства в пространствах $C[0,1]$ и $\mathbf{c}$).

Оператор метрического проектирования P_Y бывает разрывным, бывает непрерывным, но не липшицевым (например, для подпространства $Y = \mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше $n \geqslant 2$ в $C[0,1]$), и уж совсем редко бывает линейным, как показывает следующая

Теорема E (Рудин–Смит[6] , 1961; И. Зингер[7] , 1970). *Пусть X — действительное банахово пространство размерности $\dim X \geqslant 3$, и натуральные числа n, k удовлетворяют условиям $1 \leqslant n < \dim X - 1$, $2 \leqslant k < \dim X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) X — гильбертово пространство;

(2) всякое подпространство $Y \subset X$ размерности n обладает однозначной и линейной метрической проекцией;

(3) всякое подпространство $Y \subset X$ коразмерности k обладает однозначной и линейной метрической проекцией.

Во II главе диссертации получены полные описания чебышевских

---

[6] W. Rudin, K.T. Smith, "Linearity of best approximation: a characterization of ellipsoids", *Indagationes Mathematicae*, **23**:1 (1961), 97–103.

[7] I. Singer, *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

подпространств с линейным оператором метрического проектирования в пространствах C, L_1 и в пространстве H^1 Харди. Исследуется также липшицевость оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства указанных пространств, а также общих банаховых пространств.

В III главе получены также описания конечномерных 2-чебышевских подпространств в пространствах L_1 и C. Эти результаты аналогичны упоминавшимся выше теоремам Хаара и Фелпса. В целом можно сказать, что 2-чебышевских подпространств в этих пространствах существенно меньше, чем чебышевских. Кроме того, исследуется свойство зеркальности метрической 2-проекции на подпространство (как для обычной метрической проекции на подпространство "наилучшим" свойством является линейность, так для метрической 2-проекции таковым свойством является ее зеркальность). В частности, получен аналог теоремы E: гильбертовы пространства охарактеризованы в терминах зеркальности метрической 2-проекции на их подпространства.

IV глава диссертации посвящена новому разделу геометрической теории приближений — задаче о плотности полугруппы, порожденной заданным множеством M, в банаховом пространстве. В общем виде эта задача ставится так.

Пусть M — некоторое заданное подмножество банахова пространства X. Верно ли, что множество

$$R(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{M + \cdots + M}_{n}$$

всюду плотно в X, то есть любой элемент из X сколь угодно точно приближается конечными суммами элементов из M?

Полученные в IV главе результаты, относящиеся к этой задаче, четко делятся на две части: (1) нахождение условий на M и X, достаточных для того, чтобы $\overline{R(M)}$ было аддитивной подгруппой в X; (2) нахождение условий на M и X, достаточных для того, чтобы замкнутая аддитивная подгруппа, порождаемая множеством M, совпадала с X. Интересно, что в результатах первой части существенную роль играет выпуклость сферы $S(X)$, а в результатах второй части — гладкость этой сферы.

Источником и модельным примером для задачи о плотности полугруппы послужила теория приближений наипростейшими дробями.

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция вида

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k} = \frac{P'(z)}{P(z)},$$

где $\{a_k\}_{k=1}^n$ — точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $P(z) = c(z-a_1)\cdot \dots \cdot (z-a_n)$, $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, — любой многочлен с нулями в этих точках.

Если E — множество на комплексной плоскости, $M_E = \left\{\frac{1}{z-a} : a \in E\right\}$, X — некоторое банахово пространство функций, определенных на каком-либо множестве комплексной плоскости, не пересекающемся с E, то задача о том, приближается ли всякая функция $f \in X$ наипростейшими дробями с полюсами из E, эквивалентна задаче о плотности множества $R(M_E)$ в X.

Исследования по приближению наипростейшими дробями в различных функциональных пространствах были начаты в нашей стране в конце 1990-х по инициативе Е.П. Долженко. К настоящему времени в этой тематике получено немало результатов (В.И. Данченко, Д.Я. Данченко, И.Р. Каюмов, Е.Н. Кондакова, О.Н. Косухин, Я.В. Новак, В.Ю. Протасов, П.В. Чунаев).

Но началось все со следующей экстремальной задачи, поставленной Е.А. Гориным в 1960-е годы. Пусть наипростейшая дробь $r_n(z)$ по модулю не превосходит 1 в каждой точке действительной оси $\mathbb{R}$. Как близко могут подходить к оси $\mathbb{R}$ полюсы a_k этой дроби? Другими словами, стремятся ли к нулю величины

$$d(n) = \inf\left\{\min|\operatorname{Im} a_k| : \left\|\sum_{k=1}^n \frac{1}{z-a_k}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1\right\},$$

и если стремятся, то с какой скоростью?

В.И. Данченко полностью решил эту задачу.

Теорема F (В.И. Данченко[8] , 1994)

$$d(n) \asymp \frac{\ln\ln n}{\ln n} \qquad (n\to\infty)$$

(знак $\asymp$ слабой эквивалентности означает, что отношение левой и правой частей ограничено сверху и снизу положительными постоянными).

Кроме того, В.И. Данченко исследовал аналогичную задачу для наипростейших дробей, ограниченных единицей по норме $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Приведем точную формулировку полученного им результата.

Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $H_p(\mathbb{C}^+)$ — пространство Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, то есть пространство голоморфных в $\mathbb{C}^+$

[8]В.И. Данченко, "Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных до прямых и окружностей", *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 63–80.

функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{C}^+)} = \sup_{a>0}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x+ia)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Каждая функция $f \in H_p(\mathbb{C}^+)$ имеет конечные угловые пределы $f(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$, образующие функцию $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$. Пространство $H_p(\mathbb{C}^+)$ содержит все наипростейшие дроби с полюсами в нижней полуплоскости.

Положим

$$d(n,p) =$$

$$\inf\left\{\min_k \operatorname{Im} a_k : \left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-a_k} + f(z)\right\|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant 1, \operatorname{Im} a_k > 0, f \in H_p(\mathbb{C}^+)\right\}.$$

Теорема G (В.И. Данченко, 1994). *Для любых $p \in (1;\infty)$ и $n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства*

$$d(n,p) \geqslant \frac{2^q\left(\sin\frac{\pi}{p}\right)^q}{B(\frac{q-1}{2},\frac{1}{2})},$$

где $B(\alpha,\beta)$ — бета-функция Эйлера, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$.

