МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи
517.518+517.984

Шейпак Игорь Анатольевич

Самоподобные функции, меры и их применение к спектральной теории операторов

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва
2012

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Раис Сальманович Исмагилов, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, профессор
	доктор физико-математических наук, профессор Сергей Николаевич Набоко, Санкт-Петербургский государственный университет, профессор
	доктор физико-математических наук, профессор Владимир Юрьевич Протасов, кафедра общих проблем управления механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы

Защита состоится 9 ноября 2012 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП–1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, 27, сектор А, 8-й этаж).

Автореферат разослан 11 сентября 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Предметом исследования настоящей диссертации являются самоподобные функции и их свойства в различных функциональных пространствах, самоподобные меры и их приложения к спектральной теории операторов.

Самоподобной мы называем функцию f, которая является неподвижной точкой аффинного оператора G. Точнее, пусть фиксировано натуральное число $n > 1$, и пусть вещественные числа $a_k \in (0,1)$, где $k = 1, \ldots, n$, таковы, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1.$$

Определим числа $\alpha_1 = 0$, $\alpha_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_j$, где $k = 2, \ldots, n+1$.

Введём также числа $c_k > 0$, d_k и β_k (пока произвольные) и также булевский вектор $\{e_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ и определим семейство аффинных преобразований отрезка $[0,1]$

$$S_k(x) = a_k x + \alpha_k, \quad e_k = 0; \qquad S_k(x) = -a_k x + \alpha_{k+1}, \quad e_k = 1.$$

Данному набору чисел можно сопоставить в соответствие аффинный оператор $G : L_p[0,1] \to L_p[0,1]$ вида

$$[G(f)](t) = \sum_{k=1}^{n} \left(d_k \cdot f\left(S_k^{-1}(t)\right) + c_k S_k^{-1}(t) + \beta_k\right) \cdot \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1})}, \qquad (1)$$

где через $\chi_{(\zeta,\xi)}$ обозначена характеристическая функция интервала (ζ, ξ), рассматриваемая как элемент пространства $L_p[0,1]$.

При определённых условиях на параметры $\{a_k\}$, $\{d_k\}$ оператор G является сжимающим в пространстве $L_p[0,1]$. Чтобы этот оператор был сжимающим в пространстве непрерывных функций необходимо также наложить условия на параметры $\{\beta_k\}$.

Неподвижная точка такого оператора в соответствующем пространстве называется *самоподобной функцией.* Числа $\{a_k\}$, $\{d_k\}$, $\{\beta_k\}$ и $\{e_k\}$ называются *параметрами самоподобия.*

Фрактальные множества и связанные с ними функции исследовались ранее.[1,2]

---

[1] Julia G., *Memoire sur itération des fonctions rationelles*//J. Math. Pure Appl., 1918, **8**, 47–245.

[2] Fatou P.,Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelle, C.R.Acad. Sci. Paris, 1906, **143**, 546–548.

Достаточно общий подход к конструкции самоподобных мер и множеств изложен в работах [3,4].

Одним из важных классов самоподобных объектов являются фрактальные кривые. Их теория получила большой толчок к развитию после того, как обнаружилась её связь с теорией всплесков (вейвлетов) и масштабирующих функций[5]. В частности, определённый интерес представляет исследование гладкости решений масштабирующих уравнений в различных функциональных пространствах. Например, в работе[6] были получены оценки сверху на показатель Гёльдера этих решений в пространстве $C[0,1]$. В. Ю. Протасовым[7] были получены критерии таких свойств решений масштабирующих уравнений, как абсолютная непрерывность, сингулярная непрерывность, ограниченность вариации.

Расширением понятий самоподобных мер и непрерывных функций являются самоподобные функции из пространств L_p. В связи с этим необходимо упомянуть о введённых В. Ю. Протасовым[8] суммируемых фрактальных кривых. В этой работе были получены критерии существования фрактальной кривой и принадлежности её классам L_p в терминах спектральных p-радиусов ρ_p (см. также [9]). Кроме того, там же были выведены формулы для показателей гладкости в различных функциональных пространствах.

Применением свойств различных самоподобных объектов к спектральной теории операторов занимались многие авторы. Распределением собственных значений оператора Лапласа в областях с фрактальной границей занимались М. Берри[10,11], Лапидус М. Л.[12,13], Левитин М., Ва-

[3] Hutchinson J., *Fractals and Self-similatity*//Indiana University Math. J., **30** (1981), 713–741.

[4] M. Barnsley, *Fractals everywere*//Academic Press, 1988.

[5] Daubechies I.,Lagarias J.,*Two scale difference equations. I. Existence and global regularity of solutions*//SIAM. J. Anal., **22**:5 (1991), 1388–1410.

[6] Daubechies I.,Lagarias J., *Two scale difference equations. I. Local regularity, infinite products of matrices and fractals*//SIAM. J. Anal., **23**:4 (1992), pp. 1031–1079.

[7] Protasov V., *Refinement equations with nonnegative coefficients*//J. Fourier Anal. Appl., **6**:1, (2000), 55–78.

[8] В. Ю. Протасов *Фрактальные кривые и всплески*//Изв.РАН. Серия матем.,**70**:5 (2006), 105–145.

[9] Lau K. S., Wang J., *Characterization of L_p-solutions for two-scale dilation equations*//SIAM. J. Math. Anal., **26**:4, (1995), 1018–1046.

[10] Berry M. V., *Distribution of modes in fractal resonators, structural stability in physics*(W. Güttinger and H. Eikemeier, eds.)// Springer-Verlag, Berlin, 1979, 51–53.

[11] Berry M. V., *Some geometric aspects of wave motion: wavefront dislocations, diffraction catastrophes, diffractals*//Geometry of Laplas Operator, Proc. Sympos. Pure Math., vol.36, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, 13–38.

[12] Lapidus M. L., *Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl–Berry conjecture*//Trans. Amer.Math.Soc., **325**, 1991, pp. 465-529.

[13] Kigami J., Lapidus M.L., *Weyl's problem for the spectral distributions of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals*// Comm. Math. Phys. 158 (1993), 93-–125.

сильев Д.[14]

Большое значение самоподобные веса приобрели при изучении колебаний струны. Уравнению колебания струны

$$-y'' = \lambda P' y$$

с надлежащими граничными условиями посвящены работы многих авторов. Наиболее важные результаты были получены в работах М. Г. Крейна.[15,16,17,18] В частности им была получена формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{P'}dx,$$

из которой следует, что при наличии абсолютно непрерывной части у неубывающей функции P собственные значения удовлетворяют асимптотике

$$\lambda_n \sim n^2 \left(\frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{P'}dx\right)^2.$$

Кроме того, в работе М. С. Бирмана и М. З. Соломяка[19] показано, что если P содержит абсолютно непрерывную компоненту, то её сингулярная составляющая не влияет на главный член асимптотики. Таким образом, особый интерес при определении спектральных асимптотик представляют функции P, не содержащие абсолютно непрерывную компоненту. Дальнейшие результаты в этой области связаны с самоподобными сингулярными мерами [20].

