Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

УДК 512.536, 512.558, 512.643

Шитов Ярослав Николаевич

РАНГОВЫЕ ФУНКЦИИ МАТРИЦ НАД ПОЛУКОЛЬЦАМИ

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2012

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Гутерман Александр Эмилевич.

Официальные оппоненты: Кожухов Игорь Борисович — доктор
физико-математических наук, профессор,
Московский институт электронной техники;

Богданов Илья Игоревич — кандидат
физико-математических наук, доцент,
Московский физико-технический институт
(государственный университет).

Ведущая организация: Московский педагогический государственный
университет.

Защита состоится 28 сентября 2012 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 28 августа 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Множество $\mathcal{S}$, на котором заданы бинарные операции сложения и умножения, обозначаемые как $\oplus$ и $\otimes$, называется *полукольцом*, если

- S — абелев моноид по сложению (нейтральный элемент этого моноида обозначается через $\mathbf{0}$);
- S — полугруппа по умножению (нейтральный элемент этой полугруппы, если он есть, обозначается через $\mathbf{1}$);
- умножение слева и справа дистрибутивно по сложению;
- для любого элемента $x \in \mathcal{S}$ верно, что $x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes x = \mathbf{0}$.

Как видим, полукольцо является алгебраической структурой, и его определение сходно с определением кольца. Основное отличие полукольца от кольца проявляется в том, что не всякий элемент может быть обратим по сложению. В качестве примеров полуколец, не являющихся кольцами, можно привести некоторые числовые множества: например, целые неотрицательные числа $\mathbb{Z}_+$ и неотрицательные вещественные числа $\mathbb{R}_+$ являются полукольцами относительно обычных сложения и умножения. Среди важных примеров полуколец, не связанных с числовыми множествами, дистрибутивные решетки и булевы алгебры; множество всех идеалов заданного кольца также является полукольцом относительно суммы и произведения идеалов. Понятие полукольца было впервые непосредственно введено, вероятно, американским математиком Г. Вандивером в работе[1], посвященной проблемам, связанным с аксиоматической теорией оснований математики. Впоследствии на протяжении десятилетий полукольца изучались с различных точек зрения и в связи с различными теоретическими и прикладными задачами.

[1] H. S. Vandiver, Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40**(1934), 914–920.

Подробное описание различных приложений теории полуколец дано в монографии Голана[2], и мы остановимся на описании тех из них, которые наиболее тесно связаны с полученными нами результатами. Одним из важнейших примеров полуколец, рассматриваемых в данной работе, является *тропическое полукольцо*, т.е. множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел, пополненное элементом $+\infty$, с операциями минимума и суммы. Значительная часть приложений теории полуколец связана именно с тропическим полукольцом. В первую очередь, мы отмечаем важную его роль для теории оптимизации, поскольку именно различные задачи оптимизации во многом способствовали появлению и разработке тропических методов в математике. Отметим также, что слово "тропический" было предложено Ж.-Э. Пеном[3] в знак признания заслуг математиков бразильской школы. Действительно, своим развитием тропическая математика во многом обязана И. Симону, в работах которого устанавливались ее связи с алгебраической геометрией, теорией полугрупп, теорией оптимизации и некоторыми другими областями[4].

Как одни из основополагающих следует также отметить работы ленинградского математика Н. Н. Воробьева[5], идеям которого в значительной мере обязано развитие полукольцевого и тропического подходов в различных областях математики и теории оптимизации в частности. Важным шагом в развитии тропических методов в теории оптимизации стали работы английского математика Р. Канингема-Грина[6]. Дальнейшее развитие тропические методы получили в работах французских математиков М. Гондрана и М. Мину[7], которые описали методы, ставшие важным инструментом для дальнейших исследований в теории оптимизации. Тропические методы в теории оптими-

[2] J. S. Golan, Semirings and their applications, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[3] D. Speyer, B. Sturmfels, Tropical Mathematics, *Mathematics Magazine*, **82(3)**(2009), 163–173.

[4] I. Simon, Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring. *Mathematical foundations of computer science*, Lecture Notes in Comput. Sci., **324**, Springer, Berlin, 1988, 107–120.

