Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Дашков Евгений Владимирович

О пропозициональных исчислениях, представляющих понятие доказуемости

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре математической логики и теории алгоритмов Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	Беклемишев Лев Дмитриевич член-корреспондент РАН
Официальные оппоненты:	Артёмов Сергей Николаевич доктор физико-математических наук, профессор, The Graduate Center of the City University of New York, США, Distinguished Professor
	Шапировский Илья Борисович кандидат физико-математических наук, Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита состоится 28 сентября 2012 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, сектор А, 14 этаж).

Автореферат разослан 28 августа 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.84 при МГУ,
д.ф-м.н., профессор Иванов А. О.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Первая глава диссертации посвящена рассмотрению интуиционистской логики доказательств **iLP**. Логика доказательств **LP**[1] введена С. Н. Артёмовым и в настоящее время активно исследуется. **LP** является расширением исчисления высказываний в языке, представляющем доказательства как формальные объекты. Термы, выражающие доказательства, строятся из констант и переменных с помощью операций, соответствующих естественным операциям над выводами. Получаемые формулы вида $t\colon F$ предполагают толкование «t есть доказательство F». Логика **LP** полна относительно арифметики Пеано **PA** при интерпретации $t\colon F$ арифметической формулой «t^* есть вывод F^* в арифметике Пеано».

Интуиционистская арифметика **HA** — наиболее известная теория, формализующая понятие конструктивного доказательства. В силу известных теорем Р. Соловея,[2] логикой доказуемости классической арифметики **PA** является логика Гёделя–Лёба **GL**. Вопрос о логике *доказуемости* теории **HA**, впервые поставленный А. Виссером,[3] длительное время остается открытым.[4] Кроме того, — в частности, в связи с последним вопросом — представляет интерес отыскание логики *доказательств* теории **HA**. Так, подходящим образом определенная интуиционистская логика доказательств позволяет выра-

[1] Artemov S. Explicit provability and constructive semantics // The Bulletin for Symbolic Logic. — 2001. — Vol. 7, no. 1. — P. 1–36.

[2] Solovay R. Provability interpretation of modal logic // Israel Journal of Mathematics. — 1976. — Vol. 25, no. 3-4. — P. 287–304.

[3] Visser A. Aspects of diagonalization and provability : PhD. thesis / A. Visser ; Department of Philosophy, Utrecht University. — 1981.

[4] Beklemishev L., Visser A. Problems in the Logic of Provability // Mathematical Problems from Applied Logic I: Logics for the XXIst Century / Ed. by D.M. Gabbay, S.S. Goncharov, M. Zakharyashev. — International Mathematical Series: vol. 4. Springer, 2006.

зить допустимые в **HA** пропозициональные правила,[5] которые, вследствие интуиционистского характера этой теории, не являются непременно выводимыми.

Ранее исследовалась[6] интуиционистская логика доказательств **ILP**, определяемая как фрагмент **LP** с интуиционистскими пропозициональными аксиомами вместо классических. Однако, логика **ILP** не полна относительно интуиционистской арифметики **HA** и, таким образом, не решает вопроса о логике доказательств этой теории.

Проблема построения арифметически полной интуиционистской логики доказательств рассматривалась С. Н. Артёмовым и Р. Имхофф.[7] В указанной работе ими вводится базовая интуиционистская логика доказательств **iBLP** и интуиционистская логика доказательств **iLP**. В отличие от **iLP**, логика **iBLP** не содержит операций над термами, представляющими доказательства. Там же определена естественная арифметическая интерпретация логики **iBLP** в **HA** и доказаны корректность и полнота **iBLP** относительно этой интерпретации, а также выдвинута гипотеза полноты **iLP** относительно надлежащей интерпретации в **HA**. Мы доказываем эту гипотезу.

Кроме того, в настоящей диссертации предложена семантика Крипке для логик **iBLP** и **iLP**, развивающая подход А. Мкртычева[8] и М. Фиттинга[9] к

---

[5] Iemhoff R. Provability logic and admissible rules : PhD thesis / R. Iemhoff ; University of Amsterdam. — 2001.

