МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

УДК 512.81

ШАПИРО Александр Михайлович

КВАНТОВЫЕ АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ И ЯНГИАНЫ

Специальность 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2012

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Хорошкин Сергей Михайлович доктор физико-математических наук, профессор Зайцев Михаил Владимирович
Официальные оппоненты:	Неретин Юрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и экспериментальной физики имени А. И. Алиханова, старший научный сотрудник Пакуляк Станислав Здиславович, доктор физико-математических наук, Учебно-научный центр Объединенного института ядерных исследований, директор
Ведущая организация:	Математического института имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 28 сентября 2012 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 28 августа 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению алгебраической структуры и теории представлений некоторых квантовых аффинных алгебр и янгианов. Оба типа исследуемых объектов являются квазитреугольными алгебрами Хопфа. Иными словами, оба типа алгебр допускают реализацию, в которой их образующие собраны в матричнозначные производящие функции, удовлетворяющие уравнению Янга-Бакстера. Квазитреугольные алгебры Хопфа активно изучались, начиная с 1970-х годов XX века, после того, как Бакстер, [1,2] используя теорию представлений квантового варианта аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, вывел нетривиальное обобщение анзатца Бете [3] и успешно использовал его для решения задач квантовой и статистической физики.

В первой главе диссертации изучается скрученная квантовая аффинная алгебра $U_q(A_2^{(2)})$. Впервые алгебра $U_q(A_2^{(2)})$ появилась в физических работах [4] в качестве группы симметрий квантовой версии модели Шабата-Михайлова, также известной под именем модели Изергина-Корепина. Позднее [5,6] на алгебру $U_q(A_2^{(2)})$ была распространена техника Бете-анзатца. Классификация [7] конечно-мерных представлений алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ была получена Чари и Пресли. Кроме того, в работах Динга, Толстого и Хорошкина [8,9] были изучены различные описания алгебры $U_q(A_2^{(2)})$, структуры алгебры Хопфа и связи между ними.

---

[1] R. Baxter, *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Phys. **70** (1972), 193—228.

[2] R. Baxter, *One-dimensional anisotropic Heisenberg chain, Ann. Phys.* **70** (1972), 323—337.

[3] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette,* Zeitschrift fur Physik **71**: 3—4 (1931), 205—226.

[4] A. Izergin, V. Korepin. *The inverse scattering method approach to the quantum Shabat-Mikhailov model.* Comm. Math. Phys. **79** (1981), No.3, 303–316.

[5] V. Tarasov. *Algebraic Bethe ansatz for the Izergin-Korepin R-matrix.* Theor. and Math. Phys. **76** (1988), No.2, 793-803.

[6] D. Fioravanti, M. Stanishkov, F. Ravanini. *Generalized KdV and Quantum Inverse Scattering description of Conformal Minimal Models. Phys. Lett. B.* 367 (1996), 113–120.

[7] V. Chari, A. Pressley. *Twisted quantum affine algebras.* Comm. Math. Phys. **198** (1998), No.2, 461–476.

[8] J. Ding, S. Khoroshkin. *Universal R-matrix for quantum affine algebras $U_q(A_2^{(2)})$ and $U_q(\widehat{osp}(1|2))$ with Drinfeld comultiplication.* Adv. in Math. **189** (2004), 413–438.

[9] S. Khoroshkin, V. Tolstoy. *The uniqueness theorem for the universal R-matrix.* Let. Math. Phys **24** (1992), No.3, 231–244.

Квантовые аффинные алгебры допускают три различные реализации с разными структурами алгебр Хопфа. Считается общеизвестным, что все три реализации изоморфны, однако точные доказательства [10,11,12] существуют лишь для алгебр $\mathfrak{gl}_n$-серии. В первой главе диссертации дается полное описание трех реализаций алгебры $U_q(A_2^{(2)})$, описываются изоморфизмы между всеми реализациями и связи между тремя структурами алгебры Хопфа.

