МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи
УДК 515.142.22+514.172.45

Айзенберг Антон Андреевич

ТЕОРИЯ НЕРВ-КОМПЛЕКСОВ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность:
01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	член-корреспондент РАН, профессор Бухштабер Виктор Матвеевич
Официальные оппоненты:	Аржанцев Иван Владимирович доктор физико-математических наук, доцент (ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова”, доцент)
	Кустарёв Андрей Александрович кандидат физико-математических наук (ФГАОУ ВПО “Московский физико-технический институт (государственный университет)”, ассистент)
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО “Московский педагогический государственный университет”

Защита диссертации состоится 12 октября 2012г. в $16^{\underline{45}}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 12 сентября 2012г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В настоящее время в комбинаторике и выпуклой геометрии стали находить применение методы коммутативной алгебры, алгебраической геометрии и топологии. Актуальным разделом алгебраической геометрии стала торическая геометрия, изучающая свойства торических многообразий. Каждому выпуклому многограннику в $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами вершин можно сопоставить алгебраическое многообразие с действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$, являющееся эквивариантной компактификацией тора $(\mathbb{C}^*)^n$. С одной стороны, эта конструкция дает обширный класс примеров алгебраических многообразий, свойства которых можно эффективно описывать в терминах комбинаторных данных. С другой стороны, конструкция торического многообразия позволяет доказывать сильные результаты о комбинаторике многогранников при помощи методов алгебраической геометрии.

М. Дэвис и Т. Янушкиевич[1] ввели понятие *квазиторического многообразия*, являющееся топологическим аналогом торического многообразия. Для определения квазиторического многообразия над простым многогранником P^n с m гипергранями им потребовалась конструкция $(m+n)$-мерного многообразия $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием тора T^m, для которого многогранник P является пространством орбит. В своих работах[2,3] В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов предложили рассматривать многообразия $\mathcal{Z}_P$ как центральный объект исследования в торической топологии и развили различные подходы к изучению этих пространств, названных ими *момент-угол многообрази-*

[1] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., 1991. V.62, №2, 417–451.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия тора и комбинаторика многогранников*, Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 225, 1999, 96–131.

[3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра*, УМН, 55:5(335) (2000), 3–106.

ями. С одной стороны, многообразие $\mathcal{Z}_P$ можно представить как невырожденное пересечение вещественных квадрик[4] в пространстве $\mathbb{C}^m$, что позволяет исследовать эти многообразия методами дифференциальной геометрии. С другой стороны, многообразие $\mathcal{Z}_P$ обладает канонической клеточной структурой, определяемой комбинаторикой многогранника. В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов[3] показали, что существует общая алгебро-топологическая конструкция, сопоставляющая каждому симплициальному комплексу K клеточный комплекс $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$; при этом момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ простого многогранника P гомеоморфно клеточному комплексу $\mathcal{Z}_{\partial P^*}(D^2, S^1)$, где ∂P^* — граница двойственного к P симплициального многогранника. Используя каноническую клеточную структуру на комплексе $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$,
В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов показали, что алгебра когомологий $\widetilde{H}^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \Bbbk)$ изоморфна Tor-алгебре $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$ алгебры Стенли–Райснера симплициального комплекса K. Этот результат позволил вычислить кольцо когомологий момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ простого многогогранника P в терминах алгебры Стенли–Райснера симплициальной сферы ∂P^*.

Диссертация посвящена развитию теории момент-угол многообразий и ее взаимосвязи с теорией алгебр Стенли–Райснера. Тема диссертации актуальна, так как момент-угол многообразия являются центральным объектом торической топологии, а алгебры Стенли–Райснера — понятие, нашедшее множество приложений в комбинаторике и топологии. В диссертации исследован случай произвольных выпуклых многогранников, в том числе и не простых. Каждому выпуклому многограннику P сопоставлен симплициальный комплекс K_P. Если P — простой многогранник, то $K_P = \partial P^*$, однако в общем случае комплекс K_P не является симплициальной сферой. В диссертации приведены основные свойства симплициальных комплексов K_P, све-

[4]V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*, Moscow Math. J., V.7, №2, 2007, 219–242.

денные воедино в понятии *нерв-комплекса*, обобщающем понятия симплициальной сферы и симплициального многообразия. Нерв-комплексы являются основным объектом исследования.