[6] Artemov S. Unified semantics for modality and λ-terms via proof polynomials // Algebras, Diagrams and Decisions in Language, Logic and Computation / Ed. by K. Vermeulen, A. Copestake. — Stanford University, 2002.

[7] Artemov S., Iemhoff R. The basic intuitionistic logic of proofs // The Journal of Symbolic Logic. — 2007. — Vol. 72, no. 2. — P. 439–451.

[8] Mkrtychev A. Models for the logic of proofs // Logical Foundations of Computer Science, 4th International Symposium LFCS'97 / Ed. by S.I. Adian, A. Nerode. — Lecture Notes in Computer Science 1234. — 1997. — P. 266–275.

[9] Fitting M. The logic of proofs, semantically // Annals of Pure and Applied Logic. — 2005. — Vol. 132,

построению моделей логики доказательств. Доказаны соответствующие теоремы о полноте и корректности, а также получен ряд следствий из них.

Во второй главе диссертации рассматривается фрагмент полимодальной логики доказуемости **GLP** в некотором обедненном языке. Интерес к логике **GLP** и этому ее фрагменту вызван, прежде всего, приложениями к теории доказательств.

Л. Д. Беклемишев предложил[10] новый подход к ординальному анализу арифметических теорий, основанный на понятии *градуированной алгебры доказуемости*, т. е. алгебры Линденбаума рассматриваемой теории, обогащенной операторами доказуемости (или непротиворечивости). Пусть $\mathcal{L}_T$ означает алгебру Линденбаума теории T. Предполагая T достаточно сильной, введем операторы на $\mathcal{L}_T$:

$$\langle n\rangle_T \colon [F] \mapsto [n\text{-}\mathrm{Con}_T(F)],$$

где $[F]$ означает класс эквивалентности формулы F, а формула $n\text{-}\mathrm{Con}_T(F)$ естественным образом выражает совместность множества всех истинных Π_n-предложений и формулы F в теории T. Тогда градуированной алгеброй доказуемости теории T называется структура $\mathcal{M}_T = (\mathcal{L}_T, \{\langle n\rangle_T \mid n < \omega\})$. Термы $\mathcal{M}_T$ можно отождествить с формулами некоторого модального языка.

Действительно, рассмотрим язык $\mathcal{L}$ с пропозициональными переменными, связками $\bot$, $\top$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ и $\langle n\rangle$ для всех $n < \omega$. При этом считаем $\neg\varphi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ и $[n]\varphi \rightleftharpoons \neg\langle n\rangle\neg\varphi$ сокращениями.

Для всякой (достаточно сильной) корректной теории T логикой алгебры $\mathcal{M}_T$ является система **GLP**, введенная Г. К. Джапаридзе[11] в 1986 г. (см. тж.

no. 1. — P. 1–25.

[10] Beklemishev L. Provability algebras and proof-theoretic ordinals, I // Annals of Pure and Applied Logic. — 2004. — Vol. 128. — P. 103–123.

[11] Джапаридзе Г. К. Модально-логические средства исследования доказуемости : Дисс. канд. филос. наук : 09.00.07 / Г. К. Джапаридзе ; МГУ. — М., 1986. — 177 с.

в изложении К. Н. Игнатьева[12]). Г. К. Джапаридзе фактически доказал, что для любой формулы φ языка $\mathcal{L}$ выполнено

$$\mathcal{M}_T \models \forall \vec{x}\,(\varphi(\vec{x}) = \top) \Leftrightarrow \mathbf{GLP} \vdash \varphi(\vec{x}).$$

С применением логики **GLP** была получена система ординальных обозначений до ординала ε_0, ординальный анализ арифметики Пеано **PA** и ряда ее фрагментов,[10] а также был построен новый пример комбинаторного утверждения, независимого от **PA**.[13] В действительности, как заметил Л. Д. Беклемишев, для получения этих результатов достаточно рассматривать *позитивный фрагмент* $\mathbf{GLP}_+$ логики **GLP**, т. е. множество доказуемых в **GLP** эквивалентностей формул *позитивного*[*] полимодального языка $\mathcal{L}_+$ с пропозициональными переменными, $\top$, $\wedge$ и модальными связками $\langle n \rangle$ для всех $n < \omega$. Более того, упомянутая система ординальных обозначений строится из позитивных формул без переменных. Таким образом возможно упростить доказательства указанных результатов.