Далее в первой главе диссертации вычислена универсальная весовая функция для алгебры $U_q(A_2^{(2)})$. Универсальной весовой функцией квантовой аффинной алгебры называют семейство функций со значениями в борелевской подалгебре, удовлетворяющее определенным коалгебраическим соотношениям. Это семейство используется как для построения решений q-разностных уравнений Книжника-Замолодчикова [13] так и для построения собственных векторов Бете в процедуре Бете-анзатца. [14] Также в диссертации получены интегральные формулы для сомножителей универсальной R-матрицы алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ — элемента тензорного квадрата алгебры, играющего ключевую роль в ее описании и связывающего различные структуры алгебры Хопфа.

Вторая глава диссертации посвящена конечномерным представлениям янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$. Янгиан $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ является деформацией в классе алгебр Хопфа универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли полиномиальных функций $\mathfrak{gl}_n[u]$ на прямой со значением в $\mathfrak{gl}_n$. Его неприводимые конечномерные представления классифицированы, [15] причем, параметрами классификации являются наборы “полиномов Дринфельда”. Известно

[10] J. Ding, I. Frenkel, *Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}(n)})$*, Comm. Math. Phys. **156** (1993), No.2, 212–216.

[11] J. Ding, S. Khoroshkin, *On the FRTS approach to quantized current algebras*, Lett. Math. Phys. **45** (1998), No.4, 331–352.

[12] E. Frenkel, E. Mukhin, *The Hopf algebra Rep $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty)$*, Selecta Math. **8** (2002), No. 4, 537-635.

[13] V. Tarasov, A. Varchenko, *Jackson integral representations for solutions to the quantized KZ equation*, Algebra and Analysis **6** (1994), No.2, 275–313.

[14] P. Kulish, N. Reshetikhin, *Diagonalization of $GL(N)$ invariant transfer matrices and quantum N-wave system (Lee model)*, J.Phys. A: Math. Gen. **16** (1983), 591-596.

[15] V. Drinfeld, *A new realization of Yangians and quantum affine algebras*, Sov. Math. Dokl. **36** (1988), 212–216.

несколько конструкций [16,17] неприводимых представлений в виде факторов тензорных произведений некоторых стандартных представлений. Назовем представление янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ *полиномиальным*, если оно изоморфно подфактору тензорного произведения векторных представлений $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$, и *рациональным*, если оно изоморфно подфактору тензорного произведения векторных и ковекторных представлений $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$. Рациональные представления янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$, связанные с косыми диаграммами Юнга, изучались Назаровым. [18] Кроме того, в работах Хорошкина и Назарова [19] были построены неприводимые полиномиальные представления янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ и его скрученных аналогов, соответствующих ортогональной и симплектической группе. Это построение, объединяющее идеи “централизаторной конструкции” Ольшанского и двойственность Хау, можно рассматривать как поднятие $(\mathfrak{k}, \mathfrak{g})$-двойствености Хау, где $(\mathfrak{k}, \mathfrak{g})$ — пара Хау классических алгебр Ли, до функтора между теориями представлений алгебры Ли $\mathfrak{k}$ и (скрученного) янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{g})$. В диссертации ставится задача описания и естественной конструкции неприводимых рациональных представлений янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$.

Цель работы. Полное описание трех реализаций скрученной квантовой аффинной алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ и связей между ними, вычисление универсальной весовой функции для алгебры $U_q(A_2^{(2)})$, описание и конструкция неприводимых рациональных представлений янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Получены явные изоморфизмы между тремя реализациями алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ и описаны связи между тремя структурами алгебры Хопфа.

2. Найдена явная формула для универсальной весовой функции алгебры $U_q(A_2^{(2)})$, получены интегральные формулы для сомножителей универсальной R-матрицы алгебры.

---

[16] T. Akasaka, M. Kashiwara, *Finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997), 839–867.

[17] V. Chari, A. Pressley, *Fundamental representations of Yangians and singularities of $\mathcal{R}$-matrices*, J. Reine Angew. Math. **417** (1991), 87–128.

[18] M. Nazarov, *Rational representations of Yangians associated with skew Young diagrams*, Math. Z. **247** (2004), 21–63.

[19] S. Khoroshkin, M. Nazarov, *Mickelsson algebras and Representations of Yangians*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), No.3, 1293–1367.