В частности, М. Соломяком и Е. Вербицким для задачи колебания струны с самоподобной сингулярной мерой ρ в качестве веса при спектральном параметре получены асимптотические формулы для считающей функции собственных значений

$$N(\lambda) = \lambda^D(s(\ln\lambda) + o(1))$$

[14]Levitin M., Vassiliev D., *Spectral asymptotics, renewal theorem, and the Berry conjecture for a class of fractals*//Proc. Lond. Math. Soc., **72** (1996), 188–214.

[15]М. Г. Крейн, *Определение плотности неоднородной симметричной струны*//ДАН СССР, 1951, т. 76, №3, 345–348.

[16]М. Г. Крейн, *Об обратных задачах для неоднородной струны*//ДАН СССР, 1952, т. 82, №5, 669–672.

[17]М. Г. Крейн, *Об одном обобщении исследований Стилтьеса*//ДАН СССР, 1952, т. 87, №6, 881–884.

[18]М. Г. Крейн, *О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по её спектральной функции*//ДАН СССР, 1953, т. 93, №4, 617–620.

[19]М. С. Бирман, М. З. Соломяк, *Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов*// Изв. АН СССР, матем., **34** (1970), N6, 1143–1158.

[20]Solomyak M., Verbitsky E., *On a spectral problem related to self-similar measures*//Bull. London Math. Soc., **27** (1995), 242–248.

в случае арифметического самоподобия. Функция s в данном случае является периодической. В случае неарифметического самоподобия функция s является постоянной. Показатель D в случае мер принимает значение в промежутке $(0, 1/2)$. Случай дискретных мер ими не исследовался, равно как и случай знакопеременных весов.

Исследованием различных свойств дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами занимались многие авторы. В частности, различные (но эквивалентные) подходы к определению оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями даны в работе А. М. Савчука и А. А. Шкаликова[21] Исследование различных свойств этих операторов, решение обратной задачи получено в [22,23].

Асимптотическое распределение собственных значений для самоподобной сингулярной непрерывной меры и дифференциального оператора высокого порядка изучено в работе А. И. Назарова[24]. Для различных приложений, в частности в теории малых уклонений случайных процессов, возникает необходимость изучения дифференциальных операторов высокого порядка с дискретной мерой (точнее с её плотностью) в качестве коэффициента при спектральном параметре. Ранее такие задачи не изучались даже в случае дифференциального оператора второго порядка.

Задача Штурма–Лиувилля с самоподобным дискретным весом может быть применена к установлению асимптотического поведения собственных значений оператора Якоби с экспоненциально растущими матричными коэффициентами. Спектральные свойства двухдиагональных операторов Якоби с быстро убывающими (экспоненциально и сверхэкспоненциально) матричными элементами изучены Э. А. Туром[25] и Р. В. Кожаном[26].

---

[21] А. М. Савчук, А. А.,Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*//Труды Моск. матем. общества, **64**, 2003, 159–212.

[22] А. М. Савчук, А. А.,Шкаликов, *О свойствах отображений, связанных с обратной задачей Штурма-Лиувилля*// Труды Московского Института им. В.А.Стеклова Российской Академии Наук, Т. 260, 2008, 227–247.

[23] А. М. Савчук, А. А.,Шкаликов, *Метод отображений в обратных задачах Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами*// Труды Московского Института им. В.А.Стеклова Российской Академии Наук, т. 261, 2008, 243–248.

[24] А. И. Назаров,*Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры*//Записки науч. семинаров ПОМИ **311**, 2004, 190–213.

[25] Э. А. Тур *Асимптотика собственных значений для одного класса матриц Якоби с предельным точечным спектром*// Матем. заметки, т.73, вып.3, 2003, 449–462.

[26] Р. В. Кожан *Асимптотика собственных значений двухдиагональных матриц Якоби*//Матем. заметки, т.77, вып. 2, 2005, 313–316.

Цель работы. Описание конструкции самоподобных функций в различных функциональных пространствах. Установление критерия принадлежности самоподобных функций пространствам $L_p[0,1]$ ($p \geqslant 1$), C[0,1]. Получение асимптотических формул для считающей функции собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с сингулярным самоподобным весом. При этом изучаются веса, являющиеся обобщёнными производными самоподобных функций положительного спектрального порядка и самоподобных функций нулевого спектрального порядка. Исследование поведения собственных значений дифференциального оператора высокого порядка с дискретной самоподобной мерой. Применение спектральных свойств задачи Штурма–Лиувилля с вырожденно самоподобным весом к изучению асимптотического поведения собственных значений оператора Якоби (в том числе и в пространстве с индефинитной метрикой) с экспоненциально растущими матричными элементами.

Методы исследования. В работе используются свойства сжимающих отображений в различных функциональных пространствах, свойства самоподобных функций и мер, методы спектральной теории операторных пучков в гильбертовых пространствах, вариационные методы, асимптотические методы, методы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

1. Дана конструкция самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$, $C[0,1]$. Получен критерий сжимаемости оператора (1) в этих пространствах. Найдены условия, при которых самоподобная функция является непрерывной. Получены достаточные условия монотонности самоподобной функции положительного спектрального порядка. Для функций нулевого спектрального порядка (так называемых функций с вырожденным самоподобием) получены критерии монотонности и ограниченности вариации. Рассмотрены неаффинно-самоподобные функции.

2. Получены асимптотические формулы для считающей функции собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с самоподобным сингулярным индефинитным весом в случаях:

   а) арифметического самоподобия;

   б) неарифметического самоподобия;

   в) вырожденного арифметического самоподобия;

г) дискретного самоподобного веса (вырожденного самоподобия). В этом случае получены более тонкие результаты об асимптотическом поведении собственных значений: показано, что собственные значения можно разбить на серии, для каждой из которых получены асимптотические формулы.

3. Получены асимптотические формулы для считающей функции собственных значений самосопряжённого дифференциального оператора высокого порядка с дискретной самоподобной мерой.

4. Обнаружена связь между задачей Штурма–Лиувилля с двучленными дискретными самоподобными весами и оператором Якоби с экспоненциально растущими матричными элементами. Исследованы спектральные свойства оператора Якоби с экспоненциально растущими матричными элементами. Рассмотрены матрицы Якоби, задающие самосопряжённый оператор как в гильбертовом пространстве, так и в пространстве Крейна.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и разработанные методы могут быть использованы специалистами в области теории функций, теории самоподобных функций и мер, а также в спектральной теории операторов, теории малых уклонений случайных процессов.

Апробация диссертации. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- Научный семинар по операторным моделям в математической физике механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством профессоров А. Г. Костюченко, А А. Шкаликова, (2001–2011 гг.).

- Научный семинар по дифференциальным уравнениям кафедры теории дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством профессора В. В. Жикова (2006).

- Семинар им. В. И. Смирнова по математической физике Санкт–Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова под руководством профессоров С. И. Репина, Н. Н. Уральцевой (2011).

