Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи
УДК 511.335

Федоров Глеб Владимирович

Среднее значение функции делителей с быстро растущей размерностью

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре математических и компьютерных методов анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Чубариков Владимир Николаевич
Официальные оппоненты:	Добровольский Николай Михайлович доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО «Тульский государственный университет имени Л.Н. Толстого», заведующий кафедрой)
	Авдеев Иван Фёдорович кандидат физико-математических наук, доцент (ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»)
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»

Защита диссертации состоится 12 октября 2012 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 12 сентября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация является исследованием в области аналитической теории чисел. Основным предметом исследований, составляющих ее содержание, является изучение свойств многомерной функции делителей, в том числе исследование многомерной проблемы делителей Дирихле с растущей размерностью.

Проблемой делителей называют задачу об исследовании асимптотического поведения среднего значения функции делителей от целых чисел, принадлежащих различным подмножествам натурального ряда. Определим многомерную функцию делителей $\tau_k(n)$ стандартным образом, как количество представлений натурального n в виде $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — натуральные числа, причем считаем, что $\tau_k(0) = 0$, $\tau_k(1) = 1$, $\tau_1(n) = 1$. В случае $k = 2$ значение функции $\tau_2(n) = \tau(n)$ равно количеству различных делителей натурального числа n. Следует сказать, что проблема делителей допускает многочисленные арифметические и геометрические интерпретации. В частности, полученная самим Дирихле асимптотика для среднего значения количества делителей чисел из начального отрезка натурального ряда одновременно является и асимптотикой для количества целых точек под гиперболой.

Проблема делителей Дирихле берет свое начало с классической работы Л. Дирихле [1] 1849 года, посвященной выводу асимптотической формулы для количества целых точек под многомерной гиперболой.

Современная постановка проблемы делителей включает в себя много различных аспектов, одним из которых является задача получения новых оценок остаточного члена $r_k(x)$ в асимптотической формуле для сумматорной функции делителей

$$D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + r_k(x), \qquad r_k(x) \ll_\varepsilon x^{\alpha_k+\varepsilon}, \tag{1}$$

где $P_{k-1}(t)$ — многочлен степени $k-1$, причем его коэффициенты зависят от k и могут быть выписаны в явном виде.

Верхней оценкой остатка $r_k(x)$ при различных значениях величины k занимались многие известные математики. Кроме упомянутой выше работы Л. Дирихле 1849 года, в которой получена формула (1) со значением

[1] Dirichlet L. *"Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie"*, Abh. Aked. Wiss. Berlin, **2** (1849), 49–66.

$\alpha_k = 1 - \frac{1}{k}$, можно указать на работы Г.Ф. Вороного [2], Э. Ландау [3], Ж. ван дер Корпута [4], Г. Харди и Дж. Литтлвуда [5], А. Вальфиша [6], Ф. Аткинсона [7], Чи Джан Тао [8], К. Тонга [9], Х.Е. Рихерта [10],[11], Чен Джин Рана [12], Г.А. Колесника [13], А.А. Карацубы [14],[15], также на работы А. Ивича [16],[17], А. Ивича и М. Квелета [18], Е.Е. Баядилова [19] и О.В. Колпаковой [20].

Актуальные результаты по проблеме делителей Дирихле изложены в монографии А. Ивича [21]. Подчеркнем, однако, что интенсивные исследования, проводимые на протяжении многих лет и отраженные в указанных выше работах, в настоящий момент еще далеки от окончательного решения проблемы, которое предполагает получение наилучшей верхней оценки остаточного члена в асимптотической формуле, то есть получения оценки типа

$$r_k(x) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Эта гипотеза соответствует Ω-теореме Г. Харди [22], кото-

---

[2] Voronoi G. *"Sur un probleme du calcul des fonctions asymptotiques"*, J. Math., **126** (1903), 241–282.

[3] Landau E. *"Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen"*, Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klassen, Hft., **6** (1912), 687–771.

[4] Corput J.G. van der *"Verscharfung der Abschatzungen beim Teilerproblem"*, Math. Ann. **87** (1922), 39–65.

[5] Hardy G.H., Littlewood I.E. *"The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz"*, Proc. London. Math. Soc., **2** (1922), 39–74.