3. Построена серия рациональных представлений янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ и сплетающие операторы между ними. При определенных условиях на представления, их образы, относительно фиксированного сплетающего оператора, являются неприводимыми. Сформулирована гипотеза о том, что все рациональные представления могут быть получены таким образом.

Методы исследования. В работе используются различные методы теории квантовых групп и теории представлений. В первой главе основную роль играет метод проекций, предложенный в работе Пакуляка, Хорошкина и Энрикеса. Во второй главе ключевую роль играет построенный функтор из категории $\mathfrak{u}_{p,q}$-модулей со старшим весом в категорию $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$-модулей. Этот функтор является модификацией функтора, описанного Назаровым и Хорошкиным. Также во второй главе для описания сплетающих операторов между построенными $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$-модулями использована теория редукционных алгебр и теория сплетающих операторов Желобенко. [20,21]

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут найти применение в теории представлений и теории квантовых групп.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались:

На семинаре по теории представлений, МГУ, Москва, руководитель — д.ф.-м.н., проф. Ю.А. Неретин в 2010 г.;

На семинаре «Избранные вопросы алгебры», МГУ, Москва, руководитель — д.ф.-м.н., проф. М. В. Зайцев в 2011 г.;

На международной конференции "Workshop on Geometric Methods in Mathematical Physics II", SISSA, Триест, в 2009 г.;

На международной конференции "Journee Quantique des Jeunes Chercheurs", Université d'Angers, Angers, в 2010 г.;

На международной конференции "Representation Theory, Geometry, and Combinatorics Conference", UC Berkeley, Berkeley, в 2011 г.;

[20] D. Zhelobenko, *Extremal cocycles on Weyl groups*, Funct. Anal. Appl. **21** (1987), 183–192.

[21] D. Zhelobenko, *Extremal cocycles and generalized Mickelsson algebras over reductive Lie algebras*, Math. USSR Izvestiya **33** (1989), 85–100.

На международной конференции “AMS Sectional Meeting”, University of Nebraska, Lincoln, в 2011 г.;

На семинаре “Infinite-Dimensional Algebra Seminar”, MIT, Бостон, руководитель — проф. В. Кац в 2010 г.;

На семинаре “Representation Theory, Combinatorics and Geometry”, UC Berkeley, Berkeley, руководитель — проф. Н. Решетихин в 2010 г.;

На семинаре “Séminaire Quant X - Paris 7”, Université Paris 7, Paris, руководитель — проф. P. Cartier в 2010 г.;

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в трех статьях в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата [1–3].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и двух глав. Текст диссертации изложен на 102 страницах. Список литературы содержит 46 наименований.

Содержание работы

Во введении описана история рассматриваемой проблемы, изложено содержание диссертационной работы, кратко описаны основные результаты и методы их получения.

В первой главе речь идет об алгебраической структуре квантовой аффинной алгебры $U_q(A_2^{(2)})$, являющейся деформацией алгебры скрученных токов со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_3$.

Как и любая квантовая аффинная алгебра, алгебра $U_q(A_2^{(2)})$ допускает различные описания. Наиболее известно определение, предложенное Дринфельдом и Джимбо, в которой алгебра задана образующими Шевалле $e_{\pm\alpha}$ и $k_\alpha^{\pm 1}$, где α пробегает множество простых корней алгебры $A_2^{(2)}$, и q-аналогами соотношений Серра. В так называемой “новой реализации” Дринфельда алгебра задается бесконечным числом образующих, объединенных в производящие функции (“токи”)

$$e(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n z^{-n}, \qquad f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n z^{-n},$$

$$K^{\pm}(z) = k^{\pm 1} \exp\left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{n>0} a_{\pm n} z^{\mp n}\right),$$

и функциональными соотношениями между ними. Наконец, можно воспользоваться формализмом уравнений Янга-Бакстера на матричнозначную производящую функцию $L(z)$ (L-оператор), развитым в школе Л. Д. Фаддеева. В качестве R-матрицы выступает решение уравнения Янга-Бакстера, изученное в свое время Изергиным и Корепиным. В первом параграфе настоящей диссертации приводится полное описание трех реализаций алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ и соответствующих структур алгебр Хопфа.