Примечательно, что правая часть здесь не зависит от n, так что полюсы наипростейших дробей $r_n(z)$ независимо от их количества не могут сколь угодно близко подходить к действительной оси при условии $\|r_n\|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant 1$. Другими словами, слагаемые $\frac{1}{z-a_k}$ наипростейшей дроби в случае $1 < p < \infty$ (в отличие от случая $p = \infty$) не "интерферируют", не могут в сумме дать маленькую L_p-норму на действительной оси, не удалившись от нее достаточно далеко.

Как заметили О.Н. Косухин и автор, этот факт означает, что функция $-\frac{1}{z-i}$ не приближается в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями $r(z)$ (если бы норма разности $R(z) = -\frac{1}{z-i} - r(z)$ была меньше ε, то наипростейшая дробь $-R(z/\varepsilon)/\varepsilon$ имела бы норму меньше $\varepsilon^{1/p}$, то есть меньше 1, и полюс в точке εi), так что наипростейшие дроби не плотны в $L_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$. В дальнейшем класс $S_p(\mathbb{R})$ функций из $L_p(\mathbb{R})$, с любой точностью приближаемых в этом пространстве наипростейшими дробями, был полностью описан В.Ю. Протасовым (2009). Именно, $S_p(\mathbb{R})$ состоит из тех функций пространства $L_p(\mathbb{R})$, которые являются логарифмическими производными целых функций порядка не выше $1/q$, где $1/p + 1/q = 1$.

В тоже время с помощью теоремы F в работе О.Н. Косухина и автора было доказано, что для любого $u > 0$ наипростейшие дроби с полюсами вне полосы $\{z : |\mathrm{Im}\, z| < u\}$ всюду плотны в пространстве $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f \in C(\mathbb{R}), f(x) \to 0\,\text{при}\ x \to \infty\}$ с равномерной нормой.

Естественным продолжением этих исследований стало изучение аппроксимативных свойств наипростейших дробей на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. В IV главе диссертации доказывается всюду плотность наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при $p \geqslant 2$, а также исследован вопрос о всюду плотности в $L_p(\mathbb{R}_+)$ наипростейших дробей с ограничениями на расположение полюсов. При доказательстве этих результатов существенно используется теорема F.

В IV главе исследуется также задача о всюду плотности наипростейших дробей с полюсами из заданного множества E в пространстве $AC(K)$ функций, непрерывных на заданном компакте K и голоморфных во внутренних точках этого компакта; компакт K не разбивает плоскость и не пересекается с E. При $E = \mathbb{C} \setminus K$ эта задача положительно решена В.И. Данченко и Д.Я. Данченко (2001). Она оказывается нетривиальной даже для случая компактного множества E (в отличие от аналогичной задачи для общих рациональных аппроксимаций). В этом случае для плотности оказывается необходимым, чтобы компакт E "окружал" почти весь компакт K. Возникает гипотеза о том, что если компакт E "окружает" компакт K со связным дополнением, то наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$. Эту гипотезу удается доказать в случае, когда E содержит конечное число замкнутых спрямляемых контуров, "окружающих" K, и этот результат вытекает из общих теорем о плотности полугруппы в банаховом пространстве, доказанных в начале главы.

Кроме того, в главе IV получены оценки расстояний до оси или полуоси от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах. В частности, уточняются оценки В.И. Данченко для величин $d(n, p)$ из теоремы G, и находится точное значение $d(n, 2) = \pi$. Эти результаты находят применения в следующей главе.

V глава диссертации посвящена так называемой обратной задаче теории приближений, или задаче о существовании элемента x с заданными уклонениями $\rho(x, M_n)$ от расширяющейся системы $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ заданных подмножеств заданного банахова пространства X. Источником для этой задачи послужила

Теорема H (С.Н. Бернштейн[9], 1938). *Для всякой числовой последовательности $d_0 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots,\ d_n \to 0$, существует функция,*

[9] С.Н. Бернштейн, "Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций", в кн.: С.Н. Бернштейн, *Собрание сочинений*, Т. 2, Изд-во АН СССР, 1954, С. 292–294.

непрерывная на заданном отрезке $[a, b]$, *наименьшие равномерные уклонения которой от многочленов степени не выше* n *равны указанным числам:* $E_n(f) = d_n$, $n = 0, 1, \ldots$.

Доказательство С.Н. Бернштейна было перенесено А.Ф. Тиманом на случай произвольной системы $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$ строго вложенных конечномерных подпространств Y_k произвольного банахова пространства X: для всякой последовательности $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots$, $d_n \to 0$, существует элемент $x \in X$ с $\rho(x, Y_n) = d_n$, $n = 1, \ldots$.

В связи с этим возникла и до сих пор не решена следующая задача.

Пусть задана система $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \ldots$ строго вложенных замкнутых линейных подпространств некоторого бесконечномерного банахова пространства $(X, \|\cdot\|)$, полная в X: $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} = X$, а также последовательность неотрицательных чисел $d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3 \geqslant \ldots$, $d_n \to 0$. Существует ли элемент $x \in X$, уклонения $\rho(x, Y_n)$ которого от подпространств Y_n равны этим числам: $\rho(x, Y_n) = d_n$, $n = 1, 2, \ldots$?

Если такой элемент существует для любых таких подпространств Y_n и чисел d_n, то говорят, что пространство X обладает (B)-свойством.

В 1963 г. В.Н. Никольский заметил, что если пространство X обладает (B)-свойством, то оно рефлексивно. В то же время И.С. Тюремских доказал, что *гильбертово* пространство обладает (B)-свойством. Кроме гильбертова пространства, до сих пор неизвестно ни одного другого примера пространства X, обладающего (B)-свойством. Шапиро (1964) показал, что в любом бесконечномерном пространстве X для любых подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$ и любых чисел $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots$, $d_n \to 0$, существует такой элемент x, что $\rho(x, Y_n) \neq O(d_n)$ $(n \to \infty)$. Этот результат был усилен И.С. Тюремских (1967), который при тех же предположениях установил существование такого элемента $x \in X$, что $\rho(x, Y_n) \geqslant d_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Из результатов Ю.А. Брудного (1991) следует, что для всякой невозрастающей выпуклой последовательности $d_n \to 0$ $(d_n \leqslant (d_{n-1} + d_{n+1})/2)$ и любой последовательности $\{Y_n\}$ строго вложенных подпространств в пространстве X существует такой элемент $x \in X$, что $\rho(x, Y_n) \geqslant d_n$ для всех n и $\rho(x, Y_n) \leqslant C d_n$ для бесконечно многих номеров n и некоторой константы C. Упомянем еще результат Альмиры и Дель Торо (2002): в условиях поставленной выше задачи для любых двух невозрастающих последовательностей $d_n \to 0$ и $\delta_n \to 0$ положительных чисел найдется такой элемент $x \in X$, что $\rho(x, Y_n)/d_n \to 0$, но $\rho(x, Y_n)/d_n \neq O(\delta_n)$ $(n \to \infty)$. Кроме того, теорема Бернштейна-Тимана (случай конечномерных подпространств Y_n) обобщалась на различные классы линейных метрических пространств.

