Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Булинская Екатерина Владимировна

Ветвящиеся процессы Беллмана-Харриса и их применения к ветвящимся случайным блужданиям

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Яровая Елена Борисовна
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Ватутин Владимир Алексеевич ведущий научный сотрудник отдела дискретной математики Математического института имени В.А.Стеклова РАН
	доктор физико-математических наук, профессор Топчий Валентин Алексеевич директор Омского филиала Института математики имени С.Л.Соболева СО РАН
Ведущая организация:	Институт проблем передачи информации имени А.А.Харкевича РАН

Защита диссертации состоится 5 октября 2012 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 5 сентября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Актуальность

Теория ветвящихся процессов – это раздел теории вероятностей, изучающий эволюцию популяции объектов, размножающихся и гибнущих в соответствии с определенными правилами, в которых главную роль играет случайность. В самых первых работах по теории ветвящихся процессов в качестве объектов выступали человеческие индивидуумы, и основной интерес для исследователей представлял вопрос об исчезновении известных фамилий. В современных приложениях объектами могут служить гетерозиготы, являющиеся носителями мутантного гена[1], или клиенты, ожидающие в системе очередей[2], или нейтроны в ядерном реакторе[3]. Термин "ветвящийся процесс" был впервые предложен А.Н. Колмогоровым и Н.А. Дмитриевым в их фундаментальной статье 1947 года, посвященной анализу эволюции популяций вероятностными методами. Фактически ими был создан новый раздел теории стохастических процессов. Однако теория ветвящихся процессов уходит своими корнями в середину XIX века, когда была опубликована статья Ф.Гальтона и Г.В.Ватсона о вероятности вырождения фамилий. Позднее их модель эволюции популяции получила название ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона, который может быть кратко описан следующим образом. Процесс начинается в момент $n = 0$ с одного индивидуума (или частицы). Индивидуумы (или частицы), существующие в момент $n = 0, 1, \ldots$, погибают в момент $n + 1$, производя перед гибелью независимо друг от друга случайное число потомков в соответствии с данной вероятностной производящей функцией. Вероятность невырождения популяции и асимптотическое поведение численности популяции при $n \to \infty$ стали основными объектами изучения.

[1] Haccou P., Jagers P., Vatutin V. A. *Branching Processes in Biology.* Cambridge University Press, 2005.

[2] Grishechkin S.A., Devetsikiotis M., Lambadaris I., Hobbs Ch. Multistability in queues with retransmission and its relationship with large deviations in branching processes. *Теория вероятн. и примен.*, 2002, 47(1):188–199.

[3] Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы.* Наука, Москва, 1971.

В отличие от модели Гальтона и Ватсона, в более общем процессе Беллмана-Харриса (1948) каждая частица, независимо от остальных, живет *случайное время*, распределенное по заданному закону.

Другое направление развития теории ветвящихся процессов состоит в рассмотрении частиц нескольких типов. Наряду с многотипными процессами Гальтона-Ватсона вводятся процессы Беллмана-Харриса с *несколькими типами частиц*. Для многотипных ветвящихся процессов ставятся новые сложные задачи, относящиеся уже к изучению не популяции в целом, а ее отдельных частей, состоящих из частиц определенного типа. Так, в нашей работе решена задача об асимптотическом поведении численностей частиц разных типов в двутипном *неразложимом* ветвящемся процессе Беллмана-Харриса определенного вида. *Разложимые* процессы Беллмана-Харриса с двумя типами частиц исследовались ранее[4,5].

Еще одну важную область теории ветвящихся процессов составляют процессы с перемещением частиц в пространстве, которые были введены Б.А. Севастьяновым в 1958 году. С тех пор моделям ветвящихся случайных блужданий (ВСБ) было посвящено множество публикаций. Модель *симметричного* ветвящегося случайного блуждания (СВСБ) по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с одним источником ветвления была предложена Е.Б. Яровой в 1991 году. Процесс такого рода впоследствии исследовался во многих работах[6,7,8,9]. В статье В.А. Ватутина, В.А. Топчия и Е.Б. Яровой (2004) авторы определили новую модель крити-

[4] Зубков А.М. Предельное поведение разложимых критических ветвящихся процессов с двумя типами частиц. *Теория вероятн. и примен.*, 1982, 27(2):228–238.