Считается общеизвестным, что все три реализации изоморфны, однако точные доказательства существуют лишь для алгебр $\mathfrak{gl}_n$-серии. Во втором параграфе построены явные изоморфизмы между тремя реализациями алгебры $U_q(A_2^{(2)})$, и описаны связи между различными структурами алгебр Хопфа. Изоморфизм между "стандартной" реализацией Дринфельда-Джимбо и "новой реализацией" Дринфельда описан в Теореме 2.2. Для этого, стартуя с образующих Шевалле в "стандартной" реализации, построен линейный базис алгебры — базис Картана-Вейля — и показано, как связаны элементы этого базиса с образующими "новой реализации" Дринфельда. Далее во втором параграфе найдено дополнительное соотношение на L-оператор, которое вместе с уравнениями Янга-Бакстера полностью описывает изучаемую квантовую аффинную алгебру, получен полный набор соотношений на гауссовы координаты L-оператора, и, в конечном итоге, установлены изоморфизмы между абстрактной алгеброй, заданной матричными элементами L-оператора, и квантовой аффинной алгеброй $U_q(A_2^{(2)})$ в "стандартной" реализации (Теорема 2.5) и "новой" реализации Дринфельда (Теорема 2.8). Попутно в предложениях 2.4 и 2.6 устанавливается связь между тремя коумножениями, естественными для трех разных реализаций.

Универсальной весовой функцией квантовой аффинной алгебры называют семейство функций со значениями в борелевской подалгебре, удовлетворяющее определенным коалгебраическим соотношениям. Это семейство используется как для построения решений q-разностных уравнений Книжника-Замолодчикова, так и для построения собственных векторов Бете в процедуре Бете-анзатца. Для вычисления универсальной весовой функции в настоящей диссертации использован метод проекций, предложенный в работе [22] Пакуляка, Хорошкина и Энрикеса. Суть метода со-

[22] B. Enriquez, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *Weight functions and Drinfeld currents*, Comm. Math. Phys. **276** (2007), No.3, 691–725.

стоит в построении набора элементов квантовой аффинной алгебры, для которых две различные коалгебраические структуры, возникшие из двух разных реализаций квантовой аффинной алгебры, совпадают при действии на старшие векторы представлений. Эти наборы, и составляющие универсальную весовую функцию, могут быть получены в результате применения некоторых канонических проекционных операторов к произведениям дринфельдовских "токов":

$$W(z_1, \ldots, z_k) = P(f(z_1) \ldots f(z_k)).$$

Упомянутые канонические проекционные операторы отображают борелевскую подалгебру квантовой аффинной алгебры на ее пересечение с борелевской подалгеброй иного типа, возникающего в "новой" реализации. В третьем параграфе описаны борелевские подалгебры, соответствующие "стандартной" и "новой" реализации", также описаны пересечения борелевских подалгебр и операторы проекций. Далее в третьем параграфе определена универсальная весовая функция для алгебры $U_q(A_2^{(2)})$.

Вычисление весовой функции для квантовой аффинной алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ проведено в диссертации методами комплексного анализа, основанными на аналитических свойствах матричных коэффициентов "токов" в представлениях со старшим весом. При этом естественным образом возникает еще одна пара производящих функций элементов алгебры $U_q(A_2^{(2)})$, соответствующая составному корню алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3$. Эти производящие функции также называют "сложными токами". Универсальная весовая функция выражается через произведения различных "токов" с рациональными функциональными коэффициентами. В четвертом параграфе описаны "сложные токи" и аналитические свойства произведений "токов". Здесь речь идет о наличии нулей и полюсов произведений "токов", рассматриваемых в качестве мероморфных операторнозначных функций на левых $U_q(A_2^{(2)})$-модулях старшего веса.

В пятом параграфе диссертации сформулированы основные результаты первой главы. В Теоремах 5.2 и 5.4 вычислены образы двух из четырех канонических проекционных операторов на произведении токов $f(z_1) \ldots f(z_k)$. Образы двух оставшихся операторов получены применением инволюции алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ к результатам указанных теорем. Вычисленные проекции дают формулу для универсальной весовой функции и интегральные формулы для сомножителей универсальной $\mathcal{R}$-матрицы алгебры $U_q(A_2^{(2)})$.