В V главе диссертации приведены подробный обзор результатов, относящихся к задаче существования элемента с заданными уклонениями от расширяющейся системы подпространств, и положительное ее решение при дополнительных условиях на уклонения d_n или на подпространства Y_n.

В последнее время задача о существовании элемента x с заданными уклонениями $\rho(x, M_n)$ от расширяющейся системы множеств M_n решается в случае *нелинейных* множеств M_n — например, множеств $\mathcal{R}_n$ рациональных функций степени не выше n. Так, А.А. Пекарский (1994) доказал, что для любой *строго монотонной* последовательности $d_n \to 0$ существует комплекснозначная функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, наименьшие равномерные уклонения которой от комплекснозначных рациональных функций степени не выше n равны указанным числам: $\rho(f, \mathcal{R}_n) = d_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. До сих пор неизвестно, существенно ли условие строгой монотонности d_n в этом утверждении. При этом А.А. Пекарский предложил общую схему доказательства такого рода утверждений (о существовании функции с заданными уклонениями от системы нелинейных множеств).

В V главе диссертации с помощью схемы А.А. Пекарского доказывается существование функции $f \in C_0(\mathbb{R})$ с произвольно заданными строго монотонно стремящимися к нулю уклонениями $\rho(f, SF_n)$ от множеств SF_n наипростейших дробей степени не выше n, и показывается, что при нестрогой монотонности задаваемых уклонений такой функции может не быть. Кроме того, исследуются свойства уклонений $\rho(f, SF_n)$ для функций f в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Цель работы: построение нетривиальных примеров множеств с заданными аппроксимативными свойствами в классах банаховых пространств; описание чебышевских подпространств с линейным или липшицевым оператором метрического проектирования в конкретных функциональных пространствах; исследование выпуклости N-чебышевских множеств и свойств метрической N-проекции; доказательство общих результатов о плотности полугруппы, порожденной заданным множеством в банаховом пространстве, и приложение их в теории приближения наипростейшими дробями; исследование задачи существования элемента с заданными уклонениями от системы расширяющихся множеств в банаховом пространстве.

Научная новизна работы. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Построены нетривиальные примеры множеств с заданными аппроксимативными свойствами в классах банаховых пространств.

2. Описаны чебышевские подпространства с линейным операто-

ром метрического проектирования в функциональных пространствах C, L_1 и H^1.

3. Доказана выпуклость N-чебышевских множеств при $N \geqslant 2$ в произвольном гладком равномерно выпуклом банаховом пространстве.

4. Исследована плотность множества наипростейших дробей (в том числе и с ограничением на полюсы) в различных пространствах функций, определенных на различных подмножествах комплексной плоскости.

5. В нескольких новых частных случаях положительно решена задача существования элемента с заданными уклонениями от системы расширяющихся множеств в банаховом пространстве.

Методы исследования. В работе используются различные методы теории функций действительного и комплексного переменного, функционального анализа, геометрии и топологии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функций, функциональном анализе и геометрии.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН П.Л. Ульянова (1928–2006) и чл.-корр. РАН Б.С. Кашина, а затем под руководством академика РАН Б.С. Кашина, проф. Б.И. Голубова, проф. М.И. Дьяченко и чл.-корр. РАН С.В. Конягина, на научном семинаре кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета) под руководством проф. Е.С. Половинкина; на семинаре по теории приближений и граничным свойствам функций под руководством проф. Е.П. Долженко, на семинаре по теории приближений под руководством проф. И.Г. Царькова, на семинаре по теории рациональных аппроксимаций под руководством проф. А.И. Аптекарева, проф. В.Н. Сорокина и доц. В.С. Буярова, на семинаре по минимальным сетям под руководством проф. А.О. Иванова и проф. А.А. Тужилина, на школах С.Б. Стечкина по теории функций (1998–2002, 2007, 2011), на Саратовских (1994, 1998, 2002, 2004, 2006, 2010), Воронежских (2003, 2005, 2007) и Казанских (2009 и 2011) школах–конференциях по теории функций, на международной конференции по функциональному анализу, посвященной 70-летию А. Пелчинского (Познань, Польша, 2002), на международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения С.Б. Стечкина (Москва, 2010), на международной конференции по гармоническому анализу и теории приближений (Ереван, Армения, 2001), на международной конференции им. И.Г. Петровского (Москва, 2007).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 18 работах автора (все из перечня ВАК), список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 149 наименований. Общий объем диссертации — 258 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В **главе I** собраны различные примеры множеств с заданными аппроксимативными свойствами в классах банаховых пространств. Эти примеры вынесены в отдельную главу, во-первых, потому, что каждый из них представляет собой решение задачи, поставленной не автором и имеющей свою историю (описанную выше), а во-вторых, потому, что эти примеры (в том числе и своей нетривиальностью) демонстрируют все богатство проблематики геометрической теории приближений.

Теорема 1.1. *В любом WCG–пространстве X существует чебышевское множество M со следующими дополнительными свойствами: M выпукло, ограничено, аппроксимативно компактно, и $\rho(x, M) < \|x\|$ для любого ненулевого элемента $x \in X$.*

Ключевую роль в доказательстве этого результата играет теорема Дэвиса–Фигеля–Джонсона–Пелчинского (1974) о характеризации WCG–пространств.

Теорема 1.2. *В любом бесконечномерном WCG–пространстве существует ограниченное, аппроксимативно компактное, но не локально компактное множество.*

(Локальная компактность множества M означает, что для всякой его точки найдется замкнутый шар положительного радиуса с центром в этой точке, пересечение которого с M компактно.)