[5] Ватутин В.А., Сагитов С.М. Критические разложимые процессы Беллмана-Харриса с двумя типами частиц, "далекие" от марковских. *Матем. заметки*, 1988, 43(2):276–282.

[6] Albeverio S., Bogachev L. Branching random walk in a catalytic medium I. Basic equations. *Positivity*, 2000, 4(1):41–100.

[7] Яровая Е.Б. *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*. МГУ, Москва, 2007.

[8] Doering L., Roberts M.I. *Catalytic branching process via spine techniques and renewal theory*. arXiv:1106.5428v4, 2012.

[9] Carmona Ph., Hu Y. *The spread of a catalytic branching random walk*. arXiv:1202.0637v1, 2012.

ческого *каталитического* ветвящегося случайного блуждания (КВСБ) по $\mathbb{Z}$, являющуюся несколько более общей по сравнению с критическим СВСБ по $\mathbb{Z}$. Обобщение состоит во введении дополнительного параметра, отвечающего за соотношение между "ветвлением" и "блужданием" в источнике ветвления, из-за чего генератор случайного блуждания перестает быть симметричным. В последующих публикациях В.А. Ватутина, В.А. Топчия, Е.Б. Яровой и автора диссертации описание КВСБ было продолжено для случая целочисленной решетки произвольной конечной размерности. Анализ, проведенный в этих статьях, показал, что, как и для многих разновидностей ветвящихся процессов, КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ может быть классифицировано как надкритическое, критическое или докритическое в зависимости от соотношения между параметрами, участвующими в описании модели. В диссертации изучается критическое КВСБ, поскольку в этом случае возникают новые эффекты, связанные с влиянием размерности решетки $\mathbb{Z}^d$ на предельное распределение численностей частиц. Эти эффекты не проявляются в более простых случаях надкритического[10] и докритического[11] КВСБ, поэтому в данной работе не обсуждаются. Отметим тесную связь между КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ и суперпроцессами, а именно, каталитическим супер-броуновским движением с одной точкой катализа[12,13]. Подчеркнем также, что ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления служит отправным пунктом при изучении более сложных моделей ВСБ с несколькими источниками ветвления[14].

---

[10] Яровая Е.Б. Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий. *Теория вероятн. и примен.*, 2010, 55(4):705-731.

[11] Bulinskaya E.Vl. Asymptotic Behavior of Subcritical Branching Random Walk. *Abstracts of Commun. Int. Conf. "Modern Stochastics: Theory and Applications III"*, Kiev, September 10-15, 2012, 111.

[12] Fleischmann K., Le Gall J-F. A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion. *Probab. Theory Related Fields*, 1995, 102:63–82.

[13] Kaj I., Sagitov S. Limit processes for age-dependent branching particle systems. *J. Theor. Probab.*, 1998, 11(1):225–257.

[14] Яровая Е.Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий. *Матем. заметки*, 2012, 92(1):47–72.

Еще одна тема, затронутая в диссертации, относится к обширной области исследования случайных блужданий по целочисленным решеткам. Ранее в рамках модели случайного блуждания изучались времена первого достижения некоторого состояния[15,16], а для марковских процессов оценивались вероятности с запретами[17,18]. В данной диссертации впервые вводится понятие *времени достижения с запретом* и анализируются его свойства. Полученные результаты применяются при изучении КВСБ по $\mathbb{Z}^d$.

Таким образом, представленная работа посвящена решению актуальных задач в области предельных теорем современной теории вероятностей.

Цель работы

Цель настоящей диссертации состоит в том, чтобы доказать новые предельные теоремы для численностей частиц разных типов в неразложимом критическом ветвящемся процессе Беллмана-Харриса с двумя типами частиц, исследовать асимптотическое поведение функций распределения времен достижения с запретом для симметричного, однородного по времени и пространству, неразложимого случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с конечной дисперсией скачков, а также изучить предельные свойства локальных численностей частиц в модели критического каталитического ветвящегося случайного блуждания по целочисленной решетке.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные из них:

---

[15] Kesten H., Spitzer F. Ratio theorems for random walks II. *J. d'Analyse Mathématique*, 1963, 9:285–322.

[16] Doney R.A., Korshunov D.A. Local asymptotics for the time of the first return to the origin of transient random walk. *Statist. and Probab. Lett.*, 2011, 81:1419–1424.

[17] Чжун К.Л. *Однородные цепи Маркова.* Мир, Москва, 1964.