Известно, что для симплициальной сферы K выполнены соотношения Дена–Соммервилля[5,6] $h_i(K) = h_{n-i}(K)$. Имеется обобщение этой формулы на случай $(n-1)$-мерного симплициального многообразия K, полученное Р. Стенли[7] алгебраическим методом и, независимо, В. М. Бухштабером и Т. Е. Пановым топологическим методом. В этом случае выполнены соотношения

$$h_{n-i}(K) - h_i(K) = (-1)^i(\chi(K) - \chi(S^{n-1}))\binom{n}{i}.$$

В диссертации доказаны соотношения на f-числа нерв-комплексов, обобщающие приведенные результаты.

Даже в случае, когда многогранник P не является простым, *момент-угол пространство* $\mathcal{Z}_P$ можно определить как пересечение вещественных квадрик в пространстве $\mathbb{C}^m$. В диссертации показано, что момент-угол пространство $\mathcal{Z}_P$ гомотопически эквивалентно клеточному комплексу $\mathcal{Z}_{K_P}(D^2, S^1)$, что позволяет вычислить его кольцо когомологий:

$$\widetilde{H}^*(\mathcal{Z}_P; \Bbbk) \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K_P], \Bbbk),$$

где m — число гиперграней многогранника P, а $\Bbbk[K_P]$ — алгебра Стенли–Райснера симплициального комплекса K_P. Здесь и далее $\Bbbk$ используется для обозначения основного поля, а результаты, которые верны также и для случая $\Bbbk = \mathbb{Z}$, специально оговариваются.

Теория алгебр Стенли–Райснера возникла в работе Дж. Райс-

[5] D. M. Y. Sommerville, *The relations connecting the angle sums and volume of a polytope in space of n dimensions*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 1927. V.115, 103–119.

[6] V. Klee, *A combinatorial analogue of Poincaré duality theorem*, Canad. J. Math. 1964. V.16. 517–531.

[7] R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 1996 (Progress in Mathematics V. 41).

нера[8], была существенно развита Р. Стенли[7] и в настоящее время является важным разделом комбинаторной коммутативной алгебры. В коммутативной алгебре и алгебраической геометрии важную роль играет понятие алгебры Коэна–Маколея, то есть алгебры, глубина которой совпадает с размерностью Крулля. Дж. Райснер[8], используя свойства локальных когомологий колец, нашел условия на симплициальный комплекс K, при которых алгебра $\Bbbk[K]$ является алгеброй Коэна–Маколея. Основываясь на теореме Райснера, Р. Стенли[9] доказал гипотезу о верхней границе для симплициальных сфер, согласно которой на h-числа симплициальной $(n-1)$-мерной сферы K на m вершинах имеются неравенства $h_i(K) \leqslant \binom{m-n+i-1}{i}$, при $i = 0, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Дж. Манкрс[10] обобщил результат Райснера, описав условия на топологию симплициального комплекса K, при которых глубина кольца $\Bbbk[K]$ равна заданному числу. Для доказательства он использовал спектральную последовательность Зимана в интерпретации МакКрори[11].

Алгебра $\Bbbk[K]$ является модулем над алгеброй многочленов $\Bbbk[m]$ и к ней применима теорема Ауслендера–Буксбаума[12], утверждающая в этом случае, что $\operatorname{depth}\Bbbk[K] + \operatorname{pdim}\Bbbk[K] = m$, где $\operatorname{pdim}\Bbbk[K]$ — длина минимальной свободной резольвенты модуля $\Bbbk[K]$. Ранги модулей свободной резольвенты выражаются через когомологии полных подкомплексов, по формуле Хохсте-

[8]G. Reisner, *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings*, Adv. in Math., V.21, №1, 1976, 30–49.

[9]R. Stanley, *The upper bound conjecture and Cohen–Macaulay rings*, Studies in Applied Math. 1975, V.54, №2, 135–142.

[10]James R. Munkres, *Topological results in combinatorics*, Michigan Math. J., V. 31, Issue 1 (1984), 113–128.

[11]Clint McCrory, *Zeeman's filtration on homology*, Transactions of the AMS, V.250, 1979, 147–166.

[12]W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings, revised edition*, Cambridge 1993 (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; V.39).

ра[13]:
$$\mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)\cong\bigoplus_{J\subseteq[m],|J|=j}\widetilde{H}^{j-i-1}(K_J;\Bbbk).$$
Из этой формулы и теоремы Ауслендера–Буксбаума следует описание глубины в терминах топологии полных подкомплексов. На основе такого описания в диссертации получен новый комбинаторно-топологический метод исследования глубины колец Стенли–Райснера. Предложенный метод существенно упрощает доказательства теорем Райснера и Манкрса и позволяет доказать соотношение $\operatorname{depth}\Bbbk[K_P]=\dim P$ для произвольного выпуклого многогранника P.