Теорема 1.3. *В любой банаховой решетке, порядок в которой определяется счетным симметрическим базисом с константой симметричности 1, с дополнительным условием строгой монотонности нормы относительно координат (например, в любом пространстве $\mathbf{l}_p$, $1 \leqslant p < \infty$), существует такое не аппроксимативно компактное и ограниченное множество M, что метрическая проекция $P_M(x)$ непуста и конечна для любого $x \in X$.*

Этот результат получен совместно с И.А. Пятышевым.

В 4-ом параграфе I главы для каждого $n = 3, 4, 5, \dots$ строятся новые примеры сепарабельных банаховых пространств X и таких элементов $x_1, \dots, x_n \in X$, что точка Штейнера $s(x'_1, \dots, x'_n)$ в X не существует для всех наборов $x'_1, \dots, x'_n$, достаточно близких к $x_1, \dots, x_n$. Напомним, точкой Штейнера $s(x_1, \dots, x_n)$ называется любая точка с минимальной суммой расстояний до элементов $x_1, \dots, x_n$.

В **главе II** исследуется линейность и липшицевость операторов P_Y метрического проектирования на чебышевские подпространства Y общих банаховых и конкретных функциональных пространств X.

Основным инструментом этого исследования служит *коэффициент линейности* оператора P_Y, а именно, величина

$$\lambda(Y) = \inf\left\{\frac{\rho(q_1+q_2, Y)}{\|q_1+q_2\|} : q_1, q_2 \in Q(Y), q_1+q_2 \neq 0\right\},$$

где $Q(Y) = \{q \in X : P_Y(q) \ni 0\}$ — *квазиортогональное множество* к подпространству Y.

Теорема 2.1. *Для любого чебышевского подпространства Y справедливы следующие утверждения:*
(1) $0 \leqslant \lambda(Y) \leqslant 1$; $\lambda(Y) = 1$ тогда и только тогда, когда оператор P_Y линеен;
(2) если оператор P_Y удовлетворяет условию Липшица с константой k: $\|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\| \leqslant k\|x_1 - x_2\|$ $\forall x_1, x_2 \in X$, то $\lambda(Y) \geqslant \frac{1}{k+1}$;
(3) если $\lambda(Y) > 0$, то P_Y удовлетворяет условию Липшица с константой $k = \frac{1}{\lambda(Y)} + 1$;
(4) $\lambda(Y) = 0$ тогда и только тогда, когда оператор P_Y не является липшицевым.
(5) если оператор P_Y разрывен, то $\lambda(Y) = 0$; обратное, вообще говоря, неверно.

Неравенства в утверждениях (2) и (3) этой теоремы, связывающие коэффициент линейности $\lambda(Y)$ и липшицеву константу $k = k(Y)$, могут оба обращаться в равенства.

Следующий результат является простым следствием теорем Й. Линденштраусса и Л. Цафрири и теоремы 2.1.

Следствие 2.2.1. *Если банахово пространство X не изоморфно гильбертову пространству, то в X есть либо нечебышевское подпространство Y, либо чебышевское подпространство Y с $\lambda(Y) = 0$ (то есть с нелипшицевым оператором метрического проектирования).*

Пусть $C[K]$ — пространство действительнозначных или комплекснозначных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве K, с обычной равномерной нормой $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in K\}$.

Теорема 2.3. *Пусть Y — чебышевское подпространство в $C[K]$. Тогда*
(1) если $\dim Y = 0$ *или* $\operatorname{codim} Y \leqslant 1$*, то* $\lambda(Y) = 1$*;*
(2) если $\dim Y \geqslant 1$ *и* $\operatorname{codim} Y \geqslant 2$*, то* $\lambda(Y) \leqslant 1/2$*;*
(3) если компакт K бесконечен, то при $2 \leqslant \dim Y < \infty$ *или* $2 \leqslant \operatorname{codim} Y < \infty$ *справедливо равенство* $\lambda(Y) = 0$.

В частности, оператор метрического проектирования на чебышевское подпространство $Y \subseteq C[K]$ линеен тогда и только тогда, когда или $Y = \{0\}$, или $Y = C[K]$, или Y имеет коразмерность 1.

Утверждение (3) является следствием результатов П. Морриса (1968) и А. Клайна (1973). Неравенство $\lambda(Y) \leqslant 1/2$ в утверждении (2) теоремы 2.3 является точным. По-видимому, в утверждении (3) теоремы 2.3 можно снять ограничения $\dim Y < \infty$ и $\operatorname{codim} Y < \infty$. В частном случае, когда компакт K имеет конечное число предельных точек (то есть $C[K]$ является пространством типа **c**), это действительно удается сделать.

Теорема 2.4. *Пусть компакт K имеет конечное число предельных точек.*
(1) Собственное подпространство $Y \subset C[K]$ аппроксимативно компактно тогда и только тогда, когда оно конечномерно.
(2) Оператор P_Y метрического проектирования на чебышевское подпространство $Y \subset C[K]$ непрерывен тогда и только тогда, когда либо $\operatorname{codim} Y \leqslant 1$*, либо* $\dim Y < \infty$*.*

В частности, если чебышевское подпространство Y в таком $C[K]$ удовлетворяет условиям $\dim Y \geqslant 2$ или $\operatorname{codim} Y \geqslant 2$, то $\lambda(Y) = 0$.

Отметим, что аппроксимативная некомпактность факторрефлексивных подпространств Y (в частности, подпространств Y конечной коразмерности) в общих пространствах $C[K]$ с бесконечным K установлена В.И. Андреевым (1975).

Что касается утверждения (2) теоремы 2.4, в общих пространствах $C[K]$ с бесконечным K разрывность оператора P_Y для чебышевских подпространств Y конечной коразмерности > 1 доказана П. Моррисом (1968), для факторрефлексивных чебышевских подпространств коразмерности > 1 — В.И. Андреевым (1975). О существовании же в пространствах типа **c** чебышевских подпространств с бесконечной размерностью и бесконечной коразмерностью на данный момент ничего не известно.

Пусть $L_1(M) = L_1(M, \Sigma, \mu)$ — пространство действительнозначных или комплекснозначных функций, определенных на множестве M произвольной природы и суммируемых на M по $\sigma-$конечной мере μ, заданной на $\sigma-$алгебре Σ подмножеств этого множества. Для каждой функции $f \in L_1(M)$ ее *носитель* $\operatorname{supp} f := \{t \in M : f(t) \neq 0\}$ определен с точностью до множества меры 0.

