Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-Математический Факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Абакирова Айгуль Тилековна

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВЕРСИИ НЕРАВЕНСТВА ПУАНКАРЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА СОБОЛЕВА

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2012

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель	доктор физико–математических наук, профессор, академик РАН Ширяев Альберт Николаевич
Официальные оппоненты	доктор физико–математических наук, профессор Богачев Владимир Игоревич
	доктор физико–математических наук, профессор Павлов Игорь Викторович
Ведущая организация	Институт Проблем Передачи Информации РАН имени А. А. Харкевича

Защита диссертации состоится 5 октября 2012 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 5 сентября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Основные результаты диссертации относятся к стохастическим версиям таких классических функциональных неравенств, как неравенство Пуанкаре и логарифмическое неравенство Соболева. Неравенство Пуанкаре для гауссовских величин было сформулировано в работе Чернова[1] 1981г. в связи с классической изопериметрической задачей. Логарифмическое неравенство впервые появилось в статье Federbush[2], Gross[3] в 1975г. показал, что выполнение логарифмического неравенства Соболева для некоторой меры эквивалентно гиперсжимаемости марковской полугруппы, для которой данная мера является инвариантной, что положило начало дальнейшим исследованиям.

Логарифмические неравенства Соболева тесно связаны с такими классами функциональных неравенств как оптимальные транспортные неравенства, неравенства энтропии-информации и др., они интенсивно изучались в теории вероятностей, геометрии, статистической механике.

Известны различные доказательства классических неравенств[4]. В 2006г. Ширяев[5] предложил метод доказательства, основанный на использовании техники стохастического анализа и позволяющий сделать существенные обобщения. Отталкиваясь от метода, предложенного А.Н. Ширяевым, мы получаем неравенства для *безгранично делимых распределений* с указанием оптимальных констант. Применяемый метод основан на идее вложения таких случайных величин в безгранично делимый процесс, для которого удается доказать аналоги рассматриваемых неравенств. Мы получаем неравенства Пуанкаре и лог-Соболева в неоднородном случае, для *процессов с независимыми приращениями* с произвольной структурой скачков.

Процессы с независимыми приращениями оказывается естественным рассматривать во многих задачах, и соответствующие модели

[1] H. Chernoff, *A note on an inequality involving the normal distribution*, Annals Probab., 9:3, 1981, 533–535.

[2] P. Federbush, *A partially alternate derivation of a result of Nelson*, J. Math. Phys. 10 (1969), 50–52.

[3] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math., 97(4), 1975, 1061–1083.

[4] C. Ane, S. Blachere et al., *Sur les inegalites de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Syntheses, vol. 10, Soc. Math. de France, 2000.

[5] А.Н. Ширяев, *Доказательство неравенства Пуанкаре - Чернова и логарифмического неравенства Соболева методами стохастического исчисления для броуновского движения*, Успехи математических наук, **61**:3(2006), 177-178.

приобретают популярность, причем наряду с непрерывным случаем необходимо рассматривать модели со скачками.

Метод, предложенный нами в доказательстве, представляет собственный интерес. Оценки получены в терминах триплета локальных характеристик, и работа может быть продолжена в более общих рамках марковских семимартингалов. Как известно, семимартингалы представляют широкий класс процессов, устойчивый относительно многих преобразований, для которого развит аппарат стохастического исчисления.

С помощью мартингального метода нам удается получить *обратные неравенства* для процессов с независимыми приращениями.

Мы рассматриваем *обобщенные гиперболические процессы*, подкласс разрывных процессов Леви, для которых триплет семимартингальных характеристик, а значит, и полученные оценки выражаются через параметры. Такие процессы хорошо моделируют финансовые данные (Barndorff-Nielsen, Shiryaev[6], Eberlein[7]).