В диссертации также исследован вопрос о подгруппах тора T^m, свободно действующих на пространствах $\mathcal{Z}_P$ и клеточных комплексах $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$. Если X — пространство с действием тора T^m, то число $s(X)$ определяется как максимальная размерность подторов $T^s\subset T^m$, индуцированное действие которых на X является свободным. В случае $X=\mathcal{Z}_P$ или $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$ число $s(X)$ является характеристикой многогранника P и комплекса K соответственно. В этих случаях число $s(X)$ обозначается $s(P)$ и $s(K)$ и называется числом Бухштабера. В 2002 году В. М. Бухштабер[14] поставил задачу: найти алгоритмический способ вычисления инвариантов $s(P)$ и $s(K)$ по комбинаторике P и K. В диссертации показано, что $s(P)=s(K_P)$, поэтому исследуются только симплициальные комплексы. Изучение числа Бухштабера началось в 2001 году, когда И. В. Изместьев[15] доказал оценку $s(K)\geqslant m-\gamma(K)$, где $\gamma(K)$ — хроматическое число симплициального комплекса K. Частичным упрощением числа Бухштабера является его вещественный аналог ${}_{\mathbb{R}}s(K)$ — максимальный ранг подгрупп группы $\mathbb{Z}_2^m$, действующих свободно

[13] M. Hochster, *Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., V.26, Dekker, New York, 1977, 171–223.

[14] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lectures Series, vol.24, AMS, Providence, RI, 2002.

[15] И. В. Изместьев, *Трехмерные многообразия, определяемые раскраской граней простого многогранника*, Матем. заметки, Т.69, №3, 2001, 375–382.

на вещественном момент-угол комплексе $\mathcal{Z}_K(D^1, S^0)$. Нетрудно доказать оценку $s(K) \leqslant {}_{\mathbb{R}}s(K)$. Значительные результаты о вещественном числе Бухштабера остовов симплексов были получены в работе М. Мацуды и Ю. Фукукавы[16]. Теория числа Бухштабера простых многогранников была развита Н. Ю. Ероховцом[17,18].

В работе М. Дэвиса и Т. Янушкиевича[1] построено семейство универсальных симплициальных комплексов U_l. Из результатов работы[18] следует, что для симплициального комплекса K на m вершинах число $m - s(K)$ совпадает с наименьшим натуральным числом l, для которого существует невырожденное симплициальное отображение из K в U_l. Это наблюдение позволяет рассматривать число $m - s(K)$ как обобщенный хроматический инвариант в смысле Р. Зивальевича[19]. При помощи такого подхода в диссертации исследовано число Бухштабера маломерных симплициальных комплексов.

Цель работы.

Обобщение теории момент-угол пространств на случай непростых выпуклых многогранников и исследование симплициальных комплексов, ассоциированных с многогранниками.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Каждому выпуклому многограннику P сопоставлен симплициальный комплекс K_P, являющийся его полным ком-

[16]Yukiko Fukukawa and Mikiya Masuda, *Buchstaber invariants of skeleta of a simplex*, Osaka J. Math. V. 48, №2 (2011), 549–582.

[17]Н. Ю. Ероховец, *Инвариант Бухштабера простых многогранников*, УМН Т.63 №383, 2008, 187–188.

[18]Н. Ю. Ероховец, *Максимальные действия торов на момент-угол многообразиях*, кандидатская диссертация, МГУ им. М.В.Ломоносова, мех.-мат. факультет, 2011.

[19]Rade T. Živaljević, *Combinatorial groupoids, cubical complexes, and the Lovász conjecture*, Discrete and Computational Geometry, V.41, №1, 135–161.

бинаторным инвариантом. Построена общая теория нерв-комплексов, описывающая свойства симплициальных комплексов типа K_P.

2. Доказано, что для произвольного выпуклого многогранника P с m гипергранями топологические пространства $\mathcal{Z}_P$ и $\mathcal{Z}_{K_P}(D^2, S^1)$ с действием тора T^m эквивариантно гомотопически эквивалентны.

3. Пусть $\Bbbk$ — поле. Скажем, что симплициальный комплекс L является p-ацикличным (над $\Bbbk$), если $\widetilde{H}_i(L;\Bbbk) = 0$ при $i \leqslant p$. При этом по определению $\widetilde{H}_{-1}(\varnothing;\Bbbk) \cong \Bbbk$. В диссертации доказано, что для симплициального комплекса K на m вершинах и его алгебры Стенли–Райснера $\Bbbk[K]$ эквивалентны следующие условия:

   (a) $\operatorname{depth}\Bbbk[K] \geqslant s+1$;

   (b) Для любого набора вершин $J \subseteq [m]$ полный подкомплекс $K_{[m]\setminus J}$ является $(s-1-|J|)$-ацикличным над $\Bbbk$.