Теорема 2.5. *(1) Для любого чебышевского подпространства Y в действительном пространстве $L_1(M)$ имеет место либо равенство $\lambda(Y) = 1$, либо неравенство $\lambda(Y) \leqslant 1/2$.*

(2) В произвольном (действительном или комплексном) пространстве $L_1(M)$ подпространство Y является чебышевским с $\lambda(Y) = 1$ тогда и только тогда, когда существует такое разбиение множества M на два непересекающихся μ-измеримых множества M_1 и M_2 и такой линейный оператор $A : L_1(M_1) \to L_1(M_2)$, строго уменьшающий норму каждого ненулевого элемента ($\|Ay\| < \|y\|$ при $y \neq 0$), что

$$Y = \{y \in L_1(M) : y|_{M_2} = A\left(y|_{M_1}\right)\},$$

где $y|_N$ обозначает сужение функции y на множество $N \subseteq M$.

Неравенство $\lambda(Y) \leqslant 1/2$ в утверждении (1) теоремы 2.5 является точным.

Утверждение (2) теоремы 2.5 в частном случае пространства $L_1[0,1]$ доказывалось П. Моррисом (1980).

Пространство Харди $H^1 = H^1(U)$ состоит из функций $f(z)$, аналитических в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и таких, что

$$\|f\|_{H^1} := \sup_{0 \leqslant r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty.$$

Пространство H^1 изометрически изоморфно подпространству комплексного пространства $L_1(C := \{z : |z| = 1\})$, порожденному системой $\{1, z, z^2, \dots\}$.

Чебышевские подпространства в пространстве H^1 изучались сравнительно мало. С.Я. Хавинсон (1958) доказал, что при любом $n = 0, 1, 2, \dots$ подпространство комплексных многочленов степени не выше n является чебышевским в H^1. С.Б. Стечкин (1989) привел пример конечномерного нечебышевского подпространства в H^1. Автором было показано, что в H^1 имеется достаточно много чебышевских подпространств любой конечной размерности или коразмерности (в $L_1(C)$ вообще нет чебышевских подпространств с конечной ненулевой размерностью или коразмерностью).

Теорема 2.6. *В пространстве H^1 нет нетривиальных подпространств Y, для которых $Q(Y)$ — линейное подпространство размерности больше 1. В частности, чебышевское подпространство*

$Y \subseteq H^1$ имеет линейный оператор метрического проектирования тогда и только тогда, когда или $Y = \{0\}$, или $Y = H^1$, или Y имеет коразмерность 1.

Таким образом, в пространствах $C[K]$ и в пространстве H^1 совокупность чебышевских подпространств Y с линейным оператором P_Y — в отличие от $L_1(C)$, см. теорему 2.5 выше — исчерпывается тем минимумом, который обязателен для каждого банахова пространства (нулевое подпространство, все пространство и чебышевские подпространства коразмерности 1 имеют линейный оператор метрического проектирования в любом банаховом пространстве).

В **главе III** исследуются свойства метрической N–проекции и выпуклость N–чебышевских множеств (определения этих понятий см. выше).

Следствие 3.1.1. *Пусть натуральное число N четно. В локально равномерно выпуклом банаховом пространстве всякое ограниченно компактное N–чебышевское множество выпукло.*

Следствие 3.1.2. *Пусть натуральное число N четно. В локально равномерно выпуклом рефлексивном банаховом пространстве ограниченно компактное множество является N–чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло.*

Примечательно, что утверждения этих следствий неверны для $N = 1$ — нужна гладкость пространства.

Теорема 3.3. *(1) Пусть N четно и X — равномерно выпуклое банахово пространство. Множество $M \subset X$ является N–чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто.*

(2) Пусть $N \geqslant 3$ нечетно, и X — гладкое равномерно выпуклое банахово пространство. Множество $M \subset X$ является N–чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто.

Показывается, что условие гладкости пространства в утверждении (2) этой теоремы убрать нельзя.

Теорема 3.5. *Пусть $X = H$ — гильбертово пространство, $N \geqslant 2$, и для множества $M \subset H$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых точек $x_1, \dots, x_N \in H$ с $\rho(x_1, \dots, x_N, H) \leqslant \varepsilon\rho(x_1, \dots, x_N; M)$ метрическая N–проекция $P_M(x_1, \dots, x_N)$ состоит из одной точки. Тогда M выпукло.*

Это утверждение усиливает теорему 3.3 в случае гильбертова пространства.

Для произвольного единичного вектора $e \in H$ и произвольного числа $k > 0$ через $A_{e,k}$ обозначим линейный оператор, производящий растяжение пространства H в k раз вдоль направления e: $A_{e,k}(x) = x + (k-1)(x,e)e$.

Следствие 3.5.1. *Если чебышевское множество $M \subset H$ устойчиво в том смысле, что образы $A_{e,k}(M)$ являются чебышевскими множествами для любого $e \in S(H)$ и любого $k \in [1-\varepsilon, 1]$ (где $\varepsilon \in (0,1)$ — некоторое фиксированное число), то M выпукло.*

По аналогии с определением солнца, введенного Н.В. Ефимовым и С.Б. Стечкиным (1958), множество M в банаховом пространстве X назовем *N–солнцем*, если для любых $x_1, \dots, x_N \in X$ найдется такой элемент $y \in P_M(x_1, \dots, x_N)$, что $y \in P_M(x'_1, \dots, x'_N)$ для любых точек x'_k, лежащих соответственно на лучах $\{y + \lambda(x_k - y) : \lambda \geqslant 0\}$, $k = 1, \dots, N$ (при $x_k = y$ такой луч вырождается в точку).

Теорема 3.6. *Пусть X — произвольное банахово пространство, и множество $M \subset X$ является N–чебышевским и N–солнцем для бесконечной последовательности натуральных N. Тогда M выпукло.*

В связи с теоремой 3.6 возникает вопрос: существует ли, для заданного $N \geqslant 2$, N–чебышевское множество, которое не является N–солнцем? Для $N = 1$ пример такого множества впервые был построен Данхэмом (1975).

Следствие 3.6.2. *Пусть X — произвольное банахово пространство. Если ограниченно компактное множество $M \subset X$ является N–чебышевским для некоторой бесконечной последовательности натуральных N, то оно выпукло.*

Следствие 3.6.3. *Пусть X — конечномерное банахово пространство. Если множество $M \subset X$ является N–чебышевским для некоторой бесконечной последовательности натуральных N, то оно выпукло.*

В двух предпоследних параграфах III главы описываются конечномерные 2-чебышевские подпространства в пространствах C и L_1.