[6] Walfisz A. *"Über zwei Gitterpunktprobleme"*, Math. Ann., **95**:1 (1926), 69–83.

[7] Atkinson F.V. *"A divisor problem"*, Quart. J. Math., Oxford Ser., **12**:1 (1941), 193–200.

[8] Chih T. *"The Dirichlet's divisor problem"*, Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser. A, **5** (1950), 402–427.

[9] Tong K.C. *"On divisor problems"*, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), **2** (1952), 258–266.

[10] Richert H.E. *"Vershärfung der Abschärzung beim Dirichletschen Teilerproblem"*, Math Z., **58**:1 (1953), 204–218.

[11] Richert H.E. *"Einfuhrung in die Theorie der starken Rieszchen Summierbarkeit von Dirichletreihen"*, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen (Math. Physik) (1960), 17–75.

[12] Chen J. *"On the divisor problem for $d_3(n)$"*, Sci. Sinica, **14** (1965), 19–29.

[13] Колесник Г.А. *"Улучшение остаточного члена в проблеме делителей"*, Матем. заметки, **6**:5 (1969), 545–554.

[14] Карацуба А.А. *"Оценки тригонометрических сумм И.М. Виноградова и их применения"*, Труды МИАН СССР **112** (1971), 245–255.

[15] Карацуба А.А. *"Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле"*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **3** (1972), 475–483.

[16] Ivic A. *"Some recent result on the Riemann zeta-function"*, Proc. of the Intern. Number Theory Conf. (1989).

[17] Ivic A. *"Some recent results on the Riemann zeta-function"*, Theorie des nombers (Quebec, PQ, 1987), de Gruyter, Berlin, 1989, 424–440.

[18] Ivic A., Quellet M. *"Some new estimates in the Dirichlet divisor problem"*, Acta Arithmetica **52** (1989), 241–253.

[19] Баядилов Е.Е. *"О среднем значении функции делителей от тернарной кубической формы"*, Дисс. на соиск. степени канд. физ.-матем. наук (2009), 1–68.

[20] Колпакова О.В. *"О новых оценках остаточного члена асимптотической формулы в многомерной проблеме делителей Дирихле"*, Матем. заметки, **89**:4 (2011), 530–546.

[21] Ivic A. *"The Riemann zeta-function"*, John Wiley & Sons, 2003.

[22] Hardy G.H. *"On Dirichlet's divisor problem"*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **15** (1915), 1–25.

рая утверждает, что верхняя оценка типа

$$r_k(x) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}-\varepsilon}$$

уже не имеет места.

Также к проблеме делителей относят еще целый класс задач, состоящий в нахождении асимптотических формул с оценкой остатка для среднего значения функций $\tau_k(n)$, когда n пробегает некоторое подмножество множества натуральных чисел, не совпадающее с натуральным рядом. Количество таких задач очень велико, как и число работ, им посвященных. Можно указать, например, на проблему нахождения асимптотики для среднего значения функции $\tau([n^c])$, рассмотренную А. Закзаком [23], Х.М. Солибой [24], Г.И. Архиповым и В.Н. Чубариковым [25].

Цель работы

- Уточнить известные оценки среднего значения многомерной функции делителей равномерные по всем значениям размерности.
- Изучить поведение главного члена асимптотической формулы для среднего значения многомерной функции делителей при достаточно быстро растущей размерности.
- Исследовать распределение значений функции делителей на специальных последовательностях.
- Продолжить полученные результаты на обобщенные функции делителей.

Научная новизна

В диссертации решены следующие новые задачи.

1. Доказана более точная равномерная оценка для среднего значения функции делителей, чем ранее известные оценки К.К. Марджанишвили и Д.А. Митькина.

[23] Закзак А. *“Проблема делителей Дирихле в редких последовательностях”*, Дисс. на соиск. степени канд. физ.-матем. наук (1993), 1–80.

[24] Солиба Х.М. *“О среднем значении тернарной функции делителей на последовательности нецелых степеней натуральных чисел”*, Материалы Международной Конф. по аналитической теории чисел, Москва, МГУ (1997), 30.

[25] Г.И. Архипов, В.Н. Чубариков *“О распределении простых чисел в последовательности вида $[n^c]$”*, Вестник Московского ун-та, сер. 1, матем.мех., **6** (1999), 25-35.