Задача аксиоматизации позитивного фрагмента $\mathbf{GLP}_+$, сформулированная Л. Д. Беклемишевым и А. Виссером,[4] решена в настоящей диссертации.

Заметим, что позитивный формализм допускает более широкий класс арифметических интерпретаций — в соответствие переменным могут быть поставлены *теории* (т. е. фильтры в $\mathcal{M}_T$), а не только отдельные предложения. Это обстоятельство способствует анализу более сильных, чем арифметика Пеано, теорий методом градуированных алгебр доказуемости.

[*] В литературе по модальным логикам принято более широкое понимание позитивного языка: обычно позитивным считается язык $\mathcal{L}_{\mathbf{D}}$, определяемый ниже.

[12] Ignatiev K. On strong provability predicates and the associated modal logics // The Journal of Symbolic Logic. — 1991. — Vol. 58, no. 1. — P. 249–290.

[13] Beklemishev L. The worm principle // Logic Colloquium ’02 / Ed. by Z. Chatzidakis, P. Koepke, W. Pohlers. — Lecture Notes in Logic 27. — AK Peters, 2006. — P. 75–95.

И. Б. Шапировский показал,[14] что проблема выводимости в логике **GLP** является PSPACE-полной. Мы доказываем, что фрагмент $\mathbf{GLP}_+$ разрешим за полиномиальное время. Таким образом, позитивный формализм проще не только синтаксически, но и алгоритмически.

Отметим также, что логика **GLP** не полна по Крипке, в то время как для ее позитивного фрагмента нами получен результат о полноте относительно естественного класса конечных шкал Крипке.

Позитивные в некотором более широком смысле модальные логики рассматривались ранее. Дж. Данн[15] исследовал минимальную нормальную модальную логику $\mathbf{K}_+^{\top\bot}$ в языке $\mathcal{L}_\mathbf{D}$ со связками $\wedge, \vee, \Box, \Diamond, \top, \bot$, а также некоторые ее расширения. Аксиомами и теоремами при этом считаются утверждения вида $\varphi \vdash \psi$. С помощью обычной семантики Крипке Данн установил, что $\mathbf{K}$ консервативна над $\mathbf{K}_+^{\top\bot}$, или, другими словами, $\mathbf{K}_+^{\top\bot}$ аксиоматизирует фрагмент логики $\mathbf{K}$ в языке $\mathcal{L}_\mathbf{D}$:

$$\varphi \vdash_{\mathbf{K}_+^{\top\bot}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_\mathbf{K} \varphi \to \psi,$$

для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\mathbf{D}$. Однако, в смысле предложенной семантики некоторые расширения $\mathbf{K}_+^{\top\bot}$ оказались неполными: например, в каждой шкале, где истинна $\Box\varphi \vdash \Box\Box\varphi$, истинной оказывается и $\Diamond\Diamond\varphi \vdash \Diamond\varphi$, притом что второе утверждение не выводится из первого в $\mathbf{K}_+^{\top\bot}$. Эта трудность была разрешена С. Челани и Р. Жансана,[16] доказавшими полноту ряда расширений $\mathbf{K}_+^{\top\bot}$ относительно шкал, где отношение достижимости согласовано с некоторым предпорядком так, что допускаются лишь замкнутые вверх относительно предпорядка оценки переменных.

---

[14] Shapirovsky I. PSPACE-decidability of Japaridze's polymodal logic // Advances in Modal Logic / Ed. by C. Areces, R. Goldblatt. — Vol. 7. — College Publications, 2008. — P. 289–304.

[15] Dunn J. Positive modal logic // Studia Logica. — 1995. — Vol. 55, no. 2. — P. 301–317.

[16] Celani S., Jansana R. A new semantics for positive modal logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1997. — Vol. 38, no. 1. — P. 1–18.