[5] N. N. Vorobyev, Extremal algebra of positive matrices, *Elektron. Informationsverarbeitung und Kybernetik*, **3**(1967), 39–71.

[6] R. A. Cuninghame-Green, Minimax Algebra, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **166**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[7] M. Gondran, M. Minoux, Graphs and Algorithms, Wiley-Interscience, New York, 1984.

зации активно развиваются и в настоящее время: отметим работы Г. Я. Олсдера, показывающие фундаментальную роль тропических методов в теории расписаний[8]. В целом, тропический подход в теории оптимизации основан во многом на том, что многие важные задачи оптимизации, не являющиеся линейными в классическом смысле, принимают линейный вид, если формализовать их с использованием тропической нотации. Иными словами, они сводятся к линейным задачам, таким как решение системы линейных уравнений или вычисление ранга, для матриц над тропическим полукольцом. Этот факт обусловливает важность исследования полуколец и тропического полукольца в особенности с точки зрения линейной алгебры.

Отметим также, что важную роль в развитии тропических методов и их приложений к важным вопросам современной математики сыграли работы академика В. П. Маслова[9]. Для приложений в квантовой физике важную роль играет деквантование Маслова, которое устанавливает связь классической математики над числовыми полями с тропической математикой[10]. Новая область теории вероятности, которая называется идемпотентным анализом и имеет множество приложений в квантовой физике и квантовой теории вычислений, также основана на работах В. П. Маслова[11].

Несмотря на то, что значительная часть результатов нашей работы связана именно с тропическим полукольцом, существенное внимание уделено также изучению задач линейной алгебры над полукольцами в общем случае. Важность изучения свойств матриц над полукольцами в общем случае связана с тем, что самые различные полукольца возникают в различных теоретических и прикладных задачах. Например, множество вещественных чисел отрезка $[0,1]$ является полукольцом относительно операций минимума

---

[8] B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude. Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max- Plus Algebra and Its Applications, Princeton Univ. Press, 2006.

[9] В. П. Маслов, О новом принципе суперпозиции для задач оптимизации, *УМН*, **42:3(255)**(1987), 39–48.

[10] Г. Л. Литвинов, Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*, XIII, Зап. научн. сем. ПОМИ, **326**, ПОМИ, СПб., 2005, 145–182.

[11] V. N. Kolokol'tsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.

и максимума и играет фундаментальную роль в нечеткой логике и теории нечетких множеств[12]. В важном разделе теоретической информатики, посвященном проверке корректности компьютерных программ, фундаментальную роль играет формальная алгебраическая система, известная как логика Хоара[13]. Аналогичные способы описания дают динамические алгебры и алгебры Клини[14]. Перечисленные структуры также являются полукольцами, что подтверждает значимость исследования полуколец в общем случае.

Наконец, отметим еще одну область применения методов линейной алгебры над полукольцами. Раздел алгебраической геометрии, известный как тропическая геометрия, появился не так давно, но бурно развивается в настоящее время[15]. Тропическая геометрия рассматривает обобщения классических понятий, таких как многообразия, идеалы, стандартные базисы, на тропический случай. Методы тропической геометрии помогают установить довольно тесную связь тропической линейной алгебры с теорией матроидов[16]. Многие задачи тропической геометрии сводятся к задачам линейной алгебры над тропическим полукольцом, что подтверждает важность изучения тропической геометрии с точки линейной алгебры.

Таким образом, вопросы, связанные с изучением ранговых функций и других линейно-алгебраических инвариантов матриц над полукольцами мотивированы приложениями и активно разрабатываются. Исследование ранговых функций представляет не только самостоятельный теоретический интерес, но и является эффективным инструментом работы с различными классами задач геометрии, логики, дискретной математики и оптимизации. Этим объясняется актуальность.

---

[12] J. Goguen, The logic of inexact concepts, *Synthese*, **19**(1968/9), 325–373.

[13] C. A. R. Hoare, An axiomatic basis for computer programming, *Comm. ACM*, **12**(1969), 576–580.

[14] W. Wechler, Hoare algebras versus dynamic algebras, in J. Demetrovics et al. (eds): Algebra, Combinatorics and Logic in Computer Science, Gyor 1983, Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, **42**, North Holland, Amsterdam, 1986.