2. Исследована проблема делителей Дирихле с быстро растущей размерностью, доказана асимптотическая формула для среднего значения многомерной функции делителей с новыми границами роста размерности.

3. Найдены экстремальные значения для отношения функций делителей от «соседних» чисел сочетания. Доказана асимптотическая формула для количества делителей «центрального» биномиального коэффициента.

4. Доказана асимптотическая формула для среднего значения обобщенной функции делителей.

Основные методы исследования

В работе используются следующие методы исследования: методы аналитической теории чисел, методы теории контурного интегрирования, а также использованы современные оценки дзета-функции Риманая и комбинаторные методы работы П. Эрдеша, С. Грама, А. Ивича и К. Померанса [26].

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Предложенные в диссертации методы и полученные результаты представляют интерес для специалистов аналитической теории чисел.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

- Семинар «Аналитическая теория чисел», г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, неоднократно в 2010–2012 гг.

- Международная научная конференция «Современные проблемы анализа и преподавания математики», г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 17-19 мая 2010 года.

- Международная конференция «Теория приближений», г. Москва, Мат. инст. им. В.А. Стеклова РАН, 23-26 августа 2010 года.

[26] Erdös P., Graham S.W., Ivić A., Pomerance C., *"On the divisors of n!"*, Analytic Number Theory, Proceedings of a Conference in Honor of Heini Halberstam, Vol. 1 (1996), 337–355.

- VII Международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», г. Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 11-16 мая 2010 года.
- IX Международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», г. Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 24-26 апреля 2012 года.
- X Международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», г. Волгоград, УКЦ ФМИФ ВГСПУ, 10-16 сентября 2012 года.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приводится в конце автореферата [1-3]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и библиографии (49 наименований). Общий объем диссертации составляет 74 страницы.

Краткое содержание работы

Во *введении* описываются цели работы, обосновывается ее актуальность и практическая значимость, перечисляются ранее известные результаты, а также основные результаты диссертации.

Глава 1 диссертации посвящена уточнению равномерной по всем значениям параметра k оценке среднего значения функции делителей $D_k(x)$, а также среднего значения функции делителей возведенных в фиксированную целую степень. Одним из первых такие задачи стал рассматривать в 1939 году К.К. Марджанишвили [27]. В частности, К.К. Марджанишвили доказал следующую оценку

$$D_k(n) = \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \tau_k(m) \leqslant n\frac{(k-1+\ln n)^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{2}$$

[27] Марджанишвили К.К. *"Оценка одной арифметической суммы"*, Доклады Академии Наук, **7** (1939), 391–393.

В 2006 году Д.А. Митькин [28] заметил, что для любых целых $k \geqslant 2$, $l \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$ верно неравенство

$$\tau_k(n)\tau_l(n) \leqslant \tau_{kl}(n). \tag{3}$$

С помощью этого неравенства Д.А. Митькин, используя оценку (2) сумматорной функции делителей $D_k(x)$, дал новую более сильную оценку для суммы значений функций делителей возведенных в целую положительную степень.

В работе [1] автор улучшает ранее известное неравенство К.К. Марджанишвили (2), доказывая более точную верхнюю оценку суммы $D_k(x)$, равномерную по всем значениям параметра k.

Теорема. *При любых целых $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 2$ выполняется неравенство*

$$D_k(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau_k(m) \leqslant n \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \frac{\ln^j n}{j!}. \tag{4}$$

Сумма в правой части последнего неравенства может быть представлена в виде *многочлена Лагерра* $L_{k-1}^0(-\ln n) = L_{k-1}(-\ln n)$. Доказательство неравенства (4) проводится методом понижения размерности функции делителей. Также с учетом неравенства (3) в главе 1 доказана оценка для сумм общего вида.

Теорема. *При любых целых $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$ и $l \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$D_k^{(l)}(n) = \sum_{m \leqslant n} \tau_k^l(m) \leqslant n L_{k^l-1}(-\ln n). \tag{5}$$

Приведенная теорема уточняет результат Д.А. Митькина. Таким образом, функции Лагерра дают достаточно хорошее приближение к сумме значений многомерной функции делителей. В заключении первой главы доказана более точная верхняя оценка величины $D_k^{(l)}(n)$, чем оценка (5).