Упомянутые результаты[15,16] позволяют получить аксиоматизацию позитивных фрагментов многих хорошо известных логик, являющихся расширениями **K** посредством принципов вида $\varphi \to \psi$, где $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathbf{D}}$. Таковы $\mathbf{B}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$ и др. Однако, например, к логике Гёделя–Лёба $\mathbf{GL} = \mathbf{K4} + \Diamond\varphi \to \Diamond(\varphi \wedge \neg\Diamond\varphi)$ эти результаты непосредственно не применимы. Из результатов настоящей работы следует совпадение $\mathcal{L}_+$-фрагментов логик **GL** и **K4**, однако легко убедиться, что $\mathbf{K4}_{\mathbf{D}} \subsetneq \mathbf{GL}_{\mathbf{D}}$.

Вопросы сложности модальных логик в обедненных языках рассматривались ранее преимущественно в контексте дескрипционных логик. В дескрипционной постановке исследовалась[17,18,19,20] сложность задачи, представимой в модальных терминах следующим образом. Пусть формулы построены из переменных, связок $\top, \bot, \wedge$ и не более чем счетного множества связок $\Diamond_r$. Проверить: «для всякой модели из данного класса, если во всех точках модели выполнено некоторое конечное множество импликаций $\varphi_i \to \psi_i$, то во всех точках этой модели выполнена $\varphi \to \psi$». Установлена PTIME-разрешимость этой задачи для класса всех шкал Крипке и получены оценки сложности для некоторых классов шкал. Тем не менее, из известных нам результатов в этой области оценка сложности $\mathbf{GLP}_+$ очевидным образом не извлекается.

Целью диссертационной работы является следующее:

1. Доказать гипотезу Артёмова-Имхофф[7] о полноте интуиционистской логики доказательств **iLP** относительно естественной арифметической се-

[17] Baader F., Brandt S., Lutz C. Pushing the EL envelope // IJCAI / Ed. by L.P. Kaelbling, A. Saffiotti. — 2005. — P. 364–369.

[18] Baader F., Brandt S., Lutz C. Pushing the EL envelope further // Proc. of OWLED / Ed. by K. Clark, P.F. Patel-Schneider. — 2008.

[19] Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M. Islands of tractability for relational constraints: towards dichotomy results for the description logic EL // Advances in Modal Logic / Ed. by L. Beklemishev, V. Goranko, V. Shehtman. — Vol. 8. — College Publications, 2010. — P. 271–291.

[20] Sofronie-Stokkermans V. Locality and subsumption testing in EL and some of its extensions // Advances in Modal Logic / Ed. by C. Areces, R. Goldblatt. — Vol. 7. — College Publications, 2008. — P. 315–339.

мантики.

2. Получить аксиоматизацию позитивного фрагмента логики **GLP**.
3. Исследовать вычислительную сложность проблемы выводимости для этого фрагмента.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Установлена полнота интуиционистской логики доказательств **iLP** относительно естественной арифметической семантики.
2. Дана аксиоматизация позитивных фрагментов логик **GL** и **GLP** как исчислений равенств.
3. Для позитивного фрагмента логики **GLP** доказана полиномиальная по времени разрешимость проблемы выводимости, а также установлена его полнота относительно естественного класса конечных шкал Крипке.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в математической логике и информатике.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались:

- На семинарах «Алгоритмические вопросы алгебры и логики» и «Логические проблемы информатики» кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ (неоднократно) в 2006-2012 гг.
- На международной конференции «Logical Models of Reasoning and Computation» (Москва, 2008).
- На международной конференции «Advances in Modal Logic» (Москва, 2010).
- На международном семинаре «Proof, Computation, Complexity» (Берн, 2010).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех печатных работах автора [1–3], список которых приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора. Результаты диссертации получены лично автором. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и библиографии. Общий объем диссертации составляет 80 страниц. Библиография включает 34 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, освещена история рассматриваемых вопросов, обоснована научная новизна исследований и показана теоретическая значимость полученных результатов, а также представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе диссертации рассматривается интуиционистская логика доказательств $\mathbf{iLP}$.