[18] Зубков А.М. Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения. *Матем. сб.*, 1979, 109(4):491–532.

1. Установлено условное совместное предельное распределение должным образом нормированных численностей частиц первого и второго типов в критическом неразложимом ветвящемся процессе Беллмана-Харриса с двумя типами частиц при условии невырождения популяции частиц одного типа.

2. Найдена вероятность того, что времена достижений с запретами конечны, и выявлено асимптотическое поведение хвостов функций распределения этих времен для симметричного, однородного по времени и пространству, неразложимого случайного блуждания с конечной дисперсией скачков.

3. Исследовано асимптотическое по времени поведение вероятности наличия частиц в любой фиксированной точке решетки $\mathbb{Z}^d$ в модели критического каталитического ветвящегося случайного блуждания при старте процесса в произвольной точке на $\mathbb{Z}^d$.

4. Получены условные предельные теоремы для надлежащим образом нормированного числа частиц в каждой фиксированной точке решетки $\mathbb{Z}^d$ в модели, упомянутой в пункте 3.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно. Точные формулировки установленных автором утверждений приведены ниже.

Методы исследования

При доказательстве результатов нами использовались разнообразные методы исследования, как теоретико-вероятностные, так и аналитические. Для изучения времен достижения с запретом в рамках модели случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) важную роль играет применение преобразования Лапласа и тауберовых теорем для правильно меняющихся обобщенных функций распределения и их плотностей[19], а при $d \geq 3$ – представление комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр[20] и теория восстановления[21]. Подходы к исследованию локальных численностей частиц в КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ также существенно различаются в зависимости от d. Например, для старших размерностей эффективным оказывается метод введения вспомогательного ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц. При этом для всех $d \in \mathbb{N}$ плодотворным является применение спектральной теории операторов и техники дифференциальных уравнений Колмогорова, рассматриваемых в банаховых пространствах. Кроме того, для получения результатов, относящихся к процессам Беллмана-Харриса и КВСБ по $\mathbb{Z}^d$, анализируются решения нелинейных интегральных уравнений, зависящих от параметра.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут использоваться специалистами Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, Математического института им. В.А.Стеклова РАН, Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН и других научных центров при установлении новых предельных теорем для случайных процессов.

Апробация работы

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах:

– Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководитель – академик РАН А.Н. Ширяев; Москва, 2011),

– семинаре отдела дискретной математики Математического институ-

[19] Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* Наука, Москва, 1985.

[20] Сгибнев М.С. Банаховы алгебры мер класса $\mathcal{G}(\gamma)$. *Сиб. матем. журн.*, 1988, 29(4):162–171.

[21] Топчий В.А. Производная плотности восстановления с бесконечным вторым моментом при $\alpha \in (0, 1/2]$. *Сибир. электр. матем. известия*, 2010, 7:340–349.

та имени В.А. Стеклова РАН (руководитель – д.ф.-м.н., г.н.с. А.М. Зубков; Москва, 2012),

– семинаре Добрушинской математической лаборатории ИППИ имени А.А. Харкевича РАН (руководители – д.ф.-м.н., в.н.с. М.Л. Бланк и д.ф.-м.н., профессор Р.А. Минлос; Москва, 2012),

– семинаре Института стохастики университета Ульма (руководитель – профессор Е. Сподарев; Ульм, Германия, 2010).

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях: "Stochastic Analysis and Random Dynamics" (Львов, Украина, 2009), 10th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics (Вильнюс, Литва, 2010), "Modern Stochastics: Theory and Applications II" (Киев, Украина, 2010), "Visions in Stochastics" (Москва, 2010), 5th conference "Limit Theorems in Probability Theory and their Applications" (Новосибирск, 2011), "Branching Processes and Random Walks in Random Environment" (Франкфурт-на-Майне, Германия, 2011), "Modern Stochastics: Theory and Applications III" (Киев, Украина, 2012).

Работа автора поддержана грантом РФФИ 10-01-00266а и стипендией Президента РФ для аспирантов, "достигших выдающихся успехов в учебе и научных исследованиях".