Теорема. *При любых целых $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 2$ выполняется неравенство*

$$D_k(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \tau_k(m) \leqslant n c^{k-1} \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \binom{k-1-j}{j} \frac{b^j}{c^{2j}} L_{k-1-2j}\left(-\frac{\ln n}{c}\right),$$

[28] Митькин Д.А. *“Об оценке некоторых арифметических сумм с числом делителей”*, Матем. заметки, **80**, вып. 3 (2006), 471–472.

где $L_r(x)$ — многочлен Лагерра степени r, а $c = 1-a$ и b — такие неотрицательные константы, что для всех целых $m \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$a\left[\frac{n}{m}\right] - b \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant n\\ m|d}} \left\{\frac{n}{d}\right\}.$$

Уточнение в данной тереме получено за счет отдельного рассмотрения сумм с дробными частями.

В *главе 2* рассмотрена задача о поиске асимптотической формулы для величины $D_k(x)$ при $x \to \infty$, равномерной по параметру k из промежутков с концами, зависящими от величины x. А.А. Карацуба [29] получил в формуле (1) равномерный по параметру $k \ll \ln x$ остаток вида

$$\theta x^{1-\frac{a}{k^{2/3}}}(c\ln x)^k, \tag{6}$$

где a и c некоторые абсолютные постоянные, $|\theta| < 1$.

В 2001 А.И. Павлов обнаружил удивительный эффект: если параметр k растет при $x \to \infty$ так, что $k \succ \sqrt{\ln x}$, то главный член асимптотической формулы для величины $D_k(x)$ отличается от ожидаемого главного члена, который может быть выделен из формулы (1):

$$x\frac{(\ln x)^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{7}$$

Отметим, что в приведенных в главе 1 оценках среднего значения функции делителей (2) и (4) главный член совпадает с (7).

При растущем параметре k поведение главного члена асимптотической формулы для $D_k(x)$ будет отличаться от главного члена в $P_{k-1}(\ln x)$ за счет растущего количества слагаемых в формуле (1). Для современных оценок остатка $r_k(x)$ вида $r_k(x) \ll_\varepsilon x^{\alpha_k+\varepsilon}$ имеем $\alpha_k = 1 - f(k)$, где $f(k) \to 0$ при $k \to \infty$, поэтому при фиксированном $\varepsilon > 0$ и достаточно больших значениях k получаем $\alpha_k + \varepsilon > 1$, то есть формула (1) становится неприменимой.

Р.Н. Бояринов, Б.В. Крахт и В.Н. Чубариков [30] продолжили исследования А.И. Павлова и получили асимптотические формулы при $x \to \infty$ для среднего значения многомерной функции делителей на арифметических прогрессиях, равномерные по растущему параметру k со следующими

[29] Карацуба А.А. *"Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле"*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **3** (1972), 475–483.

[30] Бояринов Р.Н., Крахт Б.В., Чубариков В.Н. *"О распределении значений арифметической суммы многомерной функции делителей на арифметической прогрессии с растущими параметрами"*, Пятый всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докладов. «Обозрение прикладной и промышленной математики», 2004, **11**:1, 102 (2004).

ограничениями: $(\ln\ln x)^\beta \ll k \ll (\ln x)^\alpha$, при фиксированных $0<\alpha<\frac{1}{2}$ и $\beta>6$, а разность прогрессии q такая, что $0<q\leqslant e^{\frac{\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}}$.

В работе [31] А.И. Павлов получил асимптотическую формулу для величины $D_k(x)$ при $x\to\infty$ и целом k таким, что $(\ln\ln x)^\beta \ll k \ll (\ln x)^\alpha$ при фиксированных $0<\alpha<\frac{2}{3}$ и $\beta>6$. Основным результатом главы 2 является уточнение асимптотической формулы Павлова при более широком промежутке значений параметра k. Причем доказано, что главные члены асимптотических формул различны соответственно при k лежащих в каждом из промежутков $(\ln x)^{\frac{m}{m+1}} \prec k \prec (\ln x)^{\frac{m+1}{m+2}}$, где m принимает целые значения, $0\leqslant m\leqslant 3$.