Принципиальным преимуществом логарифмических неравенств Соболева является их независимость от размерности, что, например, неверно для обычных неравенств Соболева. Пусть логарифмическое неравенство выполняется на двух различных пространствах, тогда оно верно для произведения пространств с константой равной максимуму исходных. Подобное свойство тензоризации позволяет логарифмическим неравенствам стать мощным средством *бесконечномерного анализа.*

Метод доказательства, основанный на использовании стохастического анализа, интегральных представлений, в отличие от популярного в литературе метода полугрупп, работает в бесконечной размерности. Мы доказываем аналоги *неравенств* Φ *– Соболева* в бесконечномерном случае для процессов с независимыми приращениями, полученные результаты в общем случае не могут быть улучшены. Также для функционалов на пространстве траекторий процессов с независимыми приращениями мы устанавливаем верхние и нижние оценки для дисперсии через кратные производные, которые в частном случае дают неравенство Пуанкаре. Данные неравенства впервые были доказаны

[6]O.E. Barndorff-Nielsen, A.N. Shiryaev, *Change of time and change of measure*, World Scientific 2010.

[7]E. Eberlein, *Application of generalized hyperbolic Levy motions to finance*. In: O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, and S. Resnick (Eds.). Levy Processes - Theory and Applications. Boston: Birkhauser, 2001, 319-336.

для гауссовских случайных величин в Houdre, Kagan[8], для броуновского движения и стандартного пуассоновского процесса в Houdre, Perez-Abreu[9] и Privault[10]. Мы с помощью метода хаотических разложений и техники пространства Фока получаем неравенства для процессов общего вида с непрерывной и разрывной частью, в неоднородном случае и для скачков произвольного типа.

Следующий результат диссертации относится к оценкам в неравенствах Пуанкаре и лог-Соболева для *скошенного броуновского движения.* Ito, McKean[11] дали траекторное определение процесса и нашли функцию масштаба и меру скорости для этой диффузии, Walsh[12] вычислил генератор и переходные плотности процесса. Harrison, Shepp[13] показали, что скошенное броуновское движение - единственное сильное решение стохастического уравнения с локальным временем.

Скошенное броуновское движение не является ни гауссовским процессом, ни процессом с независимыми приращениями, и техника из предыдущих задач, например, формула Кларка-Окона, не применима. Скошенное броуновское движение - пример диффузии, с помощью которой можно моделировать среду с мембраной, коэффициент сноса равен дельта - функции в нуле, возникает специальный анализ. Различные точки зрения на скошенное броуновское движение, его применения, возможные обобщения процесса можно найти в Lejay[14].

В последние 15 лет появилась обширная литература относительно рассматриваемых неравенств и их применений, и тема постоянно продолжает развиваться. Эффективность логарифмических неравенств в бесконечномерном анализе продемонстрирована в статистической механике, анализе на пространствах траекторий и решеток. Одними из

[8] C. Houdre and A. Kagan, *Variance inequalities for functions of Gaussian variables*, J. Th. Probab., 8, 1995, 23-30.

[9] C. Houdre and V. Perez-Abreu, *Covariance identities and inequalities for functionals on Wiener and Poisson spaces*, Ann. Probab., 23, 1995, 400-419.

[10] N. Privault, *Extended covariance identities and inequalities*, Statistics and Probability Letters 55, 2001, 247-255.

[11] K. Ito, H. McKean, *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, 2 ed., Springer-Verlag, 1974.

[12] J. Walsh, *A diffusion with a discontinuous local time*, Asterisque, 52-53, 1978, 37–45.

[13] J. M. Harrison, L. A. Shepp, *On skew Brownian motion*, Ann. Probab., **9**:2, 1981, 309–313.

[14] A. Lejay, *On the constructions of the skew Brownian motion*, Probab. Surveys, **3**, 2006, 413–466.

стандартных применений логарифмических неравенств являются различные результаты по концентрации меры (см., например, Ledoux[15]).

Различные версии логарифмического неравенства Соболева оказались полезными в таких областях математики как теория вероятностей, дифференциальные уравнения, комбинаторика.

Принимая во внимание постоянный интерес и быстрое развитие в представленной области обобщений неравенств Пуанкаре и логарифмического Соболева проведенное исследование является актуальным и полезным. Более того, необходимая техника стохастического анализа является достаточно сложной, интересной и современной.

Цель работы

Целью диссертационной работы является получение стохастических версий классических функциональных неравенств. Получены неулучшаемые оценки функционалов типа дисперсии и энтропии для различных распределений.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Доказаны аналоги неравенств Пуанкаре и логарифмического Соболева для безгранично делимых случайных величин и процессов с независимыми приращениями, найдены неулучшаемые оценки. Получены двусторонние версии неравенств. В случае обобщенных гиперболических процессов получено выражение оценок через параметры.