- Научный семинар по спектральной теории дифференциальных операторов под руководством академика РАН В. А. Садовничего (2011).
- Научно-исследовательский семинар по теории функций под руководством академика РАН Б. С. Кашина, профессоров М. И. Дьяченко, Б. И. Голубева, член-корреспондента РАН, профессора С. В. Конягина (2012).
- Научный семинар РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А. Л. Скубачевского (2012).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих научных конференциях:

- Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения», Воронеж, 2006, 2008.
- Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные вопросы», Воронеж, 2006.
- International Workshop on Krein Spaces, Берлин, 2006, 2007, 2008.
- Международная конференция «Спектральные задачи и их приложения», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, 2009.
- 15-ая Саратовская зимняя математическая школа «Современные проблемы теории функций и смежные вопросы», Саратов, СГУ им. Н. Г. Чернышевского, 2010.
- Международная конференция «Дифференциальные вопросы и смежные вопросы» (г. Москва, 2001, 2004, 2007, 2010 гг.).
- Международная конференция, посвященная 100-летию академика С. М. Никольского (г. Москва, 2005).
- Ломоносовские Чтения в МГУ им. М. В. Ломоносова (2010 г.).
- Международная конференция «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвященная 105-летию академика С. М. Никольского (г. Москва, 2010).

- International Workshop on Operator Theory and Applications (Международная конференция по теории операторов и приложениям), IWOTA–2010, г. Берлин, Германия.

- Международной конференция «Теория операторов и краевые задачи» (г. Орсе, Франция, 2011).

- Международной конференция «Спектральная теория операторов и её приложения» (г. Уфа, 2011).

- International Workshop on Operator Theory and Applications (Международная конференция по теории операторов и приложениям), IWOTA–2011, г. Севилья, Испания.

Тезисы всех докладов опубликованы в сборниках тезисов соответствующих конференций.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 23 работах (из них 12 из перечня ВАК), список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, двух приложений и списка литературы. Текст диссертации изложен на 203 страницах. Список литературы содержит 114 наименований. В работе имеется 11 поясняющих иллюстраций и 3 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Во введении приводится краткий исторический обзор исследований, формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

Глава 1. В первой главе дана общая конструкция самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$, $C[0,1]$, получены условия сжимаемости оператора подобия G в этих пространствах. Получены необходимые условия монотонности, ограниченности вариации самоподобных функций положительного спектрального порядка. Доказана непрерывная зависимость самоподобной функции от параметров самоподобия. Получены критерии ограниченности вариации, монотонности для самоподобных функций нулевого спектрального порядка.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1 (1.1.1.). *Оператор подобия G (1) является сжимающим в $L_p[0,1]$ в том и только том случае, когда справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,|d_k|^p < 1 \quad (1 \leqslant p < +\infty), \tag{2}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |d_k| < 1 \quad (p = +\infty). \tag{3}$$

Теорема 2 (1.1.2.). *Если справедливо неравенство* (2) *($1 \leqslant p < +\infty$), или* (3) *($p = +\infty$), то существует и единственна функция $f \in L_p[0,1]$, удовлетворяющая уравнению $G(f) = f$.*

Функции, заданные условием $G(f) = f$ с некоторым аффинным сжимающим оператором подобия G, будем называть аффинно-самоподобными или просто самоподобными. Числа $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$, $\{e_k\}$ и $\{\beta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ будем называть параметрами самоподобия.

Теорема 3 (1.1.5.). *Самоподобная функция, являющаяся неподвижной точкой сжимающего отображения, непрерывно зависит от параметров самоподобия, а именно, если $c_k \to c'_k$, $d_k \to d'_k$ и $\beta_k \to \beta'_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то $\|f - g\|_{L_p[0,1]} \to 0$.*

Исследование свойств непрерывных самоподобных функций опирается на следующую лемму

Лемма 1 (1.2.1.). *Значения $f(\alpha_k + 0)$ и $f(\alpha_k - 0)$ определяются следующим образом:*
I. $e_k = 0$, $e_{k-1} = 0$

$$f(\alpha_k + 0) = d_k f(0) + \beta_k; \quad f(\alpha_k - 0) = d_{k-1} f(1) + \beta_{k-1} + c_{k-1};$$

II. $e_k = 0$, $e_{k-1} = 1$

$$f(\alpha_k + 0) = d_k f(0) + \beta_k; \quad f(\alpha_k - 0) = d_{k-1} f(0) + \beta_{k-1};$$

III. $e_k = 1$, $e_{k-1} = 1$

$$f(\alpha_k + 0) = d_k f(1) + \beta_k + c_k; \quad f(\alpha_k - 0) = d_{k-1} f(0) + \beta_{k-1};$$

IV. $e_k = 1$, $e_{k-1} = 0$

$$f(\alpha_k + 0) = d_k f(1) + \beta_k + c_k; \quad f(\alpha_k - 0) = d_{k-1} f(1) + \beta_{k-1} + c_{k-1}.$$

На основании леммы 1 определим следующие числа

$$h_k := f(\alpha_k + 0) - f(\alpha_k - 0) = \\ = d_k f\left(\frac{1-(-1)^{e_k}}{2}\right) - d_{k-1} f\left(\frac{1+(-1)^{e_{k-1}}}{2}\right) + \\ + \beta_k - \beta_{k-1} + c_k \frac{1-(-1)^{e_k}}{2} - c_{k-1}\frac{1+(-1)^{e_{k-1}}}{2}.$$

Теорема 4 (1.2.1.). *Сжимающий оператор подобия G задает непрерывную функцию тогда и только тогда, когда выполнены два условия*

1)

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |d_k| < 1, \tag{4}$$

2) Все величины $h_k = 0$, $k = 2, \dots, n$.

Во многих приложениях представляют интерес самоподобные меры. Конструкция самоподобных функций является более общей. Неубывающие самоподобные функции с ограниченной вариацией порождают самоподобные меры.

Рассмотрим ограниченные самоподобные функции, нормированные условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. В этом случае $\beta_1 = 0$. Также удобно положить $\beta_{n+1} = 1$. Положим также $e_k = 1$, $k = 1, \dots, n$.

Теорема 5 (1.3.1.). *Чтобы самоподобная непрерывная слева ограниченная функция f была неубывающей, необходимо, чтобы для всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполнялись условия*

1) $c_k + d_k \geqslant 0$;

2) $\beta_k \leqslant \beta_{k+1}$;

3) $c_k + d_k + \beta_k \leqslant \beta_{k+1}$.

Чтобы самоподобная непрерывная слева ограниченная функция f была неубывающей, достаточно, чтобы для всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполнялись

1) $c_k \geqslant 0$, $d_k \geqslant 0$;

2) $\beta_k \leqslant \beta_{k+1}$;

3) $c_k + d_k + \beta_k \leqslant \beta_{k+1}$.

Теорема 6 (1.3.2.). *Самоподобная непрерывная функция f с параметрами самоподобия $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$, $\{\beta_k\}$, удовлетворяющая условиям $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $c_k = 0$ $k = 1, 2, \dots, n$, имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда $D \leqslant 1$.*

По непрерывной слева неубывающей функции f, имеющей ограниченную вариацию, определим меру μ_f следующим образом:

$$\mu_f([a,b)) = f(b) - f(a).$$

Эти меры будут самоподобными в смысле работы[27]при условии невырожденного самоподобия, а именно, если функция f непрерывна.