Определение 1. Формулы и термы языка $\mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}$ определяются индуктивно следующим образом. Пусть F и G суть формулы, а s и t термы. Тогда

- $\bot, \mathbf{p}_i, t\colon F, F\vee G, F\wedge G, F\to G$ суть формулы, где $\mathbf{p}_i$ пропозициональные переменные;

- $\mathbf{c}_i, \mathbf{u}_i, !\,t, \mathfrak{f}_i\,t, t\cdot s, t+s$ суть термы, где $\mathbf{c}_i$ и $\mathbf{u}_i$ *доказательственные* константы и переменные соответственно, а $\mathfrak{f}_i$ для всех натуральных i — специальные знаки операций над термами.

Определение 2. Для языка, содержащего булевы связки, и произвольного $n \in \omega$ обозначим через $\mathbf{V_n}$ множество примеров схемы

$$\frac{\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(F_i \to G_i) \to F_{n+1} \vee F_{n+2}}{\bigvee\limits_{j=1}^{n+2}(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(F_i \to G_i) \to F_j)}.$$

Определение 3. Логика доказательств $\mathbf{iLP}$ в языке $\mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}$ определяется следующими схемами аксиом и правилами вывода:

A1 Схемы аксиом интуиционистской пропозициональной логики

A2 $t{:}F \to F$ *(рефлексия)*

A3 $t{:}F \vee \neg t{:}F$

A4 $s{:}(F \to G) \to (t{:}F \to s \cdot t{:}G)$ *(аппликация)*

A5 $t{:}F \to {!}\,t{:}t{:}F$ *(проверка доказательств)*

A6 $s{:}F \vee t{:}F \to s + t{:}F$ *(объединение доказательств)*

A7$_\mathrm{n}$ $t{:}F \to \mathfrak{f}_n\, t{:}G$, если $\dfrac{F}{G} \in \mathbf{V_n}$

MP $\dfrac{A \to B,\ A}{B}$ *(modus ponens)*

CS $\dfrac{}{c{:}A}$, если A — аксиома $\mathbf{iLP}$ и c — доказательственная константа. *(свидетельства аксиом)*

Определение 4. Будем рассматривать модели Крипке $(W, \preccurlyeq, \Vdash)$, где $\preccurlyeq$ отношение частичного порядка и $(x \Vdash p \ \&\ x \preccurlyeq y) \Rightarrow y \Vdash p$. Вынуждение пропозициональных формул определим так, как для случая интуиционистской пропозициональной логики. Модель называется *моделью Имхофф*, если:

1. шкалы всех конусов модели конечны;

2. всякое конечное подмножество U элементов модели имеет *тесную нижнюю грань*, т. е. для каждого U модель содержит такой элемент x_0, что $x_0 \preccurlyeq x$ для всех $x \in U$, и если $x_0 \prec y$, то существует элемент $x' \in U$, удовлетворяющий условию $x' \preccurlyeq y$.

Определение 5. Пусть задана модель Имхофф K^I и свидетельская функция $\mathcal{E}\colon \mathrm{Tm}_{\mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}} \to 2^{\mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}}$, где $\mathrm{Tm}_{\mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}}$ обозначает множество термов $\mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}$, по определению удовлетворяющая условиям:

- если $F \to G \in \mathcal{E}(s)$ и $F \in \mathcal{E}(t)$, то $G \in \mathcal{E}(s \cdot t)$;
- если $F \in \mathcal{E}(t)$, то $t{:}F \in \mathcal{E}(!\,t)$;
- если $F \in \mathcal{E}(t)$, то $F \in \mathcal{E}(s+t) \cap \mathcal{E}(t+s)$;
- если $F \in \mathcal{E}(t)$ и $\dfrac{F}{G} \in \mathbf{V_n}$, то $G \in \mathcal{E}(\mathfrak{f}_n\, t)$;
- если c — доказательственная константа, а A — аксиома **iLP**, то $A \in \mathcal{E}(c)$.

Тогда $\mathsf{K}^{\mathsf{iLP}} = (\mathsf{K}^{\mathsf{I}}, \mathcal{E})$ можно рассмотреть как модель языка $\mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}$:

$$\mathsf{K}^{\mathsf{iLP}}, x \Vdash t{:}F \rightleftharpoons \mathsf{K}^{\mathsf{iLP}} \Vdash F \text{ и } F \in \mathcal{E}(t).$$

Теорема 1. *Логика* **iLP** *корректна и полна относительно моделей вида* $\mathsf{K}^{\mathsf{iLP}}$.