2. В бесконечномерном случае для процессов с независимыми приращениями установлены неравенства для $\Phi-$ энтропий. Доказаны оценки для дисперсии с кратными производными, которые на первом шаге дают неравенство Пуанкаре.

3. Получены версии неравенств для скошенного броуновского движения. В данном случае оценки зависят от локального времени процесса.

Методы исследования

Методика исследования основана на общих методах стохастического анализа, использовании мартингальной техники, интегральных

[15] M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities*, Seminaire de Probabilites XXXIII Lecture Notes in Math. 1709 (1999), 120–216.

представлений. Применяются методы бесконечномерного анализа, хаотические разложения и др.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть полезными при изучении мартингальных методов оценок функционалов от случайных процессов. Развитый подход достаточно общий и может быть применен в других задачах. Результаты работы могут быть использованы при решении задач в бесконечной размерности для процессов с независимыми приращениями, анализе обобщенных диффузий и решений стохастических уравнений с локальным временем.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на Большом семинаре кафедры теории вероятностей под рук. академика РАН А.Н. Ширяева (МГУ им. М. В. Ломоносова, 2012г.), семинаре "Стохастический анализ и случайные процессы" под рук. академика РАН А.Н. Ширяева (МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008-2011 гг.), семинаре "Стохастический анализ: теория и приложения" под рук. академ. РАН А. Н. Ширяева и проф. А. А. Гущина (МИАН им. В. А. Стеклова, 2011г.).

Также были сделаны доклады на следующих международных конференциях: XIX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов" (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2012г.), Шестом коллоквиуме Башелье по финансовой математике и стохастическому исчислению (Метабьеф, Франция, 2012г.), Российско-японском симпозиуме "Стохастический анализ и сложные статистические модели" (МИАН им. В. А. Стеклова, Москва, 2009г.), Российско-японской конференции "Сложные стохастические модели: асимптотика и применения" (МИАН им. В. А. Стеклова, Москва, 2007г.).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора, из них 3 в журналах из перечня ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 75 страниц. Список литературы включает 64 наименования, в том числе 5 работ автора по теме диссертации.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Настоящая диссертация посвящена стохастическим версиям известных неравенств Пуанкаре и логарифмического Соболева. Пусть ξ – стандартная нормальная случайная величина, $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, функция $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\lambda)$, где $\lambda = \mathrm{Law}\,\xi$. *Неравенство Пуанкаре* утверждает, что

$$\mathsf{D}f(\xi) \leq \mathsf{E}(f'(\xi))^2.$$

Предположим, что $f \in C^1(\mathbb{R}),\ f, f' \in L^2(\lambda)$. Тогда из *логарифмического неравенства Соболева* следует, что $f \in L^2 \log L(\lambda)$ и

$$\mathsf{Ent} f^2(\xi) \leq 2\,\mathsf{E}(f'(\xi))^2,$$

где $\mathsf{Ent} f^2(\xi) := \mathsf{E} f^2(\xi) \log f^2(\xi) - \mathsf{E} f^2(\xi) \log \mathsf{E} f^2(\xi)$, константы в неравенствах неулучшаемы.

С помощью метода Хербста логарифмическое неравенство Соболева влечет различные результаты концентрации меры. Например, неравенство может быть использовано для оценки хвостов липшицевых функций. Пусть для случайной величины ξ выполняется логарифмическое неравенство Соболева, т.е. для некоторого класса функций $\mathcal{A}$ верно: $\exists c > 0$, т.ч. $\forall f \in \mathcal{A}\quad \mathsf{Ent} f^2(\xi) \leq c\mathsf{E}(f'(\xi))^2$. Тогда для любой липшицевой функции g, такой что $||g||_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, верна оценка

$$P(g(\xi) - \mathsf{E}g(\xi) \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{c}} \quad \forall x \geq 0.$$

Феномен концентрации меры оказывается полезным в статистике, дискретной математике, геометрии.

Во **Введении** к диссертации мы рассказываем о задачах, в связи с которыми возникают неравенства Пуанкаре и лог-Соболева, рассматриваем их связи с другими классами функциональных неравенств, указываем на применения неравенств.