Теорема 3.7. *n–мерное подпространство Y является 2-чебышевским в $C[K]$ тогда и только тогда, когда всякая ненулевая функция $y \in Y$ обращается на K в нуль не более чем в $n-1$ точках и $|y|$ принимает всякое свое положительное значение не более чем в n точках.*

Этот результат является аналогом известной теоремы А. Хаара (1918) о конечномерных чебышевских подпространствах в пространстве C. С помощью теоремы Мэйрхьюбера из него выводится

Следствие 3.7.2. *Если $C[K]$ содержит 2-чебышевское подпространство Y размерности $n \geqslant 3$, то K непрерывно вкладывается в окружность и не содержит подмножеств, гомеоморфных отрезку.*

Теорема 3.8. *$n-$мерное подпространство Y является 2-чебышевским в $L_1(E)$ тогда и только тогда, когда не существует такого ненулевого функционала $f \in Y^{\perp}$, что разность $E \setminus (\{t \in E : |f(t)| = \|f\|_{L_\infty(E)}\} \cup \{t \in E : f(t) = 0\})$ состоит из менее чем n атомов.*

Это утверждение аналогично теореме Р. Фелпса (1966) о конечномерных чебышевских подпространствах в L_1.

В пространстве $L_1[a,b]$ на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ с классической мерой Лебега нет чебышевских — а значит, и 2-чебышевских — подпространств с конечной ненулевой размерностью или коразмерностью (М.Г. Крейн, 1938). Большинство известных чебышевских подпространств этого пространства также оказываются не 2-чебышевскими. Тем не менее, 2-чебышевские подпространства в $L_1[a,b]$ все же существуют — целый класс таких подпространств описан в теореме 3.9.

В заключительном параграфе главы III исследуется свойство зеркальности метрической 2–проекции. Если $X = H$ — гильбертово пространство, то метрическая 2-проекция $P_Y(x_1,x_2)$ для любых элементов $x_1,x_2 \in H \setminus Y$ состоит из единственной точки y на отрезке $[P_Y(x_1), P_Y(x_2)]$, делящей его в отношении $\rho(x_1,Y) : \rho(x_2,Y)$. Например, если Y — подпространство коразмерности 1 (гиперплоскость) и элементы x_1, x_2 находятся по одну сторону от Y (H — действительное), то ломаная x_1yx_2 представляет собой путь луча света, идущего из x_1 в x_2 с отражением от Y как от зеркала.

Пусть Y — подпространство банахова пространства X. Будем говорить, что Y обладает *зеркальной выборкой* из метрической 2-проекции, если для любых $x_1,x_2 \in X \setminus Y$ найдется элемент $y \in P_Y(x_1,x_2)$, удовлетворяющий равенству

$$\frac{\|x_1 - y\|}{\rho(x_1,Y)} = \frac{\|x_2 - y\|}{\rho(x_2,Y)}.$$

Теорема 3.11. *Пусть X — действительное банахово пространство размерности $\dim X \geqslant 2$, и натуральные числа n, k удовлетворяют условиям $1 \leqslant n < \dim X$, $1 \leqslant k < \dim X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) X — гильбертово пространство;

(2) всякое подпространство $Y \subset X$ размерности n обладает зеркальной выборкой из метрической 2-проекции;

(3) всякое подпространство $Y \subset X$ коразмерности k обладает зеркальной выборкой из метрической 2-проекции.

Этот результат аналогичен приведенной выше теореме E.

В первых параграфах **IV главы** получены некоторые условия на множество M и банахово пространство X, достаточные для того, чтобы замыкание в X полугруппы $R(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{M + \cdots + M}_{n}$ было, во-первых, подгруппой в X, а во-вторых, чтобы эта подгруппа совпадала со всем X.

Теорема 4.3. *Пусть в равномерно выпуклом банаховом пространстве X задано разностороннее минимальное множество $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_m$, состоящее из спрямляемых (замкнутых или разомкнутых) кривых Γ_j. Тогда $\overline{R(\Gamma)}$ — подгруппа в X.*

Здесь множество M называется разносторонним, если для любого ненулевого функционала $f \in X^*$ существует такой элемент $x \in M$, что $f(x) < 0$ ($\operatorname{Re} f(x) < 0$ в случае комплексного X), а разностороннее множество M называется минимальным, если для всякого $x \in M$ и всякой окрестности $U(x)$ найдется такой функционал $f \in X^*$, что $f(y) > 0$ для любого $y \in M \setminus U(x)$. Разносторонность множества M всегда является необходимым (а в случае конечномерности X — и достаточным) условием для того, чтобы $\overline{R(M)}$ было подгруппой в X.

Построены примеры, показывающие как существенность спрямляемости кривых Γ_j, так и существенность равномерной выпуклости пространства X в теореме 4.3.

Теорема 4.5. *Пусть G — замкнутая аддитивная подгруппа равномерно гладкого пространства X с модулем гладкости $s(\tau)$, и непрерывное отображение $\varphi : [0,1] \to G$ имеет такой модуль непрерывности $\omega_\varphi(\delta)$, что $s(\omega_\varphi(\delta)) = o(\delta)$ при $\delta \to 0$. Тогда G содержит замкнутое $\mathbb{R}$-линейное подпространство L, порожденное элементами вида $a - b$, где $a, b \in \varphi([0,1])$.*

В частности, если отображение φ липшицево, то G содержит L при любом модуле гладкости $s(\tau)$.

Следствие 4.5.2. *Если для функции f из вещественного пространства $L_2(\mathbb{R})$ преобразование Фурье $\widehat{f}$ обращается в нуль на множестве нулевой меры Лебега на $\mathbb{R}$ и интегральный модуль непре-*

рывности

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+h)-f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

обладает свойством $\omega_2^2(f,\delta) = o(\delta)$ *при* $\delta\to 0$ *(например, если* f *— финитная функция, удовлетворяющая условию Липшица), то суммы функций* $\pm f(t-\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, *плотны в пространстве* $L_2(\mathbb{R})$.