В связи с этим рассмотрим следующую классификацию самоподобных функций.

Особое место среди самоподобных функций занимают функции, для которых существуют параметры самоподобия со следующими свойствами:

1. среди чисел d_k, где $k = 1, \ldots, n$, не менее двух отличны от нуля;

2. среди чисел β_k, где $k = 1, \ldots, n$, по меньшей мере одно отлично от нуля.

Такие самоподобные функции будут называться *самоподобными функциями положительного спектрального порядка.* Смысл условия (2) состоит в исключении тривиального случая $f \equiv 0$.

Лемма 2 (1.4.1.). *Пусть f — самоподобная функция, и пусть n, a_k и d_k, где $k = 1, \ldots, n$, — её параметры самоподобия. Пусть при этом среди чисел d_k не менее двух отличны от нуля. Тогда существует и единственно положительное решение D уравнения*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \left|d_k\right|\right)^D = 1. \tag{5}$$

При этом $D < 1$.

Самоподобные по Хатчинсону меры μ_f порождаются непрерывными функциями f положительного спектрального порядка.

Как будет показано во второй главе, решение D уравнения (5) представляет собой порядок асимптотики спектра задачи колебания струны с весом, являющимся обобщенной производной самоподобной функции положительного спектрального порядка.

Далее в первой главе изучаются самоподобные функции нулевого спектрального порядка.

Заметим, что если для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнено $\beta_k = 0$, то оператор подобия G имеет только тривиальную неподвижную точку $f \equiv 0$, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

[27] Hutchinson J., *Fractals and Self-similarity*//Indiana University Math. J., **30** (1981), 713–741.

(B) среди чисел β_k, где $k = 1, \ldots, n$, по меньшей мере одно отлично от нуля.

Среди самоподобных функций, удовлетворяющих условию B, выделим следующие классы, для которых параметры самоподобия соответственно обладают свойствами:

(D_0) $d_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$;

(D_1) среди чисел d_k, где $k = 1, \ldots, n$, ровно одно отлично от нуля;

(D_2) среди чисел d_k, где $k = 1, \ldots, n$, не менее двух отличны от нуля;

Для самоподобных функций класса D_1 уравнение (5) имеет только тривиальное решение $D = 0$. В связи с этим дадим следующее

Определение 1. *Самоподобные функции класса D_1 будем называть самоподобными функциями нулевого спектрального порядка.*

Получены следующие результаты, касающиеся свойств самоподобных функций нулевого спектрального порядка.

Теорема 7 (1.4.1.). *Самоподобная функция нулевого спектрального порядка является кусочно-постоянной и принимает не более чем счётное число значений. Все точки разрыва являются точками разрыва 1-го рода, кроме, быть может, одной точки.*

Точку, указанную в теореме 7, будем называть особой. В случае, когда $e_{\hat{k}} = 0$, координаты этой точки можно вычислить по формуле

$$\hat{x} = \frac{\alpha_{\hat{k}}}{1 - a_{\hat{k}}}, \qquad (6)$$

где $\hat{k}$ — номер того единственного преобразования подобия, для которого $d_k \neq 0$.

Для самоподобной функции нулевого спектрального порядка можно сформулировать критерий монотонности в терминах параметров самоподобия (случай $e_{\hat{k}} = 0$).

Теорема 8 (1.4.3.). *Самоподобная функция $f \in D_1$ является неубывающей тогда и только тогда, когда её параметры самоподобия удовлетворяют условиям:*

1) $d_{\hat{k}} > 0$;

2) $\beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{\hat{k}-1} \leqslant d_{\hat{k}}\beta_1 + \beta_{\hat{k}} \leqslant d_{\hat{k}}\beta_n + \beta_{\hat{k}} \leqslant \beta_{\hat{k}+1} \ldots \leqslant \beta_n$ *при* $1 < \hat{k} < n$.

При $\hat{k} = n$ *условие 2) меняется на неравенства:*

$$\beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{n-1} \leqslant \beta_{n-1} \leqslant d_n\beta_1 + \beta_n.$$

При $\hat{k} = 1$ *условие 2) меняется на неравенства:*

$$d_1\beta_n + \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_n.$$

Чтобы функция f *не возрастала, неравенства 2) надо поменять на противоположные.*

В том случае, когда $e_{\hat{k}} = 1$, координата особой точки $\hat{x}$ вычисляется по формуле

$$\hat{x} = \frac{\alpha_{\hat{k}+1}}{1 + a_{\hat{k}}}. \tag{7}$$

Отметим, что в этом случае, независимо от значения $\hat{k}$ особая точка $\hat{x}$ не может совпасть с концами отрезка $[0, 1]$.

Формулы (6) и (7) можно объединить в одну:

$$\widehat{x} = \frac{\alpha_{\hat{k}+e_{\hat{k}}}}{1 - (-1)^{e_{\hat{k}}} a_{\hat{k}}}. \tag{8}$$

В случае, когда $e_{\hat{k}} = 1$, теорему 8 необходимо модифицировать.

Теорема 9 (1.5.1.). *Самоподобная функция* $f \in D_1$, *заданная таким оператором подобия, у которого* $\tilde{G}_{\hat{k}}$ *меняет ориентацию отрезка* $[\alpha_{\hat{k}}, \alpha_{\hat{k}+1}]$, *является неубывающей тогда и только тогда, когда её параметры самоподобия удовлетворяют условиям:*

1) $d_{\hat{k}} < 0$;

2) $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{\hat{k}-1} \leqslant d_{\hat{k}}\beta_n + \beta_{\hat{k}} \leqslant d_{\hat{k}}\beta_1 + \beta_{\hat{k}} \leqslant \beta_{\hat{k}+1} \ldots \leqslant \beta_n$ *при* $1 < \hat{k} < n$.

При $\hat{k} = n$ *условие 2) примет вид:* $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{n-1} \leqslant \beta_n$ *и* $\beta_{n-1} \leqslant d_n\beta_n + \beta_n$.

При $\hat{k} = 1$ *условие 2) примет вид:* $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{n-1} \leqslant \beta_n$ *и* $d_1\beta_1 + \beta_1 \leqslant \beta_2$.

С самоподобной неубывающей непрерывной слева функцией f, имеющей ограниченную вариацию, также можно связать меру

$$\mu([\zeta, \xi)) = f(\xi) - f(\zeta).$$

Так как такая мера не является самоподобной по Хатчинсону, будем говорить, что они обладают *вырожденным самоподобием.*

Для спектральных задач полезна также другая классификация самоподобных функций.