[15] M. Develin, B. Sturmfels, Tropical convexity, *Documenta Math.* **9**(2004), 1–27.

[16] M. Develin, F. Santos, B. Sturmfels, On the rank of a tropical matrix, *Discrete and Computational Geometry* (E. Goodman, J. Pach and E. Welzl, eds.), MSRI Publications, Cambridge Univ., Press, 2005, 213–242.

Цель работы

Изучение различных линейно-алгебраических инвариантов матриц над полукольцами и применение полученных результатов к решению проблем линейной алгебры, теории матроидов и тропической геометрии.

Научная новизна

Полученные автором результаты являются новыми, следующие из них являются основными результатами работы.

- Результаты, описывающие взаимное поведение ранговых функций тропических матриц:
  - решена проблема Акян, Гобера и Гутермана[17] о тропических матрицах с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана–Мину: показано, что $n = 5$ и $m = 6$ суть минимальные целые числа, для которых существует тропическая матрица размера $n \times m$ с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана–Мину;
  - доказано, что строчный и столбцовый ранги Гондрана–Мину матрицы не превосходят квадрата ее тропического ранга; получена оценка, показывающая, что детерминантный ранг матрицы ограничен линейной функцией ее тропического ранга.
- Результаты, описывающие функцию ранга Гондрана–Мину матриц над полукольцами:
  - получена характеризация идемпотентных полуколец, над которыми выполнено неравенство на ранг Гондрана–Мину произведения матриц; в частности, это неравенство доказано для тропических матриц;

[17] M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman, Linear independence over tropical semirings and beyond, *Contemporary Mathematics*, AMS, **495**(2009), 1–38.

– показано, что ранг Гондрана–Мину матрицы совпадает с рангом Гондрана–Мину ее шаблона с точностью до тропического умножения строк матрицы на ненулевые элементы;

– разработан быстрый (т.е., работающий за время, ограниченное полиномиальной функцией размера матрицы) алгоритм проверки свойства, равен ли ранг Гондрана–Мину матрицы любому наперед заданному числу k.

- Результаты о функции ранга Капранова тропических матриц:

  – доказано неравенство на ранг Капранова произведения тропических матриц в случае бесконечного базового поля; в случае конечного базового поля приведен пример матриц, для которых это равенство нарушается;

  – решена проблема Чан, Йенсена и Рубеи[18] о тропических матрицах с различными тропическим рангом и рангом Капранова: приведен пример матрицы размера 6×6 с тропическим рангом 4 и рангом Капранова 5 и показано, что эта матрица имеет наименьший возможный размер среди всех матриц с различными тропическим рангом и комплексным рангом Капранова;

  – получено полное решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса[16] о рангах тропических матриц размера 5×5: показано, что тропические матрицы размера 5×5 с тропическим рангом 3 и рангом Капранова 4 существуют в том и только том случае, если базовое поле содержит не более трех элементов.

  – построен контрпример к гипотезе Чан, Йенсена и Рубеи о тропическом базисе идеала кольца многочленов, порожденного всеми минорами порядка r матрицы переменных размера $d \times n$: доказано,

[18] M. Chan, A. N. Jensen, E. Rubei, The 4x4 minors of a 5xn matrix are a tropical basis, *Linear Algebra Appl.*, **435(7)**(2011), 1598–1611.

что миноры порядка 6 матрицы переменных размера 7×7 не образуют тропического базиса.

Основные методы исследования

Наряду с классическими методами и результатами линейной алгебры и теории полуколец, используются также методы комбинаторной алгебры, ориентированные на исследование ранговых функций матриц, развитые автором. Особую роль играет метод шаблонов тропических матриц, разработанный автором, позволяющий решить ряд проблем линейной алгебры и тропической геометрии.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в различных задачах тропической геометрии, теории полуколец, линейной алгебры, теории матроидов.