Семантика для логики **iLP** получается комбинацией данной Имхофф[21] семантической характеристики допустимых правил вывода интуиционистской пропозициональной логики с подходом Мкртычева[8] и Фиттинга[9] к построению моделей логики доказательств. Также используется техника проективных формул, развитая Гилярди.[22]

Определение 6. *Предикат доказательств* — это примитивно рекурсивная арифметическая формула $\mathrm{Prf}(x, y)$, такая что при всех $\varphi \in \mathcal{L}^0_{\mathbf{HA}}$, где $\mathcal{L}^0_{\mathbf{HA}}$ означает множество арифметических предложений, $\vdash_{\mathbf{HA}} \varphi$ имеет место тогда и только тогда, когда найдется число $n \in \omega$, для которого $\mathbb{N} \models \mathrm{Prf}(\overline{n}, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$.

Предикат доказательств $\mathrm{Prf}(x, y)$ назовем *нормальным*, если выполнены следующие условия:

---

[21] Iemhoff R. On the admissible rules of intuitionistic propositional logic // The Journal of Symbolic Logic. — 2001. — Vol. 66, no. 1. — P. 281–294.

[22] Ghilardi S. Unification in intuitionistic logic // The Journal of Symbolic Logic. — 1999. — Vol. 64, no. 2. — P. 859–880.

- для всякого $k \in \omega$ множество $T(k) \rightleftharpoons \{l \mid \mathbb{N} \models \mathrm{Prf}(\bar{k}, \bar{l})\}$ конечно, причем функция $k \mapsto \ulcorner\{\bar{l} \mid l \in T(k)\}\urcorner$ рекурсивная тотальная;

- для всяких $k, l \in \omega$ существует $n \in \omega$, такое что $T(k) \cup T(l) \subseteq T(n)$.

Определение 7. Пусть дан нормальный предикат доказательств $\mathrm{Prf}(x, y)$, а также рекурсивные тотальные функции m, a, c и f_n для всех $n \in \omega$, такие что для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^0_{\mathbf{HA}}$ и любых $k, l \in \omega$ в $\mathbb{N}$ выполнено:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prf}(k, \ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \to (\mathrm{Prf}(l, \ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prf}(m(k, l), \ulcorner\psi\urcorner));\\
&\mathrm{Prf}(k, \ulcorner\varphi\urcorner) \vee \mathrm{Prf}(l, \ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prf}(a(k, l), \ulcorner\varphi\urcorner);\\
&\mathrm{Prf}(k, \ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prf}(c(k), \ulcorner\mathrm{Prf}(\bar{k}, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner);\\
&\mathrm{Prf}(k, \ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prf}(f_n(k), \ulcorner\psi\urcorner), \text{ если } \frac{\varphi}{\psi} \in \mathbf{V_n}.
\end{aligned}$$

Тогда *арифметическая интерпретация* языка $\mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}$ есть произвольное отображение $(\cdot)^*\colon \mathcal{L}_{\mathbf{iLP}} \cup \mathrm{Tm}_{\mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}} \to \mathcal{L}^0_{\mathbf{HA}} \cup \omega$, удовлетворяющее условиям:

- $\bot^* \rightleftharpoons \bot$; $(\cdot)^*$ коммутирует с пропозициональными связками;

- $(s \cdot t)^* = m(s^*, t^*)$; $(s + t)^* = a(s^*, t^*)$; $(!\,t)^* = c(t^*)$; $(\mathfrak{f}_n\, t)^* = f_n(t^*)$ для всех $n \in \omega$;

- $(t\colon F)^* \rightleftharpoons \mathrm{Prf}(\overline{t^*}, \overline{\ulcorner F^* \urcorner})$.

Теорема 2. *Пусть множество* $\Gamma \cup \{A\} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{iLP}}$ *конечно. Если* $\Gamma \nvdash_{\mathbf{iLP}} A$, *то существует арифметическая интерпретация* $(\cdot)^*$, *такая что* $\Gamma^* \nvdash_{\mathbf{HA}} A^*$.