Определение 2. *Пусть функция $f \in L_2[0,1]$ такова, что для неё найдутся такие параметры самоподобия, что при некотором $\nu > 0$ будет справедливо условие*

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}\ \exists l_k \in \mathbb{N} \qquad (a_k\,|d_k|) \cdot (a_k\,|d_k| - e^{-l_k \nu}) = 0. \tag{9}$$

Тогда такой набор параметров самоподобия будет называться ***арифметически самоподобным****, а сама функция f —* ***арифметически самоподобной****. Если для некоторых параметров самоподобия число $\hat{\nu}$ является максимальным среди чисел ν со свойством (9), то такое число $\hat{\nu}$ будет называться* шагом *самоподобия функции f (или точнее, шагом самоподобия параметров самоподобия функции f).*

Функция $f \in L_2[0,1]$, для которой найдутся такие параметры самоподобия, что при любом $\nu > 0$ условие (9) будет нарушено, будет называться ***неарифметически самоподобной*** *функцией, а её параметры самоподобия — неарифметическими.*

В силу того, что линейные функции одновременно являются арифметически и неарифметически самоподобными, корректнее говорить об арифметичности или неарифметичности именно параметров самоподобия функции.

Арифметически самоподобные функции, в свою очередь, можно разделить на два класса, согласно следующему

Определение 3. *Пусть $f \in L_2[0,1]$ — арифметически самоподобная функция с шагом ν, имеющая положительный спектральный порядок D. Пусть при этом найдётся номер $k \leqslant n$, для которого выполнено одно из следующих условий:*

- *Справедливо неравенство $d_k > 0$, и отношение*

$$\frac{\ln(a_k\,|d_k|)}{\nu} \tag{10}$$

  нечётно.

- *Справедливо неравенство $d_k < 0$, и отношение (10) чётно.*

В этом случае функция f называется ***арифметически невырожденной*** *самоподобной функцией.*

Определение 4. *Пусть $f \in L_2[0,1]$ — арифметически самоподобная функция с шагом ν, имеющая положительный спектральный порядок D. Пусть при этом справедливы следующие условия*

- *Обобщённая производная $f' \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ функции f отлична от нуля.*
- *Для любого номера $k \leqslant n$ со свойством $d_k > 0$ отношение*

$$\frac{\ln(a_k\,|d_k|)}{\nu} \tag{11}$$

  является чётным.

- *Для любого номера $k \leqslant n$ со свойством $d_k < 0$ отношение (11) является нечётным.*

Тогда функция f называется ***арифметически вырожденной*** *самоподобной функцией.*

Глава 2. В этой главе получены асимптотические формулы считающей функции собственных значений для задачи Штурма–Лиувилля с самоподобным сингулярным весом. А именно, рассматривается задача

$$-y'' - \lambda\rho y = 0, \tag{12}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{13}$$

где ρ есть функция из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$, имеющая самоподобную первообразную $P \in L_2[0,1]$.

Через $\mathfrak{I}[y,z]$, где $y \in \mathfrak{H}'$ и $z \in \mathfrak{H}$, будет обозначаться полуторалинейная форма, являющаяся продолжением по непрерывности формы

$$\forall y \in L_2[0,1]\ \forall z \in \mathfrak{H} \qquad \mathfrak{I}[y,z] = \int\limits_0^1 y\overline{z}\,dx.$$

Как несложно проверить, любой функции $P \in L_2[0,1]$ можно поставить в соответствие однозначно определённую функцию $\rho \in \mathfrak{H}'$ со свойством

$$\forall y \in \mathfrak{H} \qquad \mathfrak{I}[\rho,y] = -\int\limits_0^1 P\overline{y'}\,dx.$$

Такая функция ρ будет называться *производной* от функции P. Легко проследить связь введённого определения с известным в теории обобщённых функций понятием обобщённой производной.

В соответствии с мультипликаторной трактовкой задач Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами (см., например, [28]), выберем в качестве операторной модели для задачи (12), (13) линейный пучок $T_\rho : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}'$ ограниченных операторов, удовлетворяющий тождеству

$$\forall\lambda \in \mathbb{C}\ \forall y, z \in \mathfrak{H} \qquad \mathfrak{I}[T_\rho(\lambda)y, z] = \int_0^1 y'\overline{z'}\, dx - \lambda \cdot \mathfrak{I}[\rho, \overline{y}z]. \tag{14}$$

В случае, когда вес ρ представляет собой производную функции $P \in L_2[0,1]$, последнее тождество переписывается в виде

$$\forall\lambda \in \mathbb{C}\ \forall y, z \in \mathfrak{H} \qquad \mathfrak{I}[T_\rho(\lambda)y, z] = \int_0^1 \left\{y'\overline{z'} + \lambda P \cdot (y'\overline{z} + y\overline{z'})\right\} dx. \tag{15}$$

Несложно убедиться, что в регулярном случае $\rho \in C[0,1]$ уравнение $T_\rho(\lambda)y = 0$ эквивалентно задаче (12), (13), понимаемой обычным образом. Очевидна также справедливость тождества

$$\forall y \in \mathfrak{H} \qquad \mathfrak{I}[T_\rho(0)y, y] = \|y\|^2_{\mathfrak{H}}. \tag{16}$$

Теорема 10 (2.1.1.). *Спектр пучка T_ρ чисто дискретен, и все его собственные значения являются простыми.*

Все собственные значения пучка T_ρ, расположенные правее нуля, имеют положительный тип, а все собственные значения пучка T_ρ, расположенные левее нуля, имеют отрицательный тип. Для любого $\lambda > 0$ число собственных значений пучка T_ρ, принадлежащих интервалу $(0, \lambda)$, совпадает с индексом инерции $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ оператора $T_\rho(\lambda)$. Аналогично, для любого $\lambda < 0$ число собственных значений пучка T_ρ, принадлежащих интервалу $(\lambda, 0)$, совпадает с индексом инерции $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ оператора $T_\rho(\lambda)$.

Определим считающие функции собственных значений задачи (12), (13)

$$N_\pm(\lambda) := \#\{\lambda_n \mid 0 < \pm\lambda_n \leqslant \lambda\}.$$

В случае арифметического самоподобия функции P ($\rho = P'$) справедлива следующая теорема.

---

[28] А. М. Савчук, А. А.,Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*//Труды Моск. матем. общества, **64**, 2003, 159–212.

Теорема 11 (2.2.2.). *Пусть $P \in L_2[0,1]$ — арифметически самоподобная функция с шагом ν, имеющая положительный спектральный порядок D. Пусть при этом найдётся номер $k \leqslant n$, для которого выполнено одно из следующих условий:*

- *Справедливо неравенство $d_k > 0$, и отношение*

$$\frac{\ln(a_k\,|d_k|)}{\nu} \tag{17}$$

нечётно.

