МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Мигунова Дарья Сергеевна

О движении мяча по травяному газону

01.02.01 — Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2012

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	Вильке В.Г., доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Красильников П.С., доктор физико-математических наук, профессор
	Влахова А.В., кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук

Защита диссертации состоится 2 ноября 2012 года в 16 часов 30 минут на заседании совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 2 октября 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Прошкин В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача о движении шара по шероховатой плоскости для случая точечного контакта была решена Л. Эйлером еще в середине XVIII века. Для изучения динамики системы в случае протяженной зоны контакта была необходима теория контактного взаимодействия, основы которой были заложены Г. Герцем в конце XIX века. Дальнейшее исследование взаимодействия твердого тела и деформируемой среды проводилось такими учеными, как Рейнольдс О., Ишлинский А.Ю., Тейбор Ф.П. и др.

В данной работе деформируемая сплошная среда моделируется однородным множеством стержней, каждый из которых описывается при помощи выбранной модели деформации (рассматриваются модель линейной упругости и модель Кельвина-Фойхта). Подобный подход, при котором опорная плоскость представляется в виде набора единичных деформируемых элементов, применялся в работах Максвелла Дж., Тейбора Ф.П., Больцмана Л. и других авторов.

Рассмотрение сил, действующих не в точке, а на площадке контакта, приводит к тесной взаимосвязи между качением, скольжением и верчением мяча. Этим же свойством обладают некоторые другие модели силы трения, которым посвящены работы Александрова Е.Б., Бриллиантова Н.В., Вильке В.Г., Журавлева В.Ф., Иванова А.П., Карапетяна А.В., Киреенкова А.А., Контенсу П., Косенко И.И., Кулешова А.С., Пасейки Г., Пешеля Т., Трещева Д.В., Швагера Т. и др.

Исследование динамики мяча на деформируемой поверхности актуально также в свете значительного объема накопленных различными исследователями наблюдений и экспериментальных данных, требующих своего объяснения и качественного анализа. Цель работы состоит в развитии методов изучения динамики контактного взаимодействия тел, в том числе с бесконечным числом степеней свободы, и применении этих и ранее известных методов к моделированию предложенной механической системы "мяч-газон".

Основные результаты диссертации и их научная новизна. В работе проведено исследование динамики механической системы, состоящей из массивного шара неизменной формы и деформируемой сплошной среды — так называемого газона. Газон смоделирован непрерывным однородным множеством стержней, недеформированных в отсутствие контакта с мячом. Для стержней рассмотрена модели линейной упругости, а также модель Кельвина-Фойхта.

- Сформулирована постановка задачи о движении мяча с гладкой сферической поверхностью по газону, состоящему из упругих деформируемых стержней. Найдены уравнения движения стержней с помощью вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. В качестве источников сил сопротивления движению рассмотрены ударное взаимодействие стержней и мяча на границе зоны контакта и упругая деформация стержней. Вычислена результирующая сила ударного воздействия, найдено условие существования ударов. Показано, что полученная сила пропорциональна квадрату скорости центра мяча и имеет две компоненты: горизонтальную, противоположную направлению движения, и вертикальную. Найдены перемещения свободных концов стержней и результирующая сила поля реакций, действующих на мяч со стороны стержней, которая направлена вверх вдоль оси OX_3. Получены уравнения движения мяча, имеющие сложный нелинейный характер. Движение подробно исследовано для частных режимов: движения по горизонтальной плоскости, вертикальных колебаний и соскальзывания по наклонной плоскости под действием силы тяжести. В последнем случае исследовано существование стационарных движений. Показано, что в зависимости от параметров системы может существовать до двух стационарных движений, среди которых одно устойчиво, а другое неустойчиво.

- Исследована динамика мяча с шероховатой сферической поверхностью на газоне. Для определения величины сил трения, действующих в точках контакта свободных концов стержней с поверхностью мяча, использован диссипативный функционал, учитывающий зависимость этих величин от распределения нормальной нагрузки, скорости точки контакта, а также выбранной модели трения. Для произвольной модели трения уравнения движения получены в виде системы связанных интегро-дифференциальных уравнений. Рассмотрены частные модели трения: линейное вязкое трение, сухое трение Кулона, вязкая аппроксимация сухого трения. Для линейного вязкого трения вычислены результирующие сила и момент трения, показано существование аттрактора в случае горизонтальной плоскости и стационарных движений в случае наклонной плоскости. Приведены выражения для силы и момента трения для двух других моделей трения и результаты численного интегрирования уравнений движения.

- Рассмотрена динамика взаимодействия мяча с множеством вязкоупругих стержней, описанных при помощи модели Кельвина-Фойхта. Для определения сил сопротивления, возникающих вследствие внутренней вязкости материала стержней, сформулирован диссипативный функционал. С его помощью вычислены нелинейные вязкие силы сопротивления и показана их малость относительно других сил сопротивления. Сформулированы уравнения движения мяча с учетом сил внутренней вязкости. Показано, что найденные вязкоупругие силы, вообще говоря, изменяют форму и размеры зоны контакта. Граница возмущенной зоны контакта вычислена аналитически, при этом в качестве критерия отрыва стержня от поверхности шара использовано обращение в ноль силы реакции односторонней связи. Указан вид этой границы для некоторых частных случаев движения, приведены сравнительные графики.

Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми.

Методы исследования. В работе используются методы аналитической механики, методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы (Вильке В.Г. (1983)), метод малого параметра и результаты теории возмущений.

Достоверность результатов. Все результаты в диссертации получены методами аналитической механики и асимптотическими методами на основе сформулированных в ней гипотез. Качественно-аналитические результаты проиллюстрированы и подтверждены с помощью численного анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в исследованиях, посвященных динамике различных видов спорта (теннис, футбол, гольф), при моделировании движения техники по деформируемому грунту, а также при решении инженерных и конструкторских задач с трением между деформируемыми движущимися деталями механизмов. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Вычислительном центре имени А.А. Дородницына РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН и других научно-исследовательских центрах.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2011" (Москва, 14-23 ноября 2011 г.)
- Седьмой международный симпозиум по классической и небесной механике CCMECH 7 (Москва, 17-28 октября 2011 года)
- Всероссийский конкурс студентов и аспирантов в области математических наук (Ульяновск, 8-10 июля 2012 года)
- Семинар "Математические методы технической механики" под

руководством проф. С.Я.Степанова и доц. А.А.Бурова (2012 г.)

- Семинар "Аналитическая механика и теория устойчивости" под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого и проф. А.В. Карапетяна (2012 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 4 публикациях, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1, 2, 3, 4] выполнены в соавторстве с научным руководителем д.ф.-м.н. Вильке В.Г., которому принадлежат постановки задач и методы их исследования.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 102 наименований. Работа содержит 26 рисунков. Общий объем диссертации — 97 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан обзор работ, посвященных исследованию механики контактного взаимодействия и моделей трения, учитывающих неточечную зону контакта, а также изложены основные результаты диссертации.

Первая