Теорема. *Пусть целочисленный параметр $k=k(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, причем для некоторого фиксированного $0<\rho<\frac{1}{3}$ выполнено неравенство $k\ll(\ln x)^{\frac{4}{5+\rho}}$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$D_k(x) = x\frac{(\ln x)^{k-1}}{(k-1)!}\exp\{q_3(x,k)\}\,L_3(x,k)\left(1+O\left(\frac{k^{5+\rho}}{\ln^4 x}\right)+O\left(k^{3\rho-1}\right)\right), \tag{8}$$

где функции $q_3(x,k)$ и $L_3(x,k)$ определены следующим образом

$$q_3(x,k) = k\left(\xi_1\frac{k}{\ln x}-\xi_2\frac{k^2}{\ln^2 x}+\xi_3\frac{k^3}{\ln^3 x}\right), \tag{9}$$

$$\lambda_1 = \gamma_0+\frac{3}{2}\approx 2.0772,\quad \lambda_2=\frac{3\gamma_0^2}{2}+\gamma_1+3\gamma_0+\frac{7}{4}\approx 3.9085,$$
$$\lambda_3=\frac{21}{4}\gamma_0^2+\frac{5}{2}\gamma_0^3+3\gamma_0\gamma_1+\frac{3}{2}\gamma_1+\frac{21}{4}\gamma_0+\frac{15}{8}\approx 4.2483;$$
$$L_3(x,k) = 1-\lambda_1\frac{k}{\ln x}+\lambda_2\frac{k^2}{\ln^2 x}-\lambda_3\frac{k^3}{\ln^3 x}, \tag{10}$$

$$\xi_1=\gamma_0\approx 0.5772,\quad \xi_2=\gamma_0^2+\gamma_1\approx 0.2604,\quad \xi_3=\frac{5}{3}\gamma_0^3+3\gamma_0\gamma_1+\frac{\gamma_2}{2}\approx 0.1945;$$

константы Стильтьеса определены равенствами

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{(\ln k)^n}{k}-\frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1}\right),$$

в частности, $\gamma_0=\gamma$ – константа Эйлера.

[31] Павлов А.И. *"Асимптотика одной арифметической суммы"*, Доклады Академии Наук, **3** (2001), 307–310.

Методы, применяемые при доказательстве приведенной теоремы, позволяют получить асимптотические формулы для каждого промежутка $(\ln x)^{\frac{m}{m+1}} \prec k \prec (\ln x)^{\frac{m+1}{m+2}}$ при любом целом m, $m \geqslant 0$. То есть границу для значений параметра k возможно расширить так, что $k \ll (\ln x)^{1-\varepsilon}$. При $k \gg \ln x$ возникают другие эффекты, связанные с тем, что натуральное число n, не превосходящее x не может иметь более $\log_2 x$ простых делителей. Это означает, что каждое решение $(x_1, \ldots, x_k)$ уравнения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = n$ в целых положительных числах содержит множество единиц. Таким образом данная задача приобретает комбинаторный характер. Требуется посчитать количество различных способов распределения простых делителей числа n по координатам $(x_1, \ldots, x_k)$, причем «пустые» координаты (в которые не попал ни один простой делитель) мы полагаем равными 1.

Доказательство формулы (8) проводится методом комплексного интегрирования с использованием современных оценок модуля дзета-функции Римана в различных областях комплексной плоскости. В главе 2 получено уточнение теоремы А.И. Павлова за счет рассмотрения различных контуров интегрирования, когда параметр k принадлежит различным промежуткам, а также за счет более глубокого рассмотрения поведения растущей степени дзета-функции Римана в окрестности полюса. Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $\sigma = 1 + \frac{1}{b}$, $b = \gamma_0 + \frac{\ln x}{k}$ *и*

$$I_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \frac{i}{2}}^{\sigma + \frac{i}{2}} \zeta^k(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds.$$

Пусть, кроме того, $x \to \infty$ *и* $k \to \infty$ *так, что для некоторого фиксированного* $0 < \rho < \frac{1}{3}$ *выполнено неравенство* $k \ll (\ln x)^{\frac{4}{5+\rho}}$. *Тогда верна асимптотическая формула*

$$I_k(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} \exp\{q_3(x,k)\} L_3(x,k) \left(1 + O\left(\frac{k^{5+\rho}}{\ln^4 x}\right) + O\left(k^{3\rho-1}\right)\right),$$