Полнота логики **iLP** относительно арифметической семантики устанавливается модификацией общей схемы доказательства полноты для логики доказательств **LP**, принадлежащей Артёмову,[1] с применением техники проективных формул. Также использована теорема де Йонга.[23] Результаты первой главы, относящиеся к теореме 2, опубликованы в работе автора [3].

---

[23] Smorynski C. Applications of Kripke models // Mathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis / Ed. by A. Troelstra. — Springer-Verlag, 1973. — P. 324–391.

Во второй главе диссертации рассматривается позитивный фрагмент полимодальной логики доказуемости **GLP**.

Определение 8. Полимодальный пропозициональный язык $\mathcal{L}$ имеет связки $\top, \bot, \wedge, \vee, \to$ и $\langle n \rangle$ для всех $n \in \omega$. *Позитивный* язык $\mathcal{L}_+$ получается из $\mathcal{L}$ исключением всех связок, кроме $\top, \wedge$ и $\langle n \rangle$ для всех $n \in \omega$. Позитивный мономодальный язык $\mathcal{L}_+(0)$ имеет связки $\top$, $\wedge$ и $\Diamond$, причем последнюю мы отождествляем с $\langle 0 \rangle$ и считаем $\mathcal{L}_+(0) \subset \mathcal{L}_+$.

Определение 9. Логика **GLP** задается в языке $\mathcal{L}$ следующими схемами аксиом:

(i) Схемы аксиом пропозициональной логики;

(ii) $\neg\langle n \rangle\bot$;

(iii) $\langle n \rangle(\varphi \vee \psi) \to \langle n \rangle\varphi \vee \langle n \rangle\psi$;

(iv) $\langle n \rangle\varphi \to \langle n \rangle(\varphi \wedge \neg\langle n \rangle\varphi)$;

(v) $\langle n \rangle\langle m \rangle\varphi \to \langle m \rangle\varphi$, если $m \leqslant n$;

(vi) $\langle n \rangle\neg\langle m \rangle\varphi \to \neg\langle m \rangle\varphi$, если $m < n$;

(vii) $\langle n \rangle\varphi \to \langle m \rangle\varphi$, если $m < n$,

и правилами вывода: modus ponens и (Nec) $\vdash \varphi \to \psi \Rightarrow \vdash \langle n \rangle\varphi \to \langle n \rangle\psi$.

Определение 10. Множество формальных равенств $\mathbf{GLP}_+ \rightleftharpoons \{\varphi = \psi \mid \mathbf{GLP} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ и $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_+\}$ называется *позитивным фрагментом* логики **GLP**. Задаваемое $\mathbf{GLP}_+$ отношение $=$ на $(\mathcal{L}_+)^2$ действительно является отношением эквивалентности.

Определение 11. Определим исчисление $\mathbf{GLP}^{\mathbf{e}}_+$ для равенств вида $\varphi = \psi$, где $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_+$. Примем схему аксиом $\varphi = \varphi$ и правила

$$\frac{\varphi \; = \; \psi}{\psi \; = \; \varphi} \quad \frac{\varphi \; = \; \theta \qquad \theta \; = \; \psi}{\varphi \; = \; \psi} \quad \frac{\varphi \; = \; \psi}{\varphi \wedge \theta \; = \; \psi \wedge \theta} \quad \frac{\varphi \; = \; \psi}{\langle n \rangle \varphi \; = \; \langle n \rangle \psi}$$

для всех $n < \omega$. Пусть $\varphi \leqslant \psi$ означает $\varphi \wedge \psi = \varphi$. Кроме указанных схем и правил, исчисление $\mathbf{GLP}^{\mathbf{e}}_{+}$ задается схемами аксиом