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 13 печатных работах, список которых приведен в конце автореферата. Из них 6 статей в рецензируемых журналах (четыре – в журналах списка ВАК, а две другие – в зарубежных), 2 препринта и 5 тезисов докладов. Все работы написаны без соавторов.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 87 наименований. Объем диссертации составляет 99 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении затрагивается история развития теории ветвящихся процессов, а также описывается структура диссертации и взаимосвязь различных глав. Основное внимание уделяется процессам Беллмана-Харриса и ветвящимся случайным блужданиям.

В первой главе получены новые предельные теоремы для двутипных ветвящихся процессов Беллмана-Харриса определенного вида. А именно, рассматривается процесс с двумя типами частиц, для которого производящая функция числа потомков частицы i-го типа, $i = 1, 2$, есть $f_i(s_1, s_2)$, причем $f_1(s_1, s_2) = \kappa f_0(s_1) + (1 - \kappa)s_2$ и $f_2(s_1, s_2) = s_1$, где $s_1, s_2 \in [0, 1]$. Здесь $0 < \kappa < 1$, а для вероятностной производящей функции $f_0(s)$, $s \in [0, 1]$, верны соотношения $f_0'(1) = 1$ и $0 < f_0''(1) < \infty$. Функция распределения времени жизни частицы i-го типа обозначается $G_i(t)$, $t \geq 0$. Предполагается, что

$$G_1(t) = 1 - e^{-t}, \quad 1 - G_2(t) \sim \frac{C}{\ln t}, \quad t \to \infty, \tag{1}$$

где константа $C > 0$. Согласно (1) частицы первого типа, как правило, живут недолго в сравнении с частицами второго типа. Нетрудно проверить, что введенный процесс является критическим и неразложимым. Как показано В.А. Ватутиным (1979), если к моменту времени t популяция частиц в этом процессе не выродилась, то в пределе ($t \to \infty$) она состоит почти наверное только из конечного числа частиц *второго* типа. До недавних пор открытым оставался вопрос об асимптотическом поведении числа частиц первого типа и о совместном распределении числа частиц обоих типов при условии невырождения частиц *первого* типа. Основное содержание первой главы представляет собой решение этих задач при весьма широких условиях. Доказанные в данной главе теоремы уже в третьей главе диссертации эффективно применяются при исследовании КВСБ по целочисленной плоскости.

Чтобы сформулировать один из основных результатов первой главы, введем дополнительные обозначения. Пусть $Z_i(t)$ – число частиц типа $i = 1, 2$, существующих в рассматриваемом процессе Беллмана-Харриса в момент $t \geq 0$. Положим $G_3(t) := \kappa G_1(t) + (1-\kappa) G_1 * G_2(t)$ и $V(t) := \sum_{k=0}^{\infty} G_3^{*k}(t)$, где $*k$ означает k-кратную свертку. Заметим, что функция распределения $G_3(t)$ абсолютно непрерывна, поэтому функция восстановления $V(t)$ обладает плотностью $v(t)$. Тауберовы теоремы и формула (1) влекут соотношения

$$1 - G_3(t) \sim \frac{(1-\kappa)C}{\ln t}, \quad V(t) \sim \frac{\ln t}{(1-\kappa)C}, \quad t \to \infty.$$

Отсюда, вообще говоря, не следует (производные эквивалентных функций не обязаны быть эквивалентными), что

$$v(t) \sim \frac{1}{(1-\kappa)\, C\, t}, \quad t \to \infty. \tag{2}$$

Однако на протяжении всей первой главы последнее условие предполагается выполненным (в главе 3 приводится содержательный пример, когда (2) имеет место). Кроме того, считается, что процесс начинается с одной частицы *первого* типа. При $t \geq 0$ и $s \in [0,1]$ обозначим $q(t;s) := 1 - \mathsf{E} s^{Z_1(t)}$, $\Phi(s) := \kappa(f_0(1-s) - 1 + s)$ и $J(s) := \int_0^\infty \Phi(q(u;s))\, du$.

Следующая теорема является одним из основных результатов главы 1. Для ее доказательства понадобилось установить 10 лемм.

ТЕОРЕМА 1.1.3. *Для всех* $s \in [0,1]$ *и* $\lambda \geq 0$ *верно равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\left(s^{Z_1(t)} \exp\left\{ -\frac{\lambda(1-\kappa) C Z_2(t)}{2\kappa f_0''(1) \ln t} \right\} \middle| \, Z_1(t) > 0 \right) = \frac{s - (J(0) - J(s))}{1 - J(0)} \cdot \frac{4}{\sqrt{1+\lambda}(\sqrt{1+\lambda}+1)^2},$$

где $J(0) < 1$.