Апробация результатов

Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ, на семинарах "Кольца и модули" и "Теория матриц" Механико-математического факультета МГУ (2009–2012 гг.)
Также результаты докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Москва, 2010;
- Международный алгебраический симпозиум, посвященный 80-летию кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалева, Москва, 2010;

- XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Москва, 2011;
- Международная конференция по матричным методам в математике и приложениях "MMMA-2011", Москва, 2011;
- Научная конференция "Ломоносовские чтения", Москва, 2011;
- семинар "Гомологические и гомотопические методы в геометрии", Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, 2012;
- XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Москва, 2012;
- Международная конференция "Future Directions in Tropical Mathematics and its Applications", Манчестер, 2012.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Общий объем работы составляет 128 страниц. Общий список литературы включает 63 наименования.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 13 работах автора, их список приведен в конце автореферата [1-13].

Краткое содержание работы

Во **введении** приводится общая постановка задачи, а также краткое содержание результатов диссертации.

В **главе 1** вводятся базовые понятия теории полуколец и излагаются основы линейной алгебры с точки зрения полуколец. В разделе 1.2 определяются понятия, обобщающие классические понятия линейной алгебры, такие как линейная зависимость векторов и ранг матрицы. Отметим, что в связи с различными приложениями возникает необходимость рассмотрения нескольких различных ранговых функций матриц с элементами из полукольца. Среди ранговых функций, изучаемых в нашей работе, функции строчного и столбцового максимальных слабых рангов (обозначаются через Wr и Wc, соответственно), строчного и столбцового рангов Гондрана–Мину (обозначаются через GMr и GMc, соответственно), факторизационного ранга (обозначается через f), детерминантного ранга (обозначается через d) и тропического ранга (обозначается через $trop$). В разделе 1.3 изучаются обобщения на полукольцевой случай неравенств на ранг произведения, суммы и объединения матриц. А именно, исследуется выполнение условий

$$\text{если } A \otimes B = C, \text{ то } GMr(C) \leqslant \min\{GMr(A), GMr(B)\}, \tag{1}$$

$$\text{если } A \oplus B = C, \text{ то } GMr(C) \leqslant GMr(A) + GMr(B), \tag{2}$$

$$\text{если } (A|B) = C, \text{ то } GMr(C) \leqslant GMr(A) + GMr(B) \tag{3}$$

для матриц над полукольцом. Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. (Теорема 1.3.13.) *Условия (1)–(3) выполняются для матриц с элементами из макс-алгебры* $\mathbb{R}_{\max}$.

Теорема 2. (Теорема 1.3.18.) *Пусть* $\mathcal{S}$ *— идемпотентное полукольцо, не содержащее делителей нуля. Тогда условия 1) – 4) эквивалентны:*

1) условие (1) выполняется для матриц с элементами из $\mathcal{S}$*;*

2) условие (2) выполняется для матриц с элементами из $\mathcal{S}$*;*

3) условие (3) выполняется для матриц с элементами из $\mathcal{S}$*;*

4) полукольцо $\mathcal{S}$ *является обобщенно-селективным.*

Кроме того, приводится пример селективного полукольца, для матриц над которым не выполняются условия (1)–(3).

В разделе 1.4 исследуется взаимное поведение ранговых функций матриц и доказываются неравенства $trop(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, $d(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, $trop(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$ для матриц над бинарным булевым полукольцом.

Глава 2 посвящена изучению свойств функции ранга Гондрана–Мину тропических матриц. Важным для изучения этой ранговой функции является метод тропических шаблонов матриц, обоснование которого дается в разделе 2.1. В разделе 2.2 иллюстрируются некоторые приложения метода тропических шаблонов. В частности, неравенства $trop(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, $d(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, $trop(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$ доказываются для матриц над макс-алгеброй $\mathbb{R}_{\max}$. Кроме того, в разделе 2.2 исследуется вычислительная сложность функции ранга Гондрана–Мину и доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. (Теорема 2.2.11.) *Пусть k — фиксированное целое число. Тогда задача распознавания свойства $GMr(A) < k$ решается за полиномиальное по размеру матрицы $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ время.*

Теорема 4. (Теорема 2.2.12.) *Пусть t — фиксированное целое число. Тогда задача вычисления GM-ранга матрицы $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ тропического ранга, не большего t, решается за полиномиальное время.*

В разделе 2.3 исследуются случаи совпадения строчного и столбцового рангов Гондрана–Мину тропических матриц малого размера. Важным инструментом доказательства результатов этого раздела также является метод тропических шаблонов. Сначала мы доказываем аналогичные результаты для матриц над бинарным булевым полукольцом, а затем показываем их выполнение в тропическом случае с помощью метода тропических шаблонов. Доказывается следующая теорема, которая дает ответ на вопрос о минимальном примере матрицы с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана–Мину, поставленный Акян, Гобером и Гутерманом[17]. приводим минимальный (в смысле размера) пример матрицы с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана–Мину.