1. $\top \wedge \varphi = \varphi$;
2. $(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta = \varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$;
3. $\varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi$;
4. $\varphi \wedge \varphi = \varphi$;
5. $\langle n \rangle (\varphi \wedge \psi) \leqslant \langle n \rangle \varphi \wedge \langle n \rangle \psi$;
6. $\langle n \rangle \langle n \rangle \varphi \leqslant \langle n \rangle \varphi$;
7. $\langle n \rangle \varphi \wedge \langle m \rangle \psi \leqslant \langle n \rangle (\varphi \wedge \langle m \rangle \psi)$, где $m < n$;
8. $\langle n \rangle \varphi \leqslant \langle m \rangle \varphi$, где $m < n$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{+}$. Тогда $\mathbf{GLP} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ равносильно $\mathbf{GLP}^{\mathbf{e}}_{+} \vdash \varphi = \psi$.*

Определение 12. Шкала Крипке $(W, \{R_n\}_{n \in \omega})$ называется J_{+}-шкалой, если

1. $\forall x, \, y, \, z \, (x R_n y \;\&\; y R_n z \Rightarrow x R_n z)$;
2. $m < n \Rightarrow R_n \subseteq R_m$;
3. $m < n \Rightarrow \forall x, \, y \, (x R_n y \Rightarrow \forall z \, (x R_m z \Rightarrow y R_m z))$.

Вынуждение формул языка $\mathcal{L}$ определяется обычным образом.

Теорема 4. *Для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{+}$ тогда и только тогда $\mathbf{GLP}^{\mathbf{e}}_{+} \vdash \varphi \leqslant \psi$, когда в каждой (конечной) J_{+}-модели вынуждается $\varphi \to \psi$.*

Определение 13. Исчисление $\mathbf{K4}^{\mathbf{e}}_{+}$ в языке $\mathcal{L}_{+}(0)$ получается, если в определении $\mathbf{GLP}^{\mathbf{e}}_{+}$ ограничиться аксиомой и правилами для $=$, а также неравенствами (1–6), полагая всюду в последних $n = 0$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{L}$ *есть произвольная мономодальная логика, промежуточная между* $\mathbf{K4}$ *и* $\mathbf{GL}$. *Тогда* $\mathbf{L} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ *равносильно* $\mathbf{K4}^{\mathbf{e}}_{+} \vdash \varphi = \psi$ *для всех* $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{+}(0)$.

Определение 14. *Сложность* $|\varphi|$ формулы $\varphi \in \mathcal{L}_{+}$ есть ее длина как слова в алфавите $\{\top, p_1, \ldots, p_n, \ldots, \wedge, \langle 0\rangle, \ldots, \langle n\rangle, \ldots\}$.

Теорема 6. *Проблема принадлежности к множеству* $\mathbf{GLP}_{+}$ *равенств вида* $\varphi = \psi$ *разрешима за время, полиномиальное от* $N = |\varphi| + |\psi|$.

Результаты об аксиоматизации и финитной аппроксимируемости получены стандартными методами. При этом используется сведение[24] логики **GLP** к ее подсистеме **J**, полной по Крипке, и семантическая характеристика замкнутого фрагмента **GLP**.[12] Полиномиальная разрешимость рассматриваемого фрагмента логики **GLP** устанавливается с применением полученной семантической характеристики. Результаты второй главы опубликованы в работе автора [1].

Автор благодарен своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН Льву Дмитриевичу Беклемишеву за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор также благодарен доценту Татьяне Леонидовне Яворской за ценные советы, внимание и помощь в работе. Благодарю всех сотрудников кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ за внимание.

---

[24] Beklemishev L. Kripke semantics for provability logic GLP // Annals of Pure and Applied Logic. — 2010. — Vol. 161, no. 6. — P. 756–774.

Список публикаций

1. Дашков Е. В. О позитивном фрагменте полимодальной логики доказуемости // Математические заметки. — 2012. — Т. 91, № 3. — С. 331–346.

2. Dashkov E. On positive fragments of polymodal provability logic // Proof, Computation, Complexity PCC 2010 International Workshop / Ed. by K. Brünnler, T. Studer. — Institut für Informatik und angewandte Mathematik, University of Bern, 2010. — P. 13–15.

3. Dashkov E. Arithmetical completeness of the intuitionistic logic of proofs // Journal of Logic and Computation. — 2011. — Vol. 21, no. 4. — P. 665–682.