Существенность условия на интегральный модуль непрерывности функции f в этом следствии показывает пример функции $f = I_{[0,1]}$ (порожденная сдвигами этого индикатора подгруппа в $L_2(\mathbb{R})$ состоит только из целозначных функций и не совпадает с $L_2(\mathbb{R})$). Участвующее в формулировке следствия условие "$\widehat{f}$ обращается в нуль на множестве нулевой меры" является критерием полноты системы $\{f(t-\alpha) : \alpha\in\mathbb{R}\}$ в $L_2(\mathbb{R})$ по классической теореме Винера.

Для приложений в теории приближения наипростейшими дробями необходимы утверждения о выпуклости подгрупп, порожденных образами множеств комплексной плоскости.

Теорема 4.6. *Пусть* G *— замкнутая аддитивная подгруппа равномерно гладкого пространства* X, *модуль гладкости которого удовлетворяет равенству* $s(\tau) = O(\tau^2)$ *при* $\tau\to 0$ *(например,* $X = L_p$ *при* $p\geqslant 2$*),* E *— связное множество на плоскости, и липшицево отображение* $\varphi : E\to X$ *таково, что* $\varphi(E)\subset G$. *Тогда* G *содержит замкнутое* $\mathbb{R}$*-линейное подпространство* L, *порожденное элементами вида* $a-b$, $a,b\in\varphi(E)$.

Следствие 4.6.1. *Пусть связные компакты* E_1 *и* E_2 *лежат соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости, и каждый из них является множеством единственности для гармонических функций. Тогда суммы дробей вида* $\pm\frac{1}{z-a}$ *(то есть логарифмические производные рациональных функций, или разности наипростейших дробей) с полюсами* $a\in E_1\cup E_2$ *плотны в пространстве* $L_p(\mathbb{R})$ *при* $p\geqslant 2$.

В связи с этим следствием напомним, что наипростейшие дроби (логарифмические производные многочленов) не плотны ни в одном из пространств $L_p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$.

Следствие 4.6.2. *Пусть связный компакт* E *не пересекается с положительной полуосью* $\mathbb{R}_+$ *действительной оси и является множеством единственности для гармонических функций. Тогда суммы дробей вида* $\pm\frac{1}{z-a}$ *с полюсами* $a\in E$ *плотны в пространстве* $L_p(\mathbb{R}_+)$ *при* $p\geqslant 2$.

Для множества $E \subset \mathbb{C}$ через $\widehat{E}$ ниже обозначается замыкание объединения E со всеми ограниченными компонентами связности дополнения $\mathbb{C} \setminus E$, а $AC(K)$ обозначает пространство функций, непрерывных на компакте $K \subset \mathbb{C}$ и голоморфных в его внутренних точках, с обычной равномерной нормой.

Теорема 4.8. *Пусть K и E — непересекающиеся компакты в комплексной плоскости.*

(1) Если разность $K \setminus \widehat{E}$ содержит бесконечно много точек, то наипростейшие дроби с полюсами из E не плотны в пространстве $AC(K)$.

(2) Если K имеет связное дополнение и E содержит такие взаимно внешние замкнутые жордановы спрямляемые контуры $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, что $K \subset \cup_{j=1}^{m} \operatorname{Int} \Gamma_j$, то наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$.

Утверждение (2) здесь выводится из теорем 4.3 и 4.6. Возможно, условие $K \subset \widehat{E} \setminus E$ (при связном дополнении к компакту K) является достаточным для того, чтобы наипростейшие дроби с полюсами из E были плотны в $AC(K)$, но доказать это пока не удается. В случае, когда K лежит в *одной* компоненте связности множества $\widehat{E} \setminus E$, плотность в $AC(K)$ наипростейших дробей с полюсами из E может быть легко выведена из следующего результата Кореваара (1964): всякая функция, голоморфная в ограниченной односвязной области D и не имеющая нулей в D, может быть с любой точностью равномерно внутри D приближена многочленами, все нули которых лежат на границе ∂D этой области.

Для разностей наипростейших дробей, то есть логарифмических производных рациональных функций, имеет место

Теорема 4.9. *Пусть в комплексной плоскости заданы компакт K со связным дополнением и компакт $E \subset \mathbb{C} \setminus K$, удовлетворяющий одному из следующих условий:*
1) $\widehat{E} \supset K$;
2) E связен и является множеством единственности для гармонических функций.

Тогда суммы дробей вида $\pm\frac{1}{z-a}$ с полюсами $a \in E$ плотны в пространстве $AC(K)$.

В следующих двух утверждениях речь идет о приближении наипростейшими дробями на полуоси. При их доказательстве применяются теорема F В.И. Данченко и сформулированное выше следствие 4.6.2.

Теорема 4.11. *(1) Наипростейшие дроби не плотны в простран-*

стве $L_p(\mathbb{R}_+)$ при каждом $p \in (1;2)$.

(2) При любых $p \geqslant 2$ и $\alpha > 0$ множество наипростейших дробей с полюсами в области $\Omega_\alpha = \{z = x + iy : x < \frac{y^2}{4\alpha^2} - \alpha^2\}$ всюду плотно в $L_p(\mathbb{R}_+)$.

Область Ω_α является образом множества $\sqrt{\Omega_\alpha} = \{z : |\operatorname{Im} z| > \alpha\}$ при отображении $z \to z^2$. Граница области Ω_α есть парабола с фокусом в начале координат.

Теорема 4.12. *Для любого $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ наипростейшие дроби с полюсами в угле $\Lambda_\gamma = \{z : \arg z \in (\gamma, 2\pi - \gamma)\}$ содержатся в собственном полупространстве пространства $L_p(\mathbb{R}_+)$ (в частности, не всюду плотны в этом пространстве) при каждом $p \in \left(1, \frac{2\pi - 2\gamma}{\pi - 2\gamma}\right)$ и всюду плотны в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при каждом $p \geqslant \frac{2\pi - 2\gamma}{\pi - 2\gamma}$.*

Этот результат, с одной стороны, является обобщением теоремы 4.11, а с другой стороны, он показывает, что область Ω_α в теореме 4.11 нельзя заменить никаким углом Λ_γ, $\gamma > 0$.

В следующей теореме уточняется оценка В.И. Данченко для величин $d(n,p)$ из теоремы G. Новая оценка лучше оценки В.И. Данченко при всех p и является точной при $p = 2$.

Теорема 4.14. *Для любых $p \in (1;\infty)$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\frac{2^{2q-2}\pi^{q-1}}{p^q} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right) \leqslant d(n,p) \leqslant \left(\frac{\pi q 2^{2-p}}{pB(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})}\right)^{q-1},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ — бета-функция Эйлера.