Параграфы 6 и 7 носят технический характер. В параграфе 6 приведены примеры формулы, вычисляющей проекцию произведения “токов” $f(z_1)\dots f(z_k)$, для $k = 2, 3, 4$. Это имеет определенный смысл в виду сложности формулы для общего значения k. В параграфе 7 приведены доказательства основных теорем первой главы, доказательства достаточно техничны и, в основном, опираются на методы комплексного анализа.

Вторая глава диссертации посвящена теории представлений янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ алгебры Ли невырожденных комплексных матриц n-го порядка. Янгиан $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ является деформацией в классе алгебр Хопфа универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли полиномиальных функций $\mathfrak{gl}_n[u]$ на прямой со значениями в $\mathfrak{gl}_n$. Ассоциативная алгебра с единицей $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ порождена семейством образующих

$$T_{ij}^{(1)}, T_{ij}^{(2)}, \dots \quad \text{где} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим производящие функции

$$T_{ij}(u) = \delta_{ij} + T_{ij}^{(1)}u^{-1} + T_{ij}^{(2)}u^{-2} + \dots \in \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]]$$

с формальным параметром u. Тогда определяющие соотношения в ассоциативной алгебре $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ могут быть записаны в виде

$$(u-v)\cdot[T_{ij}(u), T_{kl}(v)] = T_{kj}(u)T_{il}(v) - T_{kj}(v)T_{il}(u),$$

где $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Легко видеть, что для любого степенного ряда $g(u)$ по u^{-1} с комплексными коэффициентами и единичным первым членом, отображение

$$T_{ij}(u) \mapsto g(u)T_{ij}(u)$$

задает автоморфизм алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$.

Неприводимые конечномерные представления янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$, рассмотренные с точностью до действия описанного выше автоморфизма, были классифицированы Дринфельдом. Параметрами классификации являются наборы так называемых “полиномов Дринфельда”. Известны несколько конструкций неприводимых представлений в виде факторов тензорных произведений некоторых стандартных представлений. Назовем представление янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ *полиномиальным*, если оно изоморфно подфактору тензорного произведения векторных представлений $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$, и *рациональным*, если оно изоморфно подфактору тензорного произведения векторных и ковекторных представлений $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$. В диссертации ставится задача описания и естественной конструкции неприводимых рациональных представлений янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$. Для этого использована конструкции, разработанная Назаровым и Хорошкиным для построения неприводимых полиномиальных представлений янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ и его скрученных аналогов, соответствующих ортогональной и симплектической группе.

В работах Назарова и Хорошкина был построен функтор $\mathcal{E}_m$ из категории $\mathfrak{gl}_m$-модулей со старшим весом в категорию $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$-модулей. Этот функтор возник как композиция ранее известных функторов Дринфельда [23] и Чередника [24]. В 8 параграфе настоящей диссертации описана структура алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$, приведены необходимые сведения из ее теории представлений, а также построена модификация $\mathcal{E}_{p,q}$ функтора $\mathcal{E}_m$, основанная на $(\mathrm{U}_{p,q},\, \mathfrak{gl}_n)$ двойственности Хау.

В параграфе 9 доказывается теорема о параболической индукции, которая, в частности, позволяет свести рассмотрение всего образа функтора $\mathcal{E}_{p,q}$ к изучению тензорных произведений некоторых стандартных представлений янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$. Пусть U — произвольный модуль над алгеброй $\mathfrak{gl}_l$, причем $l = l_1 + l_2$, тогда $\mathcal{E}_{l_1,l_2}(U)$ является $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$-модулем. Для любого комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{E}^z_{l_1,l_2}(U)$ модуль над $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$, полученный из $\mathcal{E}_{l_1,l_2}(U)$ при помощи взятия обратного образа относительно автоморфизма

$$\tau_z\colon T_{ij}(u) \mapsto T_{ij}(u-z), \quad \text{где} \quad i,j = 1,\dots,n$$

алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$. Обозначим символом $V \boxtimes U$ модуль над $\mathfrak{gl}_{m+l}$ параболически индуцированный с $\mathfrak{gl}_m \oplus \mathfrak{gl}_l$-модуля $V \otimes U$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема. i) $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$*-модуль* $\mathcal{E}_{p,q+r}(V \boxtimes U)_{\mathfrak{q}}$ *изоморфен тензорному произведению модулей* $\mathcal{E}_{p,q}(V) \otimes \mathcal{E}^m_{0,r}(U)$.

ii) $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$*-модуль* $\mathcal{E}_{p+r,q}(V \boxtimes U)_{\mathfrak{q}}$ *изоморфен тензорному произведению модулей* $\mathcal{E}_{r,0}(V) \otimes \mathcal{E}^r_{p,q}(U)$.

[23] V. Drinfeld, *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 56–58.

[24] I. Cherednik, *Lectures on Knizhnik-Zamolodchikov equations and Hecke algebras*, Math. Soc. Japan Memoirs **1** (1998), 1–96.

Пусть теперь

$$\mathfrak{gl}_m = \mathfrak{n} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}'$$

задает треугольное разложение алгебры $\mathfrak{gl}_m$. Тогда из теоремы о параболической индукции следует, что подмодуль $\mathfrak{n}$-коинвариантов $\mathcal{E}_{p,q}(M_\mu)_\mathfrak{n}$ образа функтора $\mathcal{E}_{p,q}$ на модуле Верма M_μ с весом μ изоморфен тензорному произведению модулей

$$\mathcal{E}_{1,0}(M_{\mu_1}) \otimes \mathcal{E}^1_{1,0}(M_{\mu_2}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{p-1}_{1,0}(M_{\mu_p}) \otimes \mathcal{E}^p_{0,1}(M_{\mu_{p+1}}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{m-1}_{0,1}(M_{\mu_m}).$$

Также в 9 параграфе показано, что модули $\mathcal{E}^{i-1}_{1,0}(M_{\mu_i})$ и $\mathcal{E}^{i-1}_{0,1}(M_{\mu_i})$ изоморфны стандартным представлениям янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ в (анти)-симметрических степенях векторного и ковекторного представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$.

Десятый параграф посвящен сплетающим операторам между построенными модулями. Для построения сплетающих операторов применяется теория редукционных алгебр и операторов Желобенко. А именно, в диссертации показано, что модуль $\mathcal{E}_{p,q}(M_\mu)_\mathfrak{n}$ можно воспринимать как представление некоторой алгебры Микельссона, и образы операторов Желобенко при факторизации являются сплетающими операторами для $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$-модулей. Более того, образ модуля $\mathcal{E}_{p,q}(M_\mu)_\mathfrak{n}$ под действием оператора Желобенко, соответствующего длинному элементу группы Вейля, является неприводимым $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$-модулем.

Все построенные представления $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$ являются рациональными. В 11 параграфе вычислены образы старших векторов построенных модулей под действием сплетающих операторов. В параграфе 12 высказана гипотеза о том, что таким образом могут быть получены все неприводимые рациональные представления янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$. В настоящее время гипотеза доказана, однако этот результат еще не опубликован. Наконец, в параграфе 13 приведены технические доказательства некоторых утверждений второй главы.

Автор выражает огромную благодарность своим научным руководителям — доктору физико-математических наук, профессору Хорошкину Сергею Михайловичу за постановку задач, постоянную поддержку и многочисленные обсуждения и доктору физико-математических наук, профессору Зайцеву Михаилу Владимировичу за обсуждения, советы и внимание на всех этапах подготовки диссертации.

Работы автора по теме диссертации

[1] А. Шапиро
Три реализации квантовой аффинной алгебры $U_q(A_2^{(2)})$,
Теоретическая и Математическая Физика, **165** (2010), No.2, 217–232,

[2] S. Khoroshkin, A. Shapiro,
Weight function for the quantum affine algebra $U_q(A_2^{(2)})$,
Journal of Geometry and Physics **60** (2010), 1833-1851,

[3] A. Shapiro
Rational representations of the Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_n)$,
Journal of Geometry and Physics **62** (2012), 1677-1696.

В работе [2] диссертанту принадлежит вычисление универсальной весовой функции и интегральных формул для факторов универсальной R-матрицы.