Таким образом, теорема 1.1.3 описывает предельное (при $t \to \infty$) совместное распределение должным образом нормированных численностей частиц первого и второго типов при условии невырождения популяции частиц первого типа в момент t. Из этого результата при $\lambda = 0$ вытекает соответствующая условная предельная теорема для числа частиц первого типа.

Отметим еще несколько следствий теоремы 1.1.3. Во-первых, при условии невырождения популяции частиц первого типа, условное предельное по времени распределение должным образом нормированного числа частиц первого типа в рассматриваемом ветвящемся процессе Беллмана-Харриса является дискретным. Заметим, что В.А. Ватутиным и В.А. Топчием была решена[22] аналогичная задача при иных предположениях на асимптотическое поведение хвоста функции G_2, но предельное распределение оказалось экспоненциальным. Во-вторых, при том же условии, численности частиц первого и второго типов асимптотически независимы, когда время стремится к бесконечности. Следует подчеркнуть, что, в отличие от статьи[22], доказательство последнего утверждения не требует каких-либо дополнительных ограничений, налагаемых на производящую функцию f_0.

Во второй главе в рамках модели случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ нами вводится новое понятие *времени достижения с запретом*. Объясним его происхождение. При исследовании ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ в третьей главе диссертации был применен метод введения вспомогательного процесса Беллмана-Харриса с шестью типами частиц, благодаря чему удалось использовать теоремы В.А. Ватутина[23], установленные ранее для такого рода процессов. Однако, чтобы перенести результаты, полученные для вспомогательного процесса Беллмана-Харриса, на изучаемое ветвящееся случайное блуждание, и потребовалось ввести упомянутое новое понятие. Время достижения состояния $y \in \mathbb{Z}^d$ с запретом в состоянии $z \in \mathbb{Z}^d$ – это случайное время до первого достижения y (или первого возвращения в y, если точка

[22] Ватутин В.А., Топчий В.А. Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий. *Теория вероятн. и примен.*, 2004, 49(3):461–484.

[23] Ватутин В.А. Об одном классе критических ветвящихся процессов Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц. *Теория вероятн. и примен.*, 1980, 25(4):771-781.

старта x совпадает с y) частицей, совершающей случайное блуждание, если ее траектория не проходит через запрещенное состояние z. Иначе время достижения состояния y с запретом в z полагается равным бесконечности. Функция распределения времени достижения y с запретом в z и со стартовой точкой блуждания x обозначается $H_{x,y,z}(t)$, $t \geq 0$. Во второй главе мы находим предельное значение $H_{x,y,z}(\infty) := \lim_{t\to\infty} H_{x,y,z}(t)$ и анализируем асимптотическое поведение функции $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$ при $t \to \infty$ для неразложимого, симметричного, однородного по пространству и времени случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$, имеющего конечную дисперсию скачков.

Для формулировок результатов главы 2 введем ряд новых обозначений. Пусть случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, задается инфинитезимальной матрицей $A = (a(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$a(x,y) = a(y,x), \quad a(x,y) = a(\mathbf{0}, y-x) =: a(y-x), \quad x,y \in \mathbb{Z}^d,$$

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} a(x) = 0, \text{ где } a(x) \geq 0, \text{ если } x \neq \mathbf{0}, \text{ и } a(\mathbf{0}) < 0, \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \|x\|^2 a(x) < \infty.$$

Здесь символ $\mathbf{0}$ обозначает начало координат решетки $\mathbb{Z}^d$, а $\|\cdot\|$ – некоторая норма в пространстве $\mathbb{R}^d$. Пусть также рассматриваемое случайное блуждание *неразложимо*, т.е. все точки решетки $\mathbb{Z}^d$ достижимы.