Известны различные доказательства классических неравенств. Например, рассматриваются бернуллиевские случайные величины и применяется предельная теорема или берется полугруппа Орнштейна - Уленбека, для которой гауссовская мера инвариантна, и используется метод полугрупп.

В 2006г. А.Н. Ширяев предложил метод доказательства неравенств Пуанкаре -Чернова и логарифмического Соболева, основанный на привлечении броуновского движения и использовании его стандартных свойств. Будем представлять случайную величину ξ в качестве маргинального значения броуновского движения $B = (B_t)_{t\geq 0}$. Тогда для $T \geq 0$ верно

$$\mathsf{D}\, f(B_T) \leq T\mathsf{E}(f'(B_T))^2 \quad \text{и} \quad \mathsf{Ent}\, f^2(B_T) \leq 2T\mathsf{E}(f'(B_T))^2.$$

Предложенный метод опирается на технику стохастического анализа и позволяет сделать существенные обобщения.

В **Главе 1** мы получаем оценки в неравенствах Пуанкаре и лог-Соболева для произвольных безгранично делимых случайных величин и для процессов с независимыми приращениями, сложность при переходе к более общему классу процессов вносит наличие скачков.

Пусть ξ– произвольная безгранично делимая случайная величина, существует процесс Леви $X = (X_t)_{t\geq 0}$, такой что $\mathrm{Law}\xi = \mathrm{Law}X_1$. Мы получим неравенства для более широкого класса процессов $X = (X_t)_{t\geq 0}$, а именно, для стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями. Запишем для процесса X каноническое представление

$$X_t = X_0 + B(t) + X_t^c + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} h(x)\, d(\mu - \nu) + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} (x - h(x))\, d\mu, \quad t \geq 0,$$

здесь $B(t)$ – детерминированная функция ограниченной вариации, X_t^c – гауссовский непрерывный процесс, $C_t := \langle X^c \rangle_t$, $\mu(dt, dx, w)$– мера скачков процесса X, $\nu(dt, dx)$– компенсатор μ и $h(x) = xI_{\{|x|\leq 1\}}$– функция урезания. Будем рассматривать фильтрацию $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$. Мы получаем оценки в *неравенствах Пуанкаре и лог-Соболева* для процессов с независимыми приращениями в терминах триплета локальных характеристик процесса.

Теорема 1.1 *Пусть* $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{P}_{X_T})$. *Тогда*

$$\mathsf{D}f(X_T) \leq C_T\mathsf{E}(f'(X_T))^2 + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} \mathsf{E}(f(X_T + y) - f(X_T))^2 \nu(dt, dy),$$

$$\mathsf{Ent}\, f^2(X_T) \leq 2C_T\mathsf{E}(f'(X_T))^2 + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} \mathsf{E}\psi(f^2, f^2(X_T + y) - f^2(X_T))\, \nu(dt, dy),$$

здесь функция $\psi(x, y) := g(x + y) - g(x) - g'(x)y$,
где $g(x) = x\log x$; *для нее верно, например,* $\psi(x, y) \leq \frac{y^2}{x}$.

Идея обращения к случайным процессам состоит в том, что их динамика позволяет применить формулу Ито и уравнения Колмогорова. Доказательство основано на мартингальной технике, использовании интегральных представлений, стохастической экспоненты.

Оказываются верны симметричные *обратные неравенства*. Будем представлять для простоты, что X_T– маргинальное распределение процесса Леви, в этом случае $C_T = c^2T,\ \nu(dt,dz) = dt\,\nu(dz)$. Обозначим $\widetilde{D}_z f = \widetilde{D}_{T,z} f := f(X_T+z) - f(X_T),\ f := f(X_T)$.

Теорема 1.2 *Пусть* $f \in C^1(\mathbb{R}),\ f, f' \in L^2(\mathbb{P}_{X_T})$. *Тогда*

$$c^2T(\mathsf{E}f'(X_T))^2 + T\int_{\mathbb{R}} (\mathsf{E}\widetilde{D}_z f)^2 \nu(dz) \le \mathsf{D}\, f(X_T)$$

$$\le c^2T\mathsf{E}(f'(X_T))^2 + T\int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}(\widetilde{D}_z f)^2 \nu(dz),$$

$$\tfrac{1}{2}\, c^2T\frac{(\mathsf{E}f')^2}{\mathsf{E}f} + T\int_{\mathbb{R}} \psi(\mathsf{E}f, \mathsf{E}\widetilde{D}_z f)\, \nu(dz) \le \mathsf{Ent}\, f$$

$$\le \tfrac{1}{2}\, c^2T\mathsf{E}\frac{(f')^2}{f} + T\mathsf{E}\int_{\mathbb{R}} \psi(f, \widetilde{D}_z f)\, \nu(dz).$$

Нижняя оценка энтропии для функций от стандартной гауссовской случайной величины была доказана в статье Chafai[16], в этом случае достаточно применить неравенство Коши-Шварца.