- *Справедливо неравенство $d_k < 0$, и отношение* (17) *чётно.*

Тогда для пучка (15) *справедливы следующие утверждения.*

1. *Существуют такие непрерывные на $\mathbb{R}$ неотрицательные 1-периодические функции $s_\pm$, что при $\lambda \to \pm\infty$ справедливы асимптотические представления*

$$N_\pm(\lambda) = |\lambda|^D \left(s_\pm\left(\frac{\ln|\lambda|}{\nu}\right) + o(1)\right). \tag{18}$$

2. *Если при некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ имеют место неравенства $d_i < 0$, $d_j > 0$, то справедливо тождество*

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad s_+(t) = s_-(t). \tag{19}$$

3. *Если для некоторой функции $y \in \mathfrak{H}$ имеет место неравенство $\mathfrak{I}[\rho, |y|^2] > 0$, то функция s_+ положительна и отделена от нуля. Аналогично, если для некоторой функции $y \in \mathfrak{H}$ имеет место неравенство $\mathfrak{I}[\rho, |y|^2] < 0$, то функция s_- положительна и отделена от нуля.*

Теорема 12 (2.3.2.). *Пусть $P \in L_2[0,1]$ — неарифметически самоподобная функция, имеющая положительный спектральный порядок D. Пусть также $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ — обобщённая производная функции P. Тогда имеют место следующие факты:*

1. *существуют такие неотрицательные числа $s_\pm$, что при $\lambda \to \pm\infty$ справедливы асимптотические представления*

$$N_\pm(\lambda) = |\lambda|^D \cdot (s_\pm + o(1))\,;$$

2. *если при некотором $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место неравенство $d_i < 0$, то справедливо тождество $s_+ = s_-$;*

3. *если для некоторой функции $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ имеет место неравенство $\langle \rho, |y|^2 \rangle > 0$, то число s_+ положительно. Аналогично, если для некоторой функции $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ имеет место неравенство $\langle \rho, |y|^2 \rangle < 0$, то число s_- положительно.*

Теорема 13 (2.4.2.). *Пусть $P \in L_2[0,1]$ — арифметически самоподобная с шагом ν функция, имеющая положительный спектральный порядок D. Пусть при этом справедливы следующие условия:*

1. *обобщённая производная $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ функции P отлична от нуля;*

2. *для любого номера $k \leqslant n$ со свойством $d_k > 0$ отношение*
$$\frac{\ln (a_k\, |d_k|)}{\nu} \tag{20}$$
является чётным;

3. *для любого номера $k \leqslant n$ со свойством $d_k < 0$ отношение (20) является нечётным.*

Тогда существует такая непрерывная положительная 2-периодическая функция s, что при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое представление
$$N_+(\lambda) = \lambda^D \cdot \left(s\left(\frac{\ln \lambda}{\nu}\right) + o(1) \right),$$
а при $\lambda \to -\infty$ справедливо асимптотическое представление
$$N_-(\lambda) = |\lambda|^D \cdot \left(s\left(\frac{\ln |\lambda|}{\nu} - 1\right) + o(1) \right).$$

В § 2.5 задача 12, 13 рассматривается с дискретным самоподобным весом. В этом случае среди чисел $\{d_k\}$ ровно одно отлично от нуля. Через m мы будем обозначать тот индекс, для которого выполнено неравенство $d_m \neq 0$.

Техника, развитая при исследовании спектральной задачи 12, 13 с весом, являющимся обобщённой производной самоподобной функции положительного порядка, оказалась неприменима для дискретных самоподобных весов.

Рассмотрим величины ζ_k, где $k = 2, \dots n$, имеющие вид

$$\zeta_k := \begin{cases} \beta_m - \beta_{m-1} + d_m\beta_1 & \text{при } k = m, \\ \beta_{m+1} - \beta_m - d_m\beta_n & \text{при } k = m+1, \\ \beta_k - \beta_{k-1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим также через $\mathrm{Z}_\pm$ две величины

$$\mathrm{Z}_\pm := \#\{k \in [2, n] \mid \pm\zeta_k > 0\}.$$

В случае дискретного самоподобного веса установлены следующие три утверждения.

Теорема 14 (2.5.1.). *Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_+ > 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = n - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l = 1, \dots, \mathrm{Z}_+$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи* (12), (13) *удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+} = \mu_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Теорема 15 (2.5.2.). *Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_- > 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = n - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l = 1, \dots \mathrm{Z}_-$, для которых последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи* (12), (13) *удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+k\mathrm{Z}_-)} = -\mu_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Теорема 16 (2.5.3.). *Пусть выполняются соотношения $d_m < 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = n - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l = 1, \dots n - 1$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи* (12), (13) *удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{l+k(n-1)} = \mu_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k} \cdot (1 + o(1)),$$

а последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи (12), (13) *удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+\mathrm{Z}_-+k(n-1))} = -\mu_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k-1} \cdot (1 + o(1)).$$

Глава 3. В этой главе исследуются спектральные свойства дифференциальных операторов высокого порядка с сингулярным дискретным весом.

Точнее нас интересует асимптотическое поведение собственных значений следующий задачи

$$\lambda\mathcal{L}y = \mu y, \tag{21}$$

где μ — вероятностная самоподобная дискретная мера (или так называемая мера с *вырожденным самоподобием*, а $\mathcal{L}$ — самосопряжённый, положительно определённый оператор, порождаемый дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}y \equiv (-1)^\ell y^{(2\ell)} + \left(P_{\ell-1}y^{(\ell-1)}\right)^{(\ell-1)} + \ldots + P_0 y$$

с подходящими граничными условиями. Здесь $P_i \in L_1(0,1)$, $i = 0,\ldots,\ell-1$.

Техника, развитая при исследовании задачи (12), (13) с дискретным самоподобным весом, не переносится напрямую на дифференциальные выражения высокого порядка. Это потребовало достаточно тонкой работы с различными подпространствами в области определения оператора $\mathcal{L}$.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ энергетическое пространство оператора $\mathcal{L}$:

$$\mathfrak{H} = \overset{o}{W}{}_2^\ell(0,1); \qquad [y,y]_{\mathfrak{H}} = Q_{\mathfrak{L}}(y,y) = \int\limits_0^1 |y^{(\ell)}|^2.$$

Как и в § 2.5, индекс m обозначает номер того единственного преобразования, для которого $d_m \neq 0$.

Определим в $\mathfrak{H}$ подпространства

$$\begin{gathered}\mathfrak{H}_1 := \{y \in \mathfrak{H}:\ y(t) \equiv 0 \text{ при } t \in [\alpha_m, \alpha_{m+1}],\\ y(\alpha_k) = 0,\ k = 2,\ldots,n\};\\ \mathfrak{H}_2 := \{y \in \mathfrak{H}:\ y(t) \equiv 0 \text{ при } t \notin [\alpha_m, \alpha_{m+1}]\}.\end{gathered}$$

Пусть теперь $[\gamma_1,\gamma_2]$ — какой-нибудь отрезок, лежащий в интервале (α_m,α_{m+1}) и содержащий $\mathrm{supp}(\mu)\cap(\alpha_m,\alpha_{m+1})$. Можно, например, взять

$$\gamma_1 = \alpha_m + a_m a_{1+e_m(n-1)}; \qquad \gamma_2 = \alpha_{m+1} - a_m a_{n-e_m(n-1)}.$$

Нам понадобится подпространство $\widehat{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{H}$, состоящее из полиномиальных сплайнов порядка 2ℓ с $n+3$ узлами α_k, $k = 1,\ldots,n+1$, γ_1 и γ_2, тождественно равных нулю на $[\gamma_1, \gamma_2]$ и имеющих в узлах α_m, α_{m+1}, γ_1 и γ_2 непрерывные производные до порядка $\ell - 1$, а в остальных узлах — до порядка $2\ell - 2$. Легко видеть, что $\dim \widehat{\mathfrak{H}} = n - 1 + \Delta$, где

$$\Delta = 2(\ell - 1) \quad \text{при} \quad m \neq 1, n;$$
$$\Delta = \ell - 1 \quad \text{при} \quad m = 1 \quad \text{или} \quad m = n.$$

Несложно также проверить, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus (\mathfrak{H}_2 \dot{+} \widehat{\mathfrak{H}})$.