   (c) Для любого симплекса $I \in K$ симплициальный комплекс $\operatorname{link}_K I$ является $(s-1-|I|)$-ацикличным над $\Bbbk$.

   На основе этой эквивалентности получено новое доказательство теоремы Райснера и теоремы Манкрса. Показано, что $\operatorname{depth}\Bbbk[K_P] = \dim P$ для произвольного выпуклого многогранника P. Получен ряд соотношений на биградуированные числа Бетти нерв-комплексов K_P.

4. Для максимальной размерности $s(K)$ торических подгрупп, действующих свободно на момент-угол комплексе $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$, и максимального ранга ${}_{\mathbb{R}}s(K)$ подгрупп группы $\mathbb{Z}_2^m$, действующих свободно на вещественном момент-угол комплексе $\mathcal{Z}_K(D^1, S^0)$, доказаны следующие результаты:

   (a) ${}_{\mathbb{R}}s(K) \leqslant m - \lceil \log_2(\gamma(K)+1) \rceil$, где $\gamma(K)$ — хроматическое число симплициального комплекса K;

(b) $s(K) = {}_{\mathbb{R}}s(K) = m - \lceil \log_2(\gamma(K)+1) \rceil$, если $\dim K = 1$;

(c) Существует такой симплициальный комплекс U, что $s(U) \neq {}_{\mathbb{R}}s(U)$.

(d) Существуют такие симплициальные комплексы Γ_1 и Γ_2, что $s(\Gamma_1 * \Gamma_2) \neq s(\Gamma_1) + s(\Gamma_2)$ и ${}_{\mathbb{R}}s(\Gamma_1 * \Gamma_2) \neq {}_{\mathbb{R}}s(\Gamma_1) + {}_{\mathbb{R}}s(\Gamma_2)$.

Основные методы исследования.

В работе используются методы торической топологии, теории гомотопий, комбинаторики и коммутативной алгебры.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов по торической и комбинаторной топологии, комбинаторике и коммутативной алгебре.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

1. Семинар «Алгебраическая топология и её приложения» им. М. М. Постникова под руководством чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. А. В. Чернавского, проф. И. А. Дынникова, проф. Т. Е. Панова, доц. Л. А. Алании и доц. Д. В. Миллионщикова; кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ — неоднократно с 2010 года по 2012 год;

2. Семинар «Некоммутативная топология» под руководством проф. А. С. Мищенко, проф. И. К. Бабенко, проф. Е. В. Троицкого, проф. В. М. Мануйлова, доц. А. А. Ирматова; кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ — в 2010 году;

3. Семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством акад. РАН А. Т. Фоменко; кафедра дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ — в 2011 году;

4. Международная конференция «Ломоносов 2010», г. Москва, 12-15 апреля 2010 года, МГУ.

5. Международная конференция «Ломоносов 2011», г. Москва, 11-15 апреля 2011 года, МГУ.

6. Международная конференция «Торическая топология и автоморфные функции», г. Хабаровск, 5-10 сентября 2011 года.

7. Русско-японская конференция «Toric topology in Osaka 2011», г. Осака, Япония, 27-30 ноября 2011 года.

8. Международная конференция «Александровские чтения», г. Москва, 21-25 мая 2012 года, МГУ.

9. Шестой Европейский Конгресс Математиков, постерный доклад, г. Краков, Польша, 2-6 июля 2012 года.

Публикации.

Основное содержание диссертации опубликовано в трёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1,2,3]

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа изложена на 135 страницах и состоит из введения, пяти глав и дополнения. Библиография включает 72 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемой проблемы, формулируются основные результаты, приводится краткое содержание работы и список основных обозначений.

Содержание главы 1

В главе 1 приведен обзор определений, которые используются в работе. Раздел 1.1 содержит обзор теории симплициальных комплексов. Приведены определения классических понятий: линка, геометрической реализации симплициального комплекса, симплициальной сферы и симплициального многообразия, f- и h-чисел и многочленов. Сформулированы соотношения Дена–Соммервилля: $h_i(K) = h_{n-i}(K)$ для h-чисел симплициальной сферы K и их аналог для симплициальных многообразий. В разделе 1.2 приводятся сведения о выпуклых многогранниках. Даны определения двойственности, простых и симплициальных многогранников, а также определение прямого произведения и джойна выпуклых многогранников. Необходимые сведения о частично упорядоченных (ч.у.) множествах содержатся в разделе 1.3.

Раздел 1.4 посвящен момент-угол пространствам многогранников. Каждому выпуклому многограннику P с m гипергранями сопоставлено момент-угол пространство $\mathcal{Z}_P$, являющееся пересечением вещественных квадрик специального вида в пространстве $\mathbb{C}^m$. На пространстве $\mathcal{Z}_P$ задано действие тора T^m, фактор-пространством которого является исходный многогранник P. В разделе 1.5 описана конструкция момент-угол комплекса. Каждому симплициальному комплексу K на m вершинах сопоставлен клеточный момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ с действием тора T^m. Связь момент-угол пространств и момент-угол комплексов дает теорема Бухштабера–Панова: для простого многогранника P с m гипергранями имеет место T^m-

эквивариантный гомеоморфизм $\mathcal{Z}_P \cong \mathcal{Z}_{\partial P^*}(D^2, S^1)$, где ∂P^* — граница двойственного к P симплициального многогранника.

В разделе 1.6 приводится определение алгебры Стенли–Райснера $\Bbbk[K]$ симплициального комплекса K, структуры $\Bbbk[m]$-модуля на ней. Описаны свойства свободной резольвенты модуля $\Bbbk[K]$ и Tor–алгебры $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$. Согласно теореме Бухштабера–Панова: $H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \Bbbk) \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$, где $\Bbbk$ — поле или кольцо $\mathbb{Z}$. Этот результат можно рассматривать как способ ввести двойную градуировку на кольце когомологий момент-угол комплекса. Определены биградуированные числа Бетти симплициального комплекса:

$$\beta^{-i,2j}(K) = \mathrm{rk}_{\Bbbk} \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk).$$

В разделе 1.7 приведены основные сведения из гомотопической теории диаграмм топологических пространств. В разделе даны определения копределов и гомотопических копределов и собраны утверждения, позволяющие эффективно работать с этими объектами. Утверждения, приведенные в разделе 1.7, используются только в главе 3 и дополнении А.

Содержание главы 2

В главе 2 дано определение нерв-комплексов — основного объекта данного исследования. Каждому выпуклому многограннику P сопоставлен симплициальный комплекс K_P. Разбору этой конструкции и примеров посвящен раздел 2.1. Также в этом разделе приводится описание связи нерв-комплексов с конструкцией Батырева–Кокса торического многообразия над рациональным многогранником. В разделе 2.2 исследован вопрос, какими комбинаторно-топологическими свойствами обладает симплициальный комплекс K_P.

Для каждого симплициального комплекса K определено подмножество $F(K)$ симплексов, представимых в виде пересечения максимальных симплексов.

Определение 2.2.6. *Нерв-комплексом (соотв. гомологическим нерв-комплексом) ранга n называется симплициальный комплекс K, удовлетворяющий условиям:*

1. *$\varnothing \in F(K)$;*

2. *$F(K)$ является градуированным частично-упорядоченным множеством с функцией ранга* $\operatorname{rank}\colon F(K) \to \{0, \ldots, n\}$, $\operatorname{rank}(\varnothing) = 0$, $\operatorname{rank}(I) = n$ *для максимального симплекса $I \in F(K)$;*

3. *Если $I \in F(K)$ и $I \neq \varnothing$, то комплекс $\operatorname{link}_K I$ гомотопен (соотв. гомологичен) сфере $S^{n-\operatorname{rank}(I)-1}$.*

Если, кроме того, K гомотопен (соотв. гомологичен) сфере S^{n-1}, то K называется сферическим (соотв. сферическим гомологическим) нерв-комплексом.

Теорема 2.2.9. *Если P^n — выпуклый многогранник, то K_P — сферический нерв-комплекс ранга n, причем ч.у. множество $F(K_P)$ изоморфно множеству граней многогранника P с обращенным порядком.*

Следствие 2.2.10. *Симплициальный комплекс K_P является полным комбинаторным инвариантом многогранника P.*

Нетрудно проверить, что любое симплициальное многообразие является гомологическим нерв-комплексом. В разделе 2.3 исследованы f-многочлены нерв-комплексов. Основной результат раздела таков:

Предложение 2.3.1. *Если K — гомологический нерв-комплекс ранга n, то*

$$f_K(t) = (1 - \chi(K)) + \sum_{I \in F(K), I \neq \varnothing} (-1)^{n-\operatorname{rank} I}(t+1)^{|I|},$$

где χ — эйлерова характеристика.

Из этого утверждения следуют соотношения Дена–Соммервилля для сфер и многообразий, а также формула $f_{K_P}(t) = F_P(-1, t+1)$, где по определению $F_P(\alpha, t) = \sum\limits_{F \subseteq P} \alpha^{\dim F} t^{m(F)}$, а

$m(F)$ — число гиперграней, содержащих грань F. Доказательство предложения 2.3.1 основано на обобщении метода В. М. Бухштабера, предложенного в работе[20].