Теорема 5. (Пример 2.3.7 и теорема 2.3.14.) *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{5\times 6}.$$

Тогда $GMr(A) = 5$, $GMc(A) = 4$, $GMr(A^\top) = 4$, $GMc(A^\top) = 5$. *Матрица* A *содержит минимально возможные среди всех матриц* M *над* $\mathbb{R}_{\max}$ *числа строк и столбцов при условии* $GMr(M) > GMc(M)$. *Матрица* $A^\top$ *содержит минимально возможные среди всех матриц* M' *над* $\mathbb{R}_{\max}$ *числа строк и столбцов при условии* $GMc(M') > GMr(M')$.

Глава 3 посвящена исследованиям в области тропической алгебраической геометрии. В разделе 3.1 вводятся основные понятия тропической геометрии, которые дают обобщения классических понятий идеала, гиперповерхности и многообразия на тропический случай. В разделе 3.2 определяется понятие ранга Капранова тропической матрицы относительно базового поля $\mathbb{F}$ (обозначается через $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}$). Эта ранговая функция имеет непосредственную связь с проблемами тропической алгебраической геометрии, не имеет элементарного описания и поэтому не изучалась в предыдущих разделах. Мы отвечаем на вопрос Чан, Йенсена и Рубеи[18], приводя пример матрицы размера 6×6 с различными тропическим рангом и комплексным рангом Капранова.

Теорема 6. (Пример 3.2.17 и теорема 3.2.18.) *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{trop}(A) = 4$, $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(A) = 5$. *Матрица* A *содержит минимально возможные среди всех тропических матриц* M *числа строк и столбцов при условии* $trop(M) \neq K_{\mathbb{C}}(M)$.

В разделе 3.3 исследуются арифметические свойства ранга Капранова, мы показываем, что функция ранга Капранова может принимать на некоторых матрицах меньшее значения, а на некоторых — большее, чем функция ранга Гондрана–Мину. Мы показываем, что матрицы размера 5×5 с различными тропическим рангом и рангом Капранова существуют в том и только том случае, если базовое поле содержит не более трех элементов; это дает полное решение проблемы, поставленной Девелином, Сантосом и Штурмфельсом[16]. Кроме того, мы изучаем неравенство на ранг Капранова произведения матриц и доказываем следующую теорему.

Теорема 7. (Теорема 3.3.18.) *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. *Тогда* $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A \otimes B) \leqslant \min\{\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A), \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B)\}$, *если поле* $\mathbb{F}$ *бесконечно.*

Мы приводим примеры, показывающие, что утверждение предыдущей теоремы перестанет быть верным, если предположить, что $\mathbb{F}$ — некоторое конечное поле.

В разделе 3.4 исследуется связь функции ранга Капранова с понятием представимости матроидов. Приводится пример матрицы, показывающий, что 01-матрицы с различными рангом Капранова и тропическим рангом могут не быть матрицами коциклов непредставимых матроидов.

Утверждение 8. (Пример 3.4.17.) *Пусть*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{trop}(A) = 5$, $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A) = 6$ *для любого поля* $\mathbb{F}$.

Утверждение 8 позволяет построить контрпример к гипотезе Чан, Йенсена и Рубеи о тропическом базисе идеала кольца многочленов, порожденного всеми минорами порядка r матрицы переменных размера $d \times n$.

Теорема 9. (Теорема 3.4.18.) *Миноры порядка* 6 *матрицы переменных размера* 7×7 *не образуют тропического базиса.*

Заключение

Следующие результаты являются основными результатами работы и выносятся на защиту.