где функции $q_3(x,k)$ *и* $L_3(x,k)$ *определены из формул (9) и (10).*

После исследования поведения среднего значения функции делителей в главах 1 и 2, в *главе 3* мы переходим к изучению экстремальных значений функции делителей по специальным целочисленным последовательностям. Еще с начала XX века известно соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \tau_k(n) \ln\ln n}{\ln n} = \ln k,$$

из которого следует, что $\tau_k(n) \ll_{k,\varepsilon} n^{\varepsilon}$ для произвольного $\varepsilon > 0$. Это означает, что отношение количества делителей любого числа к сколь угодно малой фиксированной степени этого числа не превосходит определенной константы.

В параграфе 3.3 рассматриваются вопросы, связанные с поведением функции делителей на последовательности биномиальных коэффициентов C_n^k. Найден точный порядок роста отношения количества делителей «соседних» чисел сочетаний.

Теорема. *Пусть даны целые числа $k \geqslant 1$ и $n > \prod_{p \leqslant k+1} p^{[\log_p k]} + k$. Тогда выполнено неравенство*

$$T_k(n) = \frac{\tau\left(C_n^k\right)}{\tau\left(C_n^{k+1}\right)} \leqslant \frac{\tau(k+1)}{2}, \tag{11}$$

причем для каждого $k \geqslant 1$ найдется бесконечное количество целых положительных n, что в (11) выполнено равенство.

Кроме того, найден нижний предел $T_k(n)$.

Теорема. *Пусть целые $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$ такие, что $k = o\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right)$ при $n \to \infty$. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \ln\left(\frac{\tau\left(C_n^{k+1}\right)}{\tau\left(C_n^k\right)}\right) \frac{\ln \ln n}{\ln n} = \ln 2.$$

Доказательства сформулированных утверждений основаны на ряде лемм, отражающих свойства отношений функций делителей. Отметим, что следующей вспомогательной лемме получено рекуррентное соотношение для максимальных степеней простых делителей биномиальных коэффициентов.

Лемма. *Пусть n и k натуральные числа, $k \leqslant \frac{n}{2}$, p - простое число, $p \leqslant k$. Выберем целое число m с условиями, что $0 \leqslant m \leqslant k-1$ и выражение $\nu_p(n-m)$ принимает максимальное значение. Тогда*

$$\nu_p\left(C_n^k\right) = \nu_p(n-m) - \nu_p\left(C_{k-1}^m\right) - \nu_p(k) = \nu_p(n-m) - \nu_p\left(C_k^m\right) - \nu_p(k-m).$$

Параграф 3.4 посвящен выводу асимптотической формулы для количества делителей «центрального» биномиального коэффициента C_{2n}^n.

Теорема. *При $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$\ln \tau\left(C_{2n}^n\right) = \ln 2\big(\pi(2n) - \pi(n)\big) + \ln 2 \frac{n}{\ln n} \sum_{k=0}^{T} \frac{c_k}{(\ln n)^k} + \mathcal{O}\left(\frac{n}{(\ln n)^{T+2}}\right), \tag{12}$$

где $0 \leqslant T$ – произвольное фиксированное целое число, коэффициенты c_k вычисляются по формулам

$$c_k = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{m+\frac{1}{2}}^{m+1} \frac{(\ln t)^k}{t^2} dt.$$

В частности, из асимптотической формулы (12) следует, что

$$\ln \tau\left(C_{2n}^n\right) = 2(\ln 2)^2 \frac{n}{\ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{n}{(\ln n)^2}\right).$$

Также в параграфе 3.4 доказана асимптотическая формула для количества делителей наименьшего общего кратного первых n подряд идущих натуральных чисел.

Теорема. *При $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$\ln \tau\big(\eta(n)\big) = \ln 2 \cdot \pi(n) + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right),$$

где наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$ обозначено следующим образом: $HOK(1, \ldots, n) = \eta(n)$.