Разложим в свою очередь пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$ в ортогональную сумму подпространств $\widehat{\mathfrak{H}} = \widehat{\mathfrak{H}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{H}}_2$, где

$$\widehat{\mathfrak{H}}_1 = \{y \in \widehat{\mathfrak{H}} : y(\alpha_k) = 0, \quad k = 2, \ldots, n\}.$$

Легко видеть, что

$$\dim \widehat{\mathfrak{H}}_1 = \Delta; \qquad \dim \widehat{\mathfrak{H}}_2 = n - 1. \tag{22}$$

Квадратичная форма $\int_0^1 |y(t)|^2 d\mu(t)$ определяет на $\mathfrak{H}$ компактный самосопряженный оператор $\mathcal{A}$, собственные числа которого, естественно, совпадают с $\lambda_j^{(\mathfrak{L}_\mu)}$.

Асимптотические формулы для собственных значений получены с помощью следующего блочно-операторного представления задачи (21).

Через $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ соответственно обозначим сужения оператора $\mathcal{A}$ на подпространства $\mathfrak{H}_2$ и $\widehat{\mathfrak{H}}_2$ (очевидно, в силу свойств самоподобной меры μ, сужение этого оператора на $\mathfrak{H}_1$ и $\widehat{\mathfrak{H}}_1$ тривиально). Тогда задача (21) при разложении пространства $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus (\mathfrak{H}_2 \dot{+} (\widehat{\mathfrak{H}}_1 \oplus \widehat{\mathfrak{H}}_2))$ представляется в матричном виде так:

$$\lambda \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{P}_1^* & \mathcal{P}_2^* \\ 0 & \mathcal{P}_1 & I & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_2 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где $u \in \mathfrak{H}_1$, $x \in \mathfrak{H}_2$, $y \in \widehat{\mathfrak{H}}_1$, $z \in \widehat{\mathfrak{H}}_2$, а $\mathcal{P}_i$ — ортопроекторы $\mathfrak{H}_2 \to \widehat{\mathfrak{H}}_i$, $i = 1, 2$.

Отсюда следует, что асимптотику функции $N_{\mathcal{A}}(\lambda)$ можно получить, рассматривая задачу (21) только на пространстве $\mathfrak{H}_2 \dot{+} \widehat{\mathfrak{H}}_2$.

В обозначениях главы 2 (§ 2.5) справедлива

Теорема 17 (3.2.1.). *Для заданной вероятностной меры μ с вырожденным самоподобием имеем*

$$N_{\mathcal{L}_\mu}(\lambda) \sim (n-1) \frac{\ln(\frac{1}{\lambda})}{\ln(q)}, \qquad \lambda \to +0, \tag{24}$$

где $q = \dfrac{1}{d_m \cdot a_m^{2\ell-1}} > 1.$

Глава 4. В последней главе получены асимптотические формулы для собственных значений оператора Якоби, заданного трёхдиагональной матрицей с экспоненциально растущими матричными элементами.

Исследуется задача на собственные значения трёхдиагональной якобиевой матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \gamma & \alpha q & \beta q & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \gamma q & \alpha q^2 & \beta q^2 & \dots & 0 & \dots \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma q^{n-1} & \alpha q^n & \beta q^n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $q > 1$.

Пусть функция P является неподвижной точкой отображения G, заданного формулой

$$G(f)(x) = \beta_1 \cdot \chi_{[0,1-a)}(x) + \left(d \cdot f\left(\frac{x-1+a}{a}\right) + \beta_2 \right) \cdot \chi_{(1-a,1]}(x), \tag{26}$$

где β_1, β_2 — произвольные действительные числа. Условие $ad^2 < 1$ гарантирует сжимаемость оператора G в $L_2[0,1]$.

Определим $q = \dfrac{1}{ad}$. Из условия сжимаемости оператора G следует, что $|q| > 1$.

Показано, что задача (12), (13) с весом ρ, являющимся обобщённой производной указанной функции P, сводится к задаче вида

$$As = \lambda r B s,$$

рассматриваемой в пространстве последовательностей $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} s_k^2 < \infty$ и удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} s_k = 0. \tag{27}$$

Операторы A и B определяются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ d & da & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ d^2 & d^2a & (da)^2 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots \\ d^{k-1} & d^{k-1}a & d^{k-1}a^2 & \dots & (da)^{k-1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

При этом положено

$$r = (1-a)(d\beta_1 + \beta_2 - \beta_1.$$

Рассмотрим вещественное число $w \neq 0$. Обозначим пространство последовательностей $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} w^{k-1} v_k^2 < \infty,$$

через $l_{2,w}$. Скалярное произведение в этом пространстве определяется как $\langle v_k, u_k \rangle_w := \sum_{k=1}^{\infty} w^{k-1} v_k u_k$. Если $w > 0$, то пространство $l_{2,w}$ гильбертово, если $w < 0$, то скалярное произведение индефинитно и, соответственно, пространство $l_{2,w}$ является пространством Крейна.

Определим в пространстве $l_{2,w}$ оператор L, заданный матрицей AB^{-1}. Область определения оператора L задаётся соотношениями

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{d^{k-1}} \left(-dq^{k-1}u_{k-1} + (1+dq)q^{k-1}u_k + q^k u_{k+1}\right)^2 < \infty \qquad (28)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{d^{n-1}} = 0. \qquad (29)$$

Если $w > 0$, то оператор L является самосопряжённым. При условии $w < 0$, оператор L является J-самосопряжённым, где $J = P_+ - P_-$, а операторы ортогонального проектирования P_+, P_- определены в пространстве $l_{2,1/d}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} P_+ : e_k \to e_k, \quad k = 1, 3, \ldots, 2n-1, \ldots, \\ P_+ : e_k \to 0, \quad k = 2, 4, \ldots, 2n, \ldots; \\ P_- : e_k \to 0, \quad k = 1, 3, \ldots, 2n-1, \ldots, \\ P_- : e_k \to e_k, \quad k = 2, 4, \ldots, 2n, \ldots n \in \mathbb{N}. \end{gathered}$$

Теорема 18 (4.3.1.). *Спектральная задача*

$$As = \lambda r B s$$

в пространстве последовательностей $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, *таких, что* $\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} s_k^2 < \infty$ *и удовлетворяющих условию* (27) *эквивалента задаче*

$$Lu = \lambda r u$$

в пространстве $l_{2,1/d}$ *с условием* (28), (29) *на последовательность* $u = (u_1, u_2, \ldots)$, *где* $u = Bs$.