Модели с процессами Леви естественным образом обобщают модели, основанные на винеровском и пуассоновском процессах, и активно используются в приложениях.

Представляет интерес особый класс разрывных процессов Леви - *обобщенные гиперболические процессы.* Данные процессы порождаются двумя источниками случайности и широко применяются в финансовом моделировании. Будем называть обобщенным гиперболическим процесс $X_t = \mu t + \beta T_t + B_{T_t}, t \ge 0$, где $\mu, \beta \in \mathbb{R}, T_t$– субординатор, заданный с помощью обобщенного обратного гауссовского распределения, и броуновское движение B и процесс T независимы. Barndorff-

[16] D. Chafai, *Gaussian maximum of entropy and reversed logarithmic Sobolev inequality*, Seminaire de Probabilites XXXVI, Lecture Notes in Math. 1801, Springer, Berlin, 2003, 194–200.

Nielsen, Halgreen[17] показали, что обобщенные обратные гауссовские и гиперболические распределения относятся к безгранично делимым. Данные распределения образуют обширный класс, к которому относятся многие известные распределения. Интерес к обобщенным гиперболическим процессам состоит в том, что их плотности, плотности мер Леви и другие характеристики явно записываются через 5 параметров. В наших неравенствах оценки выражаются в терминах триплета характеристик $T_X = (B, C, \nu)$, это позволяет нам получить различные выражения для правой части неравенств через параметры, применяется техника замены времени.

Важным свойством неравенств лог-Соболева является независимость от размерности, таким образом, они могут быть обобщены для бесконечномерных ситуаций. Аналог логарифмического неравенства для функционалов от траекторий броуновского движения доказан в работе Capitaine, Hsu, Ledoux[18]. Под производной в данном случае понимается производная по направлению для броуновского движения. Исчислению Маллявена посвящена книга Nualart[19], Privault[20] предлагает изложение анализа на винеровском и пуассоновском пространствах с общей точки зрения нормальных мартингалов. Оказывается, что данный анализ может быть продолжен для процессов Леви, процессов с независимыми приращениями.

Глава 2 диссертации посвящена неравенствам типа лог-Соболева и близким неравенствам *в бесконечномерном случае* для процессов с независимыми приращениями. В логарифмическом неравенстве Соболева, Теорема 2.1, под производной функционала от траектории процесса мы понимаем производную по направлению броуновского движения (производная Маллявена), в качестве дифференциального для скачковой части процесса берется разностный оператор. Оказывается, что данные операторы совпадают с операторами уничтожения в представлении пространства Фока.

---

[17] O. Barndorff-Nielsen, C. Halgreen, *Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 38, 309-312 (1977).

[18] M. Capitaine, E.P. Hsu and M. Ledoux, *Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces*, Electron. Comm. Probab. 2 (1997), 71–81 (electronic).

[19] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer-Verlag, 2nd ed., 2006.

[20] N. Privault, *Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings: With Normal Martingales*, Springer, 2009.

Перенесем полученные результаты на случай так называемых Ф-энтропий или J-дивергенций (от Jensen).

Определение. Пусть Φ – гладкая выпуклая функция. Тогда

$$\mathrm{Ent}^{\Phi} F := \mathsf{E}\Phi(F) - \Phi(\mathsf{E}F),$$

дисперсия и энтропия получаются при $\Phi(x) = x^2$ и $x \log x$. Функционалы такого типа возникают в различных задачах выпуклого анализа.

Мы получаем неравенство Ф–Соболева для функционалов от процессов с независимыми приращениями.