В *главе 4* рассматривается одно обобщение функции делителей, которое мы называем *проекцией функции делителей*. Обобщение заключается в том, что в отличии от традиционной функции делителей теперь учитываются только те делители чисел, которые в разложении имеют простые множители из фиксированного множества $\mathcal{A}$ простых чисел. Таким образом, функция делителей совпадает с проекцией функции делителей на числах со всеми простыми множителями из множества $\mathcal{A}$. Значит, распределение значений проекции функции делителей можно рассматривать как распределение значений функции делителей на множестве натуральных чисел с простыми множителями из множества $\mathcal{A}$.

Э. Ландау [32], [33] доказал ряд общих теорем о распределении натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат некоторым подмножествам $\mathbb{N}$. В частности, им получена асимптотическая формула для $n(x)$ — количества чисел n, не превосходящих x, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям с разностью k,

[32] Landau E. *"Handbuch der Lehre von der Verteilund der Primzahlen"*, **2** Taubner, Leipzig, 1909.

[33] Landau E. *"Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen"*, Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klassen, Hft., **6** (1912), 687–771.

$k \geqslant 2$, и первыми членами $l_1, \ldots, l_r$, где $1 \leqslant l_1 < \ldots < l_r < k$, $r \leqslant \varphi(k)$, $(l_1, k) = 1, \ldots, (l_r, k) = 1$. Эта формула имеет вид

$$n(x) = c_0 x (\ln x)^{\frac{r}{\varphi(k)}-1} + \mathcal{O}\left(x (\ln x)^{\frac{r}{\varphi(k)}-2}\right).$$

Похожие теоремы, но по специальным множествам простых чисел, отличным от множеств Ландау, доказаны М.Е. Чангой в работах [34], [35], [36]. В этих работах получены также асимптотики сумм мультипликативных функций, причем суммирования ведутся по специальным множествам натуральных чисел, включая вышеуказанные.

Результатом четвертой главы является получение асимптотической формулы для суммы значений проекции функции делителей с некоторыми ограничениями, наложенными на выбор множества $\mathcal{A}$.

Теорема. *Пусть множество простых чисел $\mathcal{A}$ такое, что $\sum_{p \in \mathcal{A}} \frac{1}{p} < \infty$, тогда для $x \geqslant 2$ выполнено равенство*

$$\sum_{n \leqslant x} \tau_k^{\mathcal{A}}(n) = B^{1-k} x + \theta c x^{1-\alpha} \ln x, \quad \text{где} \quad B = \prod_{p \in \mathcal{A}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

$0 < \alpha < 1$, c — некоторые абсолютные постоянные, $|\theta| < 1$. В случае, если $\sum_{p \notin \mathcal{A}} \frac{1}{p} < \infty$, для $x \geqslant 2$ имеем

$$\sum_{n \leqslant x} \tau_k^{\mathcal{A}}(n) = B^{k-1} x P_{k-1}(\ln x) + \theta x^{1 - \frac{\alpha}{k^{\frac{2}{3}}}} (c \ln x)^k.$$

Многочлен $P_{k-1}(\ln x)$ степени $(k-1)$ такой же как в многомерной проблеме делителей.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Чубарикову Владимиру Николаевичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Автор благодарит весь коллектив кафедры математических и компьютерных методов анализа Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

[34] Чанга М.Е. *“О числах, все простые делители которых лежат в специальных промежутках”*, Изв. РАН. Сер. матем., **67**:4 (2003), 213–224; англ. пер.: Changa M.E. *“Numbers whose prime divisors lie in special intervals”*, Izv. Math., **67**:4 (2003), 837–848.

[35] Чанга М.Е. *“Арифметические задачи с числами, все простые делители которых принадлежат специальным множествам”*, Дис. ... докт. физ.- матем. наук, МИАН, М., 2004.

[36] Чанга М.Е. *“О суммах мультипликативных функций по числам, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям”*, Изв. РАН. Сер. матем., **69**:2 (2005), 423–438.

Работы автора по теме диссертации

[1] Федоров Г.В. *“Асимптотика одной арифметической суммы”*, Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика., **2** (2010), 50–53.

[2] Федоров Г.В. *“Оценка суммы значений функции делителей”*, Материалы международной научной конференции «Современные проблемы анализа и преподавания математики», Москва, 17-19 мая 2010 г., стр. 86–87 (2010).

[3] Федоров Г.В. *“Об одной теореме А.И. Павлова”*, Доклады Академии Наук, **445**:5 (2012), 1–2.