Матрица оператора L имеет вид (25), её элементы заданы соотношениями $\alpha = 1 + dq = 1 + \dfrac{1}{a}$, $\beta = -q$, $\gamma = -dq = -\dfrac{1}{a}$.

Теорема 19 (4.3.2.). *Пусть* $d > 0$. *Существует такое положительное число* c, *что для собственных значений оператора* L, *занумерованных в порядке возрастания, справедлива асимптотическая формула при* $k \to \infty$

$$\lambda_k = cq^k (1 + o(1)). \tag{30}$$

Теорема 20 (4.3.3.). *Пусть* $d < 0$. *Тогда существует такое число* $c > 0$, *что для положительных собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *оператора* L, *занумерованных в порядке возрастания, справедлива асимптотическая формула*

$$\lambda_{k+1} = cq^{2k}(1 + o(1)),$$

а для отрицательных собственных значений $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ *оператора* L, *занумерованных в порядке возрастания, справедлива асимптотическая формула*

$$\lambda_{-(k+1)} = -cq^{2k+1}(1 + o(1)).$$

В заключение автор выражает благодарность профессору Андрею Андреевичу Шкаликову за полезные советы и постоянное внимание к работе, профессору Александру Ильичу Назарову и Антону Алексеевичу Владимирову за полезные обсуждения.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

(Из официального перечня ВАК).

1. И. А. Шейпак, *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах* $L_p[0,1]$//Матем. заметки, **81**:6, 2007, 924–938.

2. И. А. Шейпак, *Особые точки самоподобной функции нулевого спектрального порядка. Самоподобная струна Стилтьеса*, Матем. заметки, **88**:2, 2010, N2, 303–316.

3. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Самоподобные функции в пространстве* $L_2[0,1]$ *и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным весом*// Матем. сборник, т.197(11), 2006, 13–30. (И. А. Шейпаку принадлежит параграф 3, пункт 5.1 §5, А. А. Владимирову принадлежат теоремы 2.1, 2.2 параграфа 2, §4 и пункт 5.2 §5).

4. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов* Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова, т. 255, 2006, 88–98 (А. А. Владимирову принадлежат теорема 2.1, теорема 4.1, Шейпаку Игорю Анатольевичу принадлежат остальные результаты.).

5. И. А. Шейпак *Нетривиальные фракталы на плоскости и линейные операторы с совместным спектральным радиусом единица*//Матем. заметки, 1998, т.63, вып.5, с. 797–800.

6. Шейпак И. А., *Спектральный анализ несимметрично-возмущенного течения Куэтта и связанные с ним вопросы гидродинамической устойчивости*//Математические заметки, 1995, т. 57 вып. 2, 278–282.

7. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак *Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом*//Матем. заметки, 2010, т. 88, вып. 5, 662–672. (И А. Шейпаку принадлежит параграф 2 и основная идея получения результатов §§3-4, А. А. Владимирову принадлежит теорема 4.1 §4).

8. Nazarov A. I., Sheipak I. A., *Degenerate self-similar measures, spectral asymptotics and small ball deviations of gaussian processes*//Bulletin of the London Mathematical Society, 44 (2012) 12–24; (doi:10.1112/blms/bdr056). (И. А. Шейпаку принадлежит параграф 2 и часть доказательства теоремы 3.1 §3, А. И. Назарову принадлежат доказательство неравенств (3.10), (3.11) §3; параграфы 1, 4 и приложение).

9. И. А. Шейпак, *О спектре оператора Якоби с экспоненциально растущими матричными элементами*//Вестник МГУ, Серия 1. Математика. Механика (2011), N.6, 16–21.

10. Шейпак И. А., *О базисных свойствах системы корневых векторов оператора, близкого к самосопряженному в пространстве Понтрягина*//Математические заметки, 1995, т. 57, вып. 6, 937–940.

11. Н. В. Гаганов, И. А. Шейпак, *Критерий ограниченности вариации самоподобных функций*// Сибирский математический журнал, Январь, февраль, 2012, т. 53, №1, 68–88. (И. А. Шейпаку принадлежат параграфы 1,2,3 и 5, Н. В. Гаганову принадлежит §4).

12. Шейпак И. А., *О базисных свойствах системы собственных функций одной задачи гидродинамики*//Математические заметки, 1995, т. 58, вып. 5, 790–794.

(Примыкающие к основным публикациям).

13. И. А. Шейпак *Нетривиальные фракталы и операторы с совместным единичным спектральным радиусом*//Успехи матем. наук, 1998, т.53, вып.4, 201.

14. Sheipak I. A., *On the spectrum of some class of Jacobi operators in a Krein space*//Operator Theory: Advances and Applications, 2012, Vol. 221, 619–628, Springer Basel AG.

15. Шейпак И. А., *К теории устойчивости движения жидкости в кольцевом канале в присутствии магнитного поля и связанные спектральные задачи*// Фундаментальная и прикладная математика 2001, т. 7, вып. 2, 583–596.

16. Sheipak I. A., *Fractal invariant sets and linear operators with joint spectral radius which is equal to one*//Proceedings of VII Crimean Autumn

Mathematical School-Symposium on Spectral and evolutionary problems, Simferopol, Crimea, 1998, vol. 8, Taurida National V.Vernadsky University Publishers

17. И. А. Шейпак, *Критерии ограниченности вариации самоподобных функций*//Материалы 15-й Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложений», СГУ, 2010,188.

18. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак *О двух случаях самоподобия функций в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма-Лиувилля с сингулярным индефинитным весом*//Тезисы докладов Международной конференции «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященная столетию С. М. Никольского, Москва, 2005, 70. (И. А. Шейпаку принадлежит основная идея построения самоподобных функций, лемма 1, лемма 2, А. А. Владимирову — теоремы 3 и 4).

19. Sheipak I. A., *Indefinite Sturm–Liouville operators with singular self-similar weights*// Proceedings of 6 Workshop on Operator Theory in Krein Spaces and Differential Equations, Berlin, 2006, Technische Universität Berlin Publisher, 23.

20. Sheipak I. A., *Асимптотика собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с дискретным самоподобным весом*// Proceedings of 7 Workshop on Operator Theory in Krein Spaces and Differential Equations, Berlin, Technische Universität Berlin Publishers, 2007, 19.

21. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак *О собственных частотах колебания струны с точечным распределением масс*//Тезисы Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы посвященная 106-летию со дня рождения И.Г.Петровского. Сборник тезисов, Москва, 2007, 331. (И А. Шейпаку принадлежит основная идея доказательства теоремы 1).

22. И. А. Шейпак *О спектре задачи Штурма-Лиувилля с дискретным индефинитным весом*// Материалы Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XIX Воронеж, 2008, с. 63-64.

23. Sheipak I. A., *On spectrum of operator Jacobi with exponentially increasing matrix elements*//Proceedings of 8 Workshop on Operator Theory in Krein

Spaces and Differential Equations, Berlin, 2008 (международная конференция), Technische Universität Berlin Publishers, 2008, 22.

Из совместных работ в диссертацию включены только результаты автора.