Обозначим $p(t;x,y)$, $t \geq 0$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, переходные вероятности случайного блуждания. Положим $G_\lambda(x,y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t;x,y)\,dt$, $\lambda > 0$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, т.е. функция $G_\lambda(x,y)$ является преобразованием Лапласа переходной вероятности $p(\cdot;x,y)$. В силу свойств возвратности и транзиентности случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ *функция Грина* $G_0(x,y)$ конечна для всех $x,y \in \mathbb{Z}^d$ при $d \geq 3$, а при $d = 1$ или $d = 2$ имеем $\lim_{\lambda\to0+} G_\lambda(x,y) = \infty$, см., например[8], гл. 2, разделы 1 и 2. Там же показано, что функция $\lim_{\lambda\to0+} (G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda(x,y))$ конечна при всех $d \in \mathbb{N}$ и $x,y \in \mathbb{Z}^d$. Поэтому для каждого $d \in \mathbb{N}$ можно положить $\rho_d(\mathbf{0}) := 1$ и $\rho_d(x) := a \lim_{\lambda\to0+} (G_\lambda(\mathbf{0},\mathbf{0}) - G_\lambda(\mathbf{0},x))$ при $x \neq \mathbf{0}$, где $a := -a(\mathbf{0})$.

Следующие две теоремы представляют основные результаты главы 2.

ТЕОРЕМА 2.1.1. *Пусть точки $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ таковы, что $y \neq z$. Тогда для случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, справедливы соотношения*

$$H_{x,y,z}(\infty) = \frac{\rho_d(x-z)+\rho_d(y-z)-\rho_d(y-x)}{2\rho_d(y-z)} \in (0,1), \quad d=1 \quad \text{или} \quad d=2,$$

а при $d \geq 3$

$$H_{x,y,z}(\infty) = \frac{G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})\rho_d(y-z)-G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})\rho_d(y-x)+G_0(y,z)\rho_d(x-z)}{\rho_d(y-z)(G_0(\mathbf{0},\mathbf{0})+G_0(y,z))} \in (0,1).$$

Более того, при $t \to \infty$

$$\begin{aligned} H_{x,y,z}(\infty)-H_{x,y,z}(t) &\sim \frac{C_1(x-z,y-z)}{\sqrt{t}}, \quad d=1, \\ H_{x,y,z}(\infty)-H_{x,y,z}(t) &\sim \frac{C_2(x-z,y-z)}{\ln t}, \quad d=2, \\ H_{x,y,z}(\infty)-H_{x,y,z}(t) &\sim \frac{C_d(x-z,y-z)}{t^{d/2-1}}, \quad d\geq 3, \end{aligned}$$

где $C_d(\cdot,\cdot)$, $d \in \mathbb{N}$, – явно указанные положительные функции.

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Если имеется простое случайное блуждание по $\mathbb{Z}$ и точки $x, y, z \in \mathbb{Z}$ таковы, что $y \neq z$, то при $t \to \infty$*

$$\begin{aligned} 1-H_{x,y,z}(t) &\sim \frac{\sqrt{2}\,|y-x|}{\sqrt{a\pi}\,\sqrt{t}}, \quad x<y<z \quad \text{или} \quad z<y<x, \\ 1-\frac{1}{2|y-z|}-H_{y,y,z}(t) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\,a\,\pi}\,\sqrt{t}}, \\ \frac{x-z}{y-z}-H_{x,y,z}(t) &= o(e^{-a\,\varepsilon\,t}), \quad z<x<y \quad \text{или} \quad y<x<z, \\ \frac{1}{2|y-z|}-H_{z,y,z}(t) &= o(e^{-a\,\varepsilon\,t}), \\ H_{x,y,z}(t) &\equiv 0, \quad x<z<y \quad \text{или} \quad y<z<x, \end{aligned}$$

где ε – некоторое число из интервала $(0,1)$.

Таким образом, наиболее интересным оказывается случай $d = 1$, поскольку тогда существует два совершенно различных вида асимптотического поведения функции $H_{x,y,z}(t)$ при $t \to \infty$ в зависимости от того, является ли случайное блуждание простым или нет. Стоит также упомянуть, что для случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$, за исключением простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$, значение $H_{x,y,z}(\infty)$ лежит строго в интервале $(0, 1)$, а порядок убывания функции $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$ определяется только размерностью d, независимо от значений x, y и z. При этом для простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ именно взаимное расположение точек x, y и z задает как значение $H_{x,y,z}(\infty) \in [0, 1]$, так и порядок убывания функции $H_{x,y,z}(\infty) - H_{x,y,z}(t)$, когда $t \to \infty$.