Следствие 4.14.1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$d(n,2) = \pi.$$

Отметим, что теорема G дает оценку $d(n,2) \geqslant \frac{4}{\pi}$.

В заключительном параграфе IV главы получены оценки расстояний до полуоси $\mathbb{R}_+$ от полюсов наипростейших дробей r с условием $\|r\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1$ для некоторого $p \in (1,2]$. Полюсы таких дробей r при заданном $p \in (1,2)$ не могут, а при $p = 2$ могут подходить к полуоси $\mathbb{R}_+$ сколь угодно близко. В первом случае получается аналог теоремы G, а во втором — аналог теоремы F.

Следствие 4.15.1. *Для каждого $n \geqslant 20$ полюсы наипростейшей дроби r степени не выше n с условием $\|r\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1$ не могут подходить к полуоси $\mathbb{R}_+$ ближе чем на $(330^2 \ln n)^{-1}$, но могут подходить* *на расстояние $C_1(\ln\ln n)^2/\ln n$ (по отрицательной полуоси), где C_1 — некоторая константа.*

Глава V начинается с подробного обзора результатов, посвященных задаче существования элемента с заданными уклонениями d_n от расширяющейся системы $\{Y_n\}$ строго вложенных подпространств банахова пространства (см. выше). В следующем утверждении эта задача решается при дополнительных и довольно сильных условиях на уклонения.

Теорема 5.1. *Пусть X — произвольное бесконечномерное банахово пространство, $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ — произвольная счетная система строго вложенных подпространств в X, а числовая последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $d_n > \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} d_k$ для каждого натурального $n \geqslant n_0$, при котором $d_n > 0$. Тогда существует элемент $x \in X$, для которого $\rho(x, Y_n) = d_n$ $(n = 1, 2, \dots)$.*

Используя теорему 5.1, С.В. Конягин (2012) показал, что для всякой системы строго вложенных подпространств $\{Y_n\}$ в произвольном банаховом пространстве X и всякой монотонно убывающей к нулю последовательности d_n существует такой элемент $x \in X$, что $d_n/4 \leqslant \rho(x, Y_n) \leqslant 4d_n$ при каждом n.

В следующем утверждении от уклонений d_n требуется лишь строгая монотонность, но зато накладываются сильные ограничения на подпространства Y_n.

Следствие 5.2.2. *Пусть X есть одно из пространств $\mathbf{c}_0$ или $\mathbf{l}_p$, $1 < p < \infty$, $d_1 > d_2 > \dots$, $d_n \to 0$, а система строго вложенных подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ такова, что для любого $n \geqslant n_0$ размерность факторпространства Y_{n+1}/Y_n бесконечна. Тогда в X существует такой элемент x, что $\rho(x, Y_n) = d_n$ $(n = 1, 2, \dots)$.*

Если доказать аналог следствия 5.2.2 для пространства $\mathbf{l}_1$, то он будет доказан для любого сепарабельного банахова пространства X (поскольку всякое такое пространство изометрически изоморфно некоторому факторпространству $\mathbf{l}_1/Y$).

Заключительные параграфы V главы содержат результаты о существовании функций f с заданными наименьшими уклонениями $\rho_n(f) = \rho(f, SF_n)$ от множеств SF_n наипростейших дробей степени не выше n в различных функциональных пространствах.

Теорема 5.3. *Для любой последовательности $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел, строго убывающей вплоть до нуля: $d_n > 0 \implies d_n > d_{n+1}$, существует такая функция $f \in C_0(\mathbb{R})$, что $\rho_n(f) = d_n$,*

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

Показывается, что условие строгого убывания последовательности $\{d_n\}$ вплоть до 0 в теореме 5.3 существенно.

Автор глубоко благодарен Сергею Владимировичу Конягину, Игорю Германовичу Царькову и своему учителю Евгению Прокофьевичу Долженко.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. П.А. Бородин, "Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося компактным", *Успехи матем. наук*, **49**:4 (1994), 157–158.

2. П.А. Бородин, "Квазиортогональные множества и условия гильбертовости банахова пространства", *Матем. сб.*, **188**:8 (1997), 63–74.

3. П.А. Бородин, "О линейности оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства в пространствах L_1 и C", *Матем. заметки*, **63**:6 (1998), 812–820.

4. П.А. Бородин, "Чебышевские подпространства в пространстве H^1 Харди", *Analysis Math.*, **25**:4 (1999), 243–264.

5. П.А. Бородин, "О выпуклых аппроксимативно компактных множествах и пространствах Ефимова–Стечкина", *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 1999, № 4, 19–21.

6. П.А. Бородин, "Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения в выпуклом анализе", *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 329–337.

7. П.А. Бородин, "Аппроксимативные свойства подпространств в пространствах типа **c**", *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 2002. № 5, 54–58.

8. П.А. Бородин, О.Н. Косухин, "О приближении наипростейшими дробями на действительной оси", *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 2005, № 1, 3–8. (В диссертацию включена теорема 1, доказанная совместно с О.Н. Косухиным, и теоремы 3 и 4, доказанные автором.)

9. П.А. Бородин, "К задаче существования элемента с заданными уклонениями от расширяющейся системы подпространств", *Матем. заметки*, **80**:5 (2006), 657–667.

10. П.А. Бородин, "Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах", *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 803–810.

11. П.А. Бородин, "Выпуклость 2-чебышевских множеств в гильбертовом пространстве", *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Ме-*

хан., 2008, № 3, 16–19.

12. П.А. Бородин, "Коэффициент линейности оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство", *Матем. заметки*, **85**:2 (2009), 180–188.

13. П.А. Бородин, "Приближение наипростейшими дробями на полуоси", *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 25–44.

14. П.А. Бородин, И.А. Пятышев, "Пример не аппроксимативно компактного множества существования с конечнозначной метрической проекцией", *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 170–174. (В диссертацию включен результат, доказанный совместно с И.А. Пятышевым.)

15. П.А. Бородин, "Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве", *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 514–518.

16. П.А. Бородин, "О зеркальном свойстве метрической 2-проекции", *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 2011, № 2, 32–36.

17. П.А. Бородин, "О выпуклости N-чебышевских множеств", *Известия РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 19–46.

18. П.А. Бородин, "О 2-чебышевских подпространствах в пространствах L_1 и C", *Матем. заметки*, **91**:6 (2012), 819–831.