Теорема 2.2 *Пусть $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^X, P)$. Имеет место неравенство*

$$\mathrm{Ent}^{\Phi} F \leq \frac{1}{2} \mathsf{E}\, \Phi''(F) \int\limits_0^T |D_t F|^2 \, dC_t + \mathsf{E} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} \psi^{\Phi}(F, D_{t,z}F)\, \nu(dt, dz),$$

где $D_t F$– производная Маллявена, $D_{t,z}F$– разностный оператор, $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, функция $\psi^{\Phi}(x,y) = \Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi'(x)y$.

В тех же предположениях, что в Теореме 1.2, мы доказываем следующую двустороннюю оценку.

Теорема 2.3 *Верно неравенство*

$$\tfrac{1}{2}\, c^2 T \Phi''(\mathsf{E}f)(\mathsf{E}f')^2 + T \int\limits_{\mathbb{R}} \psi^{\Phi}(\mathsf{E}f, \mathsf{E}\widetilde{D}_z f)\, \nu(dz) \leq \mathrm{Ent}^{\Phi} f$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\, c^2 T \mathsf{E} \Phi''(f)(f')^2 + T\mathsf{E} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi^{\Phi}(f, \widetilde{D}_z f)\, \nu(dz).$$

От функции Φ необходимо потребовать, чтобы функции $\phi^{\Phi} := \Phi''(x)y^2$ и ψ^{Φ} были выпуклыми и неотрицательными. Примеры функций Φ, удовлетворяющих этим условиям: $x^2,\ x\log x,\ x^p$ $(1<p<2)$.

Наряду с оценками энтропии интерес представляют оценки дисперсии функционала. Мы доказываем следующие *неравенства для дисперсии с кратными производными*, которые на первом шаге превращаются в *неравенство Пуанкаре*.

Теорема 2.4. *Пусть $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^X, P)$. Верна следующая оценка*

$$\mathrm{D}\, \mathrm{F} \leq \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} (\mathsf{E}|D^k F|_k^2 + \mathsf{E}|\widetilde{D}^k F|_k^2),$$

где D^k– k-ая производная Маллявена, $\widetilde{D}^k$– k-ая итерация разностного оператора, $F \in \mathbb{D}^{k,2}$, $k = \overline{1,2n-1}$.

Здесь $|D^kF|^2_{k} = \int_{\Delta_k}(D_{t_k}...D_{t_1}F)^2\, dC_{t_1}...dC_{t_k}$, *где* $\Delta_k=\{(t_1...t_k)\colon 0\le t_1<...<t_k\le T\}$,
и $|\widetilde{D}^kF|^2_{k} = \int_{\Delta_k\times\mathbb{R}^k}(D_{t_k,x_k}...D_{t_1,x_1}F)^2\,\nu(dt_1,dx_1)...\nu(dt_k,dx_k)$.

Заметим, что данная верхняя оценка не будет убывающей при росте n.

Теорема 2.5. *Пусть* $F \in L^2(\Omega,\mathcal{F}^X_T,P)$. *Имеет место нижняя оценка*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}|\mathsf{E}D^kF|^2_{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}|\mathsf{E}\widetilde{D}^kF|^2_{k} \le \mathrm{D\,F}$$

(*здесь* $|\cdot|_{k} = |\cdot|_{L^2([0,T]^k,\cdot)}$)
Для процессов с независимыми приращениями верна теорема о хаотическом разложении: $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, где $I_n(f_n)$–многомерный интеграл от симметрической функции f_n по мере, порожденной процессом. Наша оценка будет следствием изометрии:

Утверждение. Пусть $F \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\mathbb{D}^{k,2}$. Тогда

$$\mathrm{D}F = \sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}(I_k(f_k))^2 = \sum_{k=1}^{\infty}k!|f_k|^2_{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}|\mathsf{E}D^kF|^2_{k}$$

(соответственно $\widetilde{D}^k$ для разрывной части X).

Глава 3 диссертации посвящена версиям неравенств Пуанкаре и лог-Соболева для *скошенного броуновского движения.* Рассмотрим стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t\ge 0}$. Будем представлять себе скошенное броуновское движение как процесс, полученный путем изменения знака каждой экскурсии B из нуля независимо, так что данная экскурсия положительна с вероятностью α и отрицательна с вероятностью $1-\alpha$ (Itô, McKean[11]). Скошенное броуновское движение - диффузионный процесс, интересный с разных точек зрения (Lejay[14]), в главе 3 мы приводим несколько конструкций процесса.