Содержание главы 3

Главы 3 и 4 являются центральными главами диссертации.

Теорема 3.1.7. *Момент-угол пространство $\mathcal{Z}_P$ эквивариантно гомотопически эквивалентно момент-угол комплексу $\mathcal{Z}_{K_P}(D^2, S^1)$.*

Для доказательства этого факта используется описание пространства $\mathcal{Z}_P$ как гомотопического копредела специальной диаграммы торов над ч.у. множеством граней многогранника. С другой стороны, в работе [21] приведено описание момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{K_P}(D^2, S^1)$ как копредела некоторой диаграммы топологических пространств над ч.у. множеством симплексов комплекса K_P. Теорема 3.1.7 доказывается применением известных результатов о копределах и гомотопических копределах.

В разделе 3.2 показано, что для любых выпуклых многогранников P и Q имеет место гомеоморфизм: $\mathcal{Z}_{P*Q} \cong \mathcal{Z}_P * \mathcal{Z}_Q$, а в случае, если оба многогранника не равны точке, имеем $\mathcal{Z}_{P\times Q} \cong \mathcal{Z}_P \times \mathcal{Z}_Q$. Таким образом, на основании гомологических характеристик момент-угол пространств $\mathcal{Z}_P$ можно строить инварианты исходных многогранников, мультипликативные относительно операций прямого произведения и джойна. Эта идея развита в разделе 3.3. Каждому выпуклому многограннику P сопоставлен многочлен $\beta_P(s,t) = \sum_{i,j} \beta^{-i,2j}(K_P)s^{-i}t^{2j}$.

Предложение (следствие 3.3.8). *Для произвольных многогранников P и Q выполнено соотношение*

$$\beta_{P*Q}(s,t) - 1 = (\beta_P(s,t) - 1) \cdot (\beta_Q(s,t) - 1) \cdot s.$$

[20] В. М. Бухштабер, *Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения*, Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 263, 2008, 18–43.

[21] Taras Panov, Nigel Ray, Reiner Vogt, *Colimits, Stanley–Reisner algebras and loop spaces*, Progress in Math., V.215, 2004, 261–291.

Если $\dim P > 0, \dim Q > 0$, *то*

$$\beta_{P\times Q}(s,t) = \beta_P(s,t)\beta_Q(s,t).$$

Важность задачи построения джойн-мультипликативных инвариантов многогранников была продемонстрирована в работе [22]. В разделе 3.3. также описана взаимосвязь многочлена $\beta_P(s,t)$ с многочленом $F_P(\alpha,t)$, определенным в разделе 2.3.

Содержание главы 4

Глава 4 посвящена исследованию гомологических характеристик колец Стенли–Райснера симплициальных комплексов, и, в частности, сферических нерв-комплексов. За исключением отдельно оговоренных случаев предполагается, что $\Bbbk$ — поле.

Теорема 4.1.1. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$, а $\Bbbk$ — поле. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\operatorname{depth}\Bbbk[K] \geqslant s+1$;
2. *Для любого подмножества вершин $J \subset [m]$ и $i < s - |J|$ выполнено $\widetilde{H}^i(K_{\widehat{J}};\Bbbk) = 0$.*
3. *Для любого симплекса $I \in K$ и $i < s - |I|$ выполнено $\widetilde{H}^i(\operatorname{link}_K I;\Bbbk) = 0$.*

Доказательству этой теоремы посвящены разделы 4.2 и 4.3. В разделе 4.2 приведены необходимые сведения о понятии глубины модуля. Согласно теореме Ауслендера–Буксбаума[12], $\operatorname{depth}\Bbbk[K] = m - \operatorname{pdim}\Bbbk[K]$, где m — число вершин комплекса K, а $\operatorname{pdim}\Bbbk[K]$ — проективная размерность модуля, то есть минимальная длина проективной резольвенты модуля $\Bbbk[K]$. Таким образом, $\operatorname{depth}\Bbbk[K] \geqslant s+1$ в том и только том случае,

[22] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, *Многогранники, числа Фибоначчи, алгебры Хопфа и квазисимметрические функции*, УМН, 66:2(398), 2011, 67–162.

когда $\beta^{-i,2j}(K) = 0$ при всех j и $i \geqslant m - s$. Хохстером[13] была доказана формула

$$\beta^{-i,2j}(K) = \sum_{J \subseteq [m], |J|=j} \operatorname{rk}_{\Bbbk} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J; \Bbbk),$$

выражающая биградуированные числа Бетти в терминах когомологий полных подкомплексов. Из теорем Ауслендера–Буксбаума и Хохстера выводится эквивалентность первых двух пунктов в теореме 4.1.1.