1. Решены проблема Штурмфельса, Девелина и Сантоса (2005 г.) о рангах Капранова тропических матриц размера 5×5, проблема Акян, Гобера и Гутермана (2008 г.) описания минимальных матриц с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана–Мину, проблема Чан, Йенсена и Рубеи (2011 г.) описания минимальных матриц с различными тропическим рангом и рангом Капранова; построен контрпример к гипотезе Чан, Йенсена и Рубеи (2011 г.) о тропическом базисе идеала кольца многочленов, порожденного всеми минорами порядка r матрицы переменных.

2. Разработан быстрый (т.е., работающий за время, ограниченное полиномиальной функцией размера матрицы) алгоритм проверки свойства, равен ли ранг Гондрана–Мину тропической матрицы любому наперед заданному числу k.

3. Введено и исследовано понятие шаблона матрицы, получен ряд следствий о взаимном поведении ранговых функций.

4. Изучены свойства рангов Капранова и Гондрана–Мину произведения матриц. В частности, доказаны классические неравенства для ранга

Гондрана–Мину и ранга Капранова в случае бесконечного базового поля; охарактеризован класс идемпотентных полуколец, для матриц над которыми справедливы классические неравенства для ранга Гондрана–Мину произведения матриц; доказано, что в случае конечного базового поля классические неравенства для ранга Капранова, вообще говоря, не выполняются.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Гутерману Александру Эмилевичу за постановку задач и помощь в работе. Автор выражает глубокую благодарность всему коллективу кафедры высшей алгебры за создание доброжелательной творческой атмосферы, способствующей научной работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Я. Шитов, Минимальный пример матрицы, различающей GM- и d-ранги в макс-алгебрах, *Фундаментальная и прикладная математика*, **14(4)**(2008), 231–268.

2. Ya. Shitov, Inequalities for Gondran–Minoux rank and idempotent semirings, *Linear Algebra Appl.*, **435(7)**(2011), 1769–1777.

3. Я. Шитов, Пример матрицы размера 6×6 с различными тропическим рангом и рангом Капранова, *Вестник Моск. Унив., Сер. 1. Математика. Механика*, **66(5)**(2011), 58–61.

4. Ya. Shitov, On the Kapranov ranks of tropical matrices, *Linear Algebra Appl.*, **436(9)**(2012), 3247–3253.

5. Я. Шитов, О матрицах с различными тропическим рангом и рангом Капранова, *Матем. заметки*, **92(2)**(2012), 316–320.

6. A. Guterman, Ya. Shitov, Tropical patterns of matrices and the Gondran-Minoux rank function, *Linear Algebra Appl.*, **437(7)**(2012), 1793–1811.

7. Ya. Shitov, Tropical matrices and group representations, *J. of Algebra*, **370**(2012), 1–4.

8. Ya. Shitov, On tropical matrices of small factor rank, *Linear Algebra Appl.*, **437**(2012), 2727–2732.

9. Ya. Shitov, Mixed subdivisions and ranks of tropical matrices, accepted for publication in *Proc. Amer. Math. Soc.*

10. Ya. Shitov, When do the r-by-r minors of a matrix form a tropical basis?, arXiv:1109.2240, submitted to *J. Combin. Theory Ser. A*.

Публикации в сборниках тезисов конференций

11. Ранговые неравенства для матриц над идемпотентными полукольцами. Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2010", отв. ред. И. А. Алешковский, П. Н. Костылев, А. И. Андреев, А. В. Андриянов. М., МАКС Пресс, 2010.

12. Когда миноры порядка r матрицы переменных образуют тропический базис? Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2011", отв. ред. А. И. Андреев, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов, М. В. Чистякова. М., МАКС Пресс, 2011.

13. When the r-by-r minors of a matrix form a tropical basis? III Int. Conf. on Matrix Methods in Mathematics and Applications (MMMA-2011), Moscow, 22–25 June 2011, Book of Abstracts (2011).

Работа [6] написана Я. Н. Шитовым в соавторстве с А. Э. Гутерманом. Разделы 1 и 3 этой работы были написаны А. Э. Гутерманом, разделы 2 и 4 принадлежат Я. Н. Шитову.