В третьей главе исследуется модель критического каталитического ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления. Как отмечалось выше, критическое КВСБ отличается от надкритического и докритического разнообразием форм предельных распределений численностей частиц в зависимости от размерности d. Ранее в статьях В.А. Ватутина, В.А. Топчия, Е.Б. Яровой и автора диссертации были установлены только асимптотические свойства числа частиц, расположенных в *источнике ветвления*. В частности, оказалось, что для всех $d \in \mathbb{N}$ вероятность наличия частиц в источнике ветвления стремится к нулю с ростом времени. Стоит заметить, что ее асимптотическое поведение, а также предельные законы для соответствующим образом нормированного числа частиц в источнике ветвления при условии их наличия имеют различный вид, когда $d = 1, 2, 3, 4$ и $d \geq 5$.

В модели критического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ поведение числа частиц, расположенных в *произвольной* точке решетки, оставалось неизвестным. В третьей главе завершается картина исследования упомянутого поведения. Изучается асимтотика по времени средних локальных численностей и вероятности нахождения частиц в произвольной фиксированной точке $y \neq \mathbf{0}$. Кроме того, мы получаем условную предельную теорему для должным образом нормированного числа частиц в такой точке y. Следует подчеркнуть, что, в отличие от предшествующих работ по этой теме, старт КВСБ допускается нами в *любой* точке $x \in \mathbb{Z}^d$, а не только в источнике ветвления.

Опишем модель критического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$. В начальный момент времени $t = 0$ на решетке находится единственная частица, расположенная в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Если $x \neq \mathbf{0}$, то частица совершает случайное блуждание с непрерывным временем до момента первого достижения начала координат. Предполагается, что это случайное блуждание задается инфинитезимальной матрицей $A = (a(u,v))_{u,\, v \in \mathbb{Z}^d}$ и удовлетворяет условиям, сформулированным выше на с. 11. Если $x = \mathbf{0}$ или частица достигла начала координат, то она проводит там экспоненциально распределенное время (с параметром 1). Затем она либо погибает с вероятностью $\alpha \in (0,1)$, произведя перед гибелью случайное число потомков ξ, либо покидает источник ветвления с вероятностью $1 - \alpha$. В последнем случае интенсивность перехода из начала координат в точку $v \neq \mathbf{0}$ равняется $-(1-\alpha)a(v)/a(\mathbf{0})$. В начале координат ветвление определяется вероятностной производящей функцией $f(s) := \mathsf{E}s^\xi = \sum_{k=0}^\infty f_k s^k,\ s \in [0,1]$. КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ называется *критическим*, если выполнены соотношения:

$$\alpha f'(1) + (1-\alpha)(1-h_d) = 1 \quad \text{и} \quad \sigma^2 := \alpha\, f''(1) < \infty.$$

Здесь h_d – вероятность события, состоящего в том, что частица, покинувшая начало координат, никогда не вернется обратно. В силу свойств возвратности и транзиентности случайного блуждания имеем $h_1 = h_2 = 0$ и $h_d = (a\, G_0(\mathbf{0},\mathbf{0}))^{-1} \in (0,1)$ при $d \geq 3$. Новорожденные частицы в момент появления расположены в начале координат. Они эволюционируют в соответствии со схемой, описанной выше, независимо друг от друга, а также от родительских частиц.

Для формулировки одного из основных результатов главы 3 введем еще несколько обозначений. Пусть $\mu(t;y)$ – число частиц, находящихся в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент $t \geq 0$. Положим $q(s,t;x,y) := 1 - \mathsf{E}_x s^{\mu(t;y)}$, $s \in [0,1]$, $t \geq 0$, где индекс x обозначает, что КВСБ стартует в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. При $d = 2$ нам понадобится функция

$$J(s;y) := \alpha \int_0^\infty \left(f(1 - q(s,u;\mathbf{0},y)) - 1 + q(s,u;\mathbf{0},y)\right) du, \quad s \in [0,1], \quad y \in \mathbb{Z}^d.$$

Следующая теорема описывает предельное (при $t \to \infty$) распределение нормированных локальных численностей частиц $\mu(t;y)$ при условии их невырождения в момент t. Для полноты картины утверждение теоремы содержит случай $y = \mathbf{0}$, изученный ранее в работах В.А.Ватутина, В.А.Топчия и автора диссертации.