В разделе 4.3 приведено доказательство эквивалентности пунктов 2 и 3 теоремы 4.1.1, являющееся наиболее содержательной ее частью. Показано, что эта эквивалентность имеет место также и в случае $\Bbbk = \mathbb{Z}$. Из теоремы 4.1.1 следуют два известных результата:

Теорема Райснера.[8] *Алгебра* $\Bbbk[K]$ *является алгеброй Коэна–Маколея в том и только том случае, когда для любого симплекса* $I \in K$ *и* $i < \dim K - |I|$ *имеют место равенства* $\widetilde{H}_i(\operatorname{link}_K I; \Bbbk) = 0$.

Теорема Манкрса.[10] $\operatorname{depth} \Bbbk[K] \geqslant s + 1$ *в том и только том случае, когда для любой точки* x *геометрической реализации* $|K|$ *и* $i < s$ *выполнено соотношение*

$$\widetilde{H}_i(K; \Bbbk) = \widetilde{H}_i(|K|, |K| \setminus x; \Bbbk) = 0.$$

Важный класс симплициальных комплексов составляют горенштейновы* комплексы. Горенштейновым* (над $\Bbbk$) называется симплициальный комплекс, для которого (1) алгебра $\Bbbk[K]$ является алгеброй Коэна–Маколея, (2) $\sum_j \beta^{-(m-n),2j}(K) = 1$ и (3) K нельзя представить в виде $K = \Delta^l * L$, $l \geqslant 0$.

Теорема Стенли.[7] Комплекс K является горенштейновым* над $\Bbbk$ тогда и только тогда, когда для любого симплекса $I \in K$ комплекс $\operatorname{link}_K I$ имеет когомологии сферы размерности $\dim \operatorname{link}_K I = \dim K - |I|$ (когомологии с коэффициентами в поле $\Bbbk$).

В разделе 4.4 приведено новое доказательство этого результата. В разделе 4.5 исследованы свойства колец Стенли–Райснера сферических нерв-комплексов.

Теорема 4.5.1. *Если K — сферический нерв-комплекс ранга n, то* $\operatorname{depth}\Bbbk[K] = n$.

Следствие 4.5.2. *Если P — выпуклый многогранник, то*

$$\operatorname{depth}\Bbbk[K_P] = \dim P.$$

Из последнего следствия и результата Аврамова–Голода[23] выводится

Следствие 4.5.4. *Алгебра когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P;\Bbbk)$ является алгеброй Пуанкаре в том и только том случае, когда P — простой многогранник.*

На биградуированные числа Бетти нерв-комплексов многогранников имеется ряд соотношений, аналогичных свойствам горенштейновых* комплексов.

Теорема 4.5.8. *Пусть P — выпуклый многогранник размерности n с m гипергранями. Тогда*

1. $\beta^{-i,2j}(K_P) = 0$ *при* $i > m-n$;
2. $\beta^{-(m-n),2j}(K_P) = 0$ *при* $j \neq m$; $\beta^{-(m-n),2m}(K_P) = 1$;
3. $\beta^{-i,2j}(K_P) = 0$ *при* $j - i > n$;
4. $\beta^{-i,2j}(K_P) = 0$ *при* $j - i = n$ *и* $j \neq m$.

Содержание главы 5

В главе 5 исследуется число Бухштабера — максимальная размерность торических подгрупп, свободно действующих на момент-угол пространствах и момент-угол комплексах. В разделе 5.1 дано определение инварианта Бухштабера $s(\cdot)$ и вещественного инварианта Бухштабера ${}_{\mathbb{R}}s(\cdot)$ и показано, что $s(P) = s(K_P)$ и ${}_{\mathbb{R}}s(P) = {}_{\mathbb{R}}s(K_P)$, что позволяет рассматривать только случай

[23] Л. Л. Аврамов, Е. С. Голод, *Об алгебре гомологий комплекса Козюля локального кольца Горенштейна*, Матем. заметки, Т.9, вып.1, 1971, 53–58.

симплициальных комплексов. Приведена конструкция универсальных комплексов Дэвиса–Янушкиевича U_l из работы [1]. Для симплициального комплекса K на m вершинах число $m-s(K)$ совпадает с наименьшим целым l, для которого существует невырожденное отображение из K в универсальный комплекс U_l согласно [18]. Это соображение позволяет рассматривать число $m-s(K)$ как обобщенный хроматический инвариант в смысле Р. Зивальевича[19]. Описание такого подхода к проблеме Бухштабера и основных свойств обобщенных хроматических инвариантов содержится в разделе 5.2, а в разделе 5.3 на его основе получен следующий результат:

Предложение 5.3.4. *Если* $\dim K = 1$, *а* $\gamma(K)$ *— хроматическое число комплекса* K, *то* $s(K) = {}_{\mathbb{R}}s(K) = m - \lceil \log_2(\gamma(K)+1) \rceil$.

Показано, что в случае $\dim K = 2$ также выполнено равенство $s(K) = {}_{\mathbb{R}}s(K)$. Вопрос о том, совпадают ли вещественное и комплексное числа Бухштабера в общем случае до сих пор был открытым. В разделе 5.4 дан ответ на этот вопрос:

Теорема 5.4.2. Существует симплициальный комплекс U, $\dim U = 3$, такой что $s(U) \neq {}_{\mathbb{R}}s(U)$.

Доказательство этого утверждения состоит в переборе большого числа случаев и в конечном итоге сводится к компьютерному анализу с использованием среды GAP[24].

В разделе 5.5 исследованы аддитивные свойства числа Бухштабера. Согласно результату Н. Ю. Ероховца[17,18] для произвольных симплициальных комплексов K_1 и K_2 на множествах $[m_1]$ и $[m_2]$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &s(K_1) + s(K_2) \leqslant s(K_1 * K_2) \leqslant \\ &\quad \leqslant \min\{s(K_1) + m_2 - \dim K_2 - 1, s(K_2) + m_1 - \dim K_1 - 1\}. \end{aligned}$$

В большинстве примеров, возникающих в торической топологии, достигается равенство $s(K_1 * K_2) = s(K_1) + s(K_2)$, однако до сих пор было неизвестно, выполнено ли оно всегда. В разде-

[24] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*, 2008, http://www.gap-system.org.

ле 5.5 на основе предложения 5.3.4 показано, что это равенство может не иметь места:

Предложение 5.5.4. *Пусть* Γ_1 *— граф Гретча, а* Γ_2 *— полный граф на четырех вершинах. Тогда* $s(\Gamma_1 * \Gamma_2) \neq s(\Gamma_1) + s(\Gamma_2)$.

Содержание дополнения A

В дополнительной главе A определены операции на симплициальных комплексах, обобщающие некоторые известные конструкции. Для симплициального комплекса K на m вершинах и симплициальных комплексов $K_1, \ldots, K_m$ определен новый симплициальный комплекс $K(K_1, \ldots, K_m)$. В частном случае, когда $K_i = \partial\Delta^{l_i - 1}$, комплекс $K(l_1, \ldots, l_m) = K(K_1, \ldots, K_m)$ был определен в работе[25] и использован в работах Ю. М. Устиновского[26,27] для доказательства гипотезы торического ранга для момент-угол многообразий.

Предложение A.6. *Если* $K, K_1, \ldots, K_m$ *— сферические нерв-комплексы, то* $K(K_1, \ldots, K_m)$ *также является сферическим нерв-комплексом.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН, профессору Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановку задачи и внимание на всех этапах написания работы. Автор благодарен д.ф.-м.н., профессору Т. Е. Панову за постоянный интерес с его стороны к этой теме. К.ф.-м.н. С. А. Мелихова и к.ф.-м.н. Н. Ю. Ероховца автор благодарит за ряд высказанных ими полезных замечаний. Автор также благодарен всему коллективу кафедры выс-

[25] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, *A new topological construction of infinite families of toric manifolds implying fan reduction*, arXiv:1011.0094v3.

[26] Ю. М. Устиновский, *Операция удвоения многогранников и действия тора*, УМН, 64:5(389) (2009), 181–182.

[27] Ю. М. Устиновский, *Гипотеза о торическом ранге для момент-угол комплексов*, Матем. заметки, 90:2 (2011), 300–305.

шей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ за поддержку и внимание.

Список публикаций по теме диссертации

[1] А. А. Айзенберг, *Связь инвариантов Бухштабера и обобщённых хроматических чисел*, Дальневост. Матем. Журн. 11:2 (2011), 113–139.

[2] А. А. Айзенберг, В. М. Бухштабер, *Нерв-комплексы и момент-угол пространства выпуклых многогранников*, Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 275, 2011, 22–54. (Автором получены следующие результаты: определение и описание основных свойств нерв-комплексов, доказательство формулы для f-вектора нерв-комплекса, доказательство гомотопической эквивалентности $\mathcal{Z}_P \simeq \mathcal{Z}_{K_P}(D^2, S^1)$, доказательство мультипликативности бета-многочленов относительно произведения и джойна многогранников.)

[3] А. А. Айзенберг, *Экспоненциальный закон для K-степени*, УМН, 64:4 (388) (2009), 175–176.