Определение. Скошенное броуновское движение с параметром $\alpha \in [0,1]$ - единственное сильное решение стохастического уравнения

$$X_t = B_t + (2\alpha-1)L^0_t(X), \quad t\ge 0,$$

где B– стандартное броуновское движение и $L^0(X)$– локальное время неизвестного процесса X в нуле (Harrison, Shepp[13]).

Мы получаем версии неравенств Пуанкаре и лог-Соболева для скошенного броуновского движения, оказывается, что оценки зависят от локального времени процесса.

Теорема 3.1. *Пусть функция* $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\lambda)$, *где* $\lambda = \mathrm{Law}\, X_T$. *Тогда*

$$\mathsf{D} f(X_T) \le \mathsf{E}(\gamma f_1^2\,(X_T) + (T-\gamma) f_2^2\,(X_T)),$$

где $\gamma = \int\limits_0^\infty L_T^x\,dx$, *другими словами*, $\gamma = \int\limits_0^T \mathrm{I}(X_t > 0)\,dt$– *время, которое скошенное броуновское движение проводит на верхней полуплоскости*, $0 \le \gamma \le T$,
$f_1(x) = f'(x) - \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} f'(-x)\mathrm{I}_{\{x<0\}}$,
$f_2(x) = f'(x) + \frac{2\alpha-1}{\alpha} f'(-x)\mathrm{I}_{\{x>0\}},\ \alpha \in (0,1)$.

В свою очередь

$$\mathrm{Ent}\, f^2(X_T) \le 2\, E(\gamma(g_1\,(X_T))^2 + (T-\gamma)(g_2\,(X_T))^2),$$

где
$g_1(x) = f'(x) - \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} f'(-x)\frac{f(-x)}{f(x)}\mathrm{I}_{\{x<0\}}$,
$g_2(x) = f'(x) + \frac{2\alpha-1}{\alpha} f'(-x)\frac{f(-x)}{f(x)}\mathrm{I}_{\{x>0\}},\ \alpha \in (0,1)$.

При $\alpha = \frac{1}{2}, 1$ (или 0), когда процесс совпадает по распределению со стандартным броуновским движением или его модулем (умноженным на -1), полученные неравенства принимают классический вид. Скошенное броуновское движение - это обобщенная диффузия, коэффициент сноса не определен в нуле. Этот эффект переносится в обратное уравнение в виде переходного условия на производную в нуле (Lejay[14]), в доказательстве мы используем обобщенную версию формулы Ито-Танака для функций, терпящих разрыв на границе (Peskir, Shiryaev[21]), формулу для локального времени (occupation times formula) и др. Таким образом, для получения оценок в неравенствах потребовался специальный анализ.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю академику РАН, д.ф.-м.н., профессору А. Н. Ширяеву за постановку задач, постоянное внимание и интерес к работе.

[21] G. Peskir, A. N. Shiryaev, *Optimal stopping and free boundary problems*, Birkhäuser, Basel, 2006.

Работы автора по теме диссертации

[1] А.Т. Абакирова, *Аналоги неравенства Пуанкаре - Чернова и логарифмического неравенства Соболева для процессов с независимыми приращениями*, Успехи математических наук, **62**:6(2007), 162-163.

[2] А.Т. Абакирова, *Функциональные неравенства на пространствах траекторий процессов с независимыми приращениями*, Успехи математических наук, **67**:2(2012), 191-192.

[3] А.Т. Абакирова, *Аналоги неравенства Пуанкаре - Чернова и логарифмического неравенства Соболева для процессов с независимыми приращениями.* Тезисы докладов Российско-Японского Симпозиума "Стохастический анализ и сложные статистические модели", Москва, 2009. Теория вероятностей и ее применения, 55:3 (2010), 610-611.

[4] А.Т. Абакирова, *Стохастические версии неравенств Пуанкаре и логарифмического Соболева.* Тезисы докладов секции "Математика и механика" Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Москва, 2012, с. 1.

[5] А.Т. Абакирова, *О некоторых функциональных неравенствах для скошенного броуновского движения*, деп. в ВИНИТИ, 17.04.2012, №153-В2012, 11 стр.