ТЕОРЕМА 3.1.3. *Для $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda \in [0,\infty)$ и $s \in [0,1]$ имеем*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}_x \left(\exp\left\{ -\frac{\lambda\, \mu(t;y)}{\mathsf{E}_x(\mu(t;y)|\mu(t;y) > 0)} \right\} \middle| \, \mu(t;y) > 0 \right) = \frac{1}{\lambda + 1}, \quad d = 1, 3 \quad \text{или} \quad d \geq 5,$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}_x \left(s^{\mu(t;y)} \middle| \, \mu(t;y) > 0 \right) = \frac{(1-\alpha)s - a(J(0;y) - J(s;y))}{1 - \alpha - aJ(0;y)}, \quad y \neq \mathbf{0}, \quad d = 2,$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}_x \left(s^{\mu(t;\mathbf{0})} \middle| \, \mu(t;\mathbf{0}) > 0 \right) = \frac{s - (J(0;\mathbf{0}) - J(s;\mathbf{0}))}{1 - J(0;\mathbf{0})}, \quad d = 2,$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}_x \left(\exp\left\{ -\frac{\lambda\, \mu(t;y)}{\mathsf{E}_x(\mu(t;y)|\mu(t;y) > 0)} \right\} \middle| \, \mu(t;y) > 0 \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2 + 3\lambda}, \quad d = 4,$$

причем $J(0;y) < a^{-1}(1-\alpha)$, $y \neq \mathbf{0}$, и $J(0;\mathbf{0}) < 1$.

Таким образом, при $d = 1$, $d = 3$ и $d \geq 5$ рассматриваемое распределение оказывается экспоненциальным. В то же время при $d = 2$ это распределение дискретно, а при $d = 4$ соответвующий предельный закон является смесью экспоненциального распределения и меры, сосредоточенной в нуле.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Елене Борисовне Яровой за неизменное внимание и постоянную поддержку.

Работы автора по теме диссертации

[1] Булинская Е.Вл. Предельные теоремы для локальных численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании. *Докл. РАН*, 2012, 444(6):733–738.

[2] Булинская Е.Вл. Времена достижения с запретом для случайного блуждания. *Матем. труды*, 2012, 15(1):3–26.

[3] Булинская Е.Вл. Предельные распределения численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании. *Матем. заметки*, 2011, 90(6):845-859.

[4] Булинская Е.Вл. Каталитическое ветвящееся случайное блуждание по двумерной решетке. *Теор. вероятн. и примен.*, 2010, 55(1):142–148.

[5] Bulinskaya E.Vl. Limit distributions arising in branching random walks on integer lattices. *Lithuanian Math. J.*, 2011, 51(3):310–321.

[6] Bulinskaya E.Vl. Catalytic branching random walk on three-dimensional lattice. *Theory Stoch. Proc.*, 2010, 16(2):23–32.

[7] Bulinskaya E.Vl. *Asymptotic behavior of local particles numbers in branching random walk*. Prépublication de LPMA UPMC (univ. Paris-VI) no. 1501, 2012, arXiv:1203.2362v1 [math.PR].

[8] Bulinskaya E.Vl. *The Hitting Times with Taboo for a Random Walk on an Integer Lattice*. Prépublication de LPMA UPMC (univ. Paris-VI) no. 1456, 2011, arXiv:1107.1074v1 [math.PR].

[9] Bulinskaya E.Vl. Local Particles Numbers in Branching Random Walk on an Integer Lattice. *Abstracts of Communications of the XXIX Int. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models*, Svetlogorsk, October 10-16, 2011, 9–10.

[10] Bulinskaya E.Vl. Asymptotic properties of the hitting times with taboo for a random walk on an integer lattice. *Abstracts of Communications of the V-th Int. conference "Limit Theorems in Probability Theory and their Applications"*, Novosibirsk, August 15-21, 2011, 15-16.

[11] Bulinskaya E.Vl. The exponential law arising as limit distribution in models of critical branching random walks on integer lattices. *Abstracts of Communications of the Int. conference "Modern Stochastics: Theory and Applications II"*, Kiev, September 7-11, 2010, 36.

[12] Bulinskaya E.Vl. Conditional limit distributions arising in branching random walk on $\mathbb{Z}^2$. *Abstracts of Communications of the 10-th Int. Vilnius conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, Vilnius, June 28-July 2, 2010, 118.

[13] Bulinskaya E.Vl. Limit theorems for one modification of a critical catalytic branching random walk on $\mathbb{Z}^2$. *Abstracts of Communications of the Int. conference "Stochastic Analysis and Random Dynamics"*, Lviv, June 14-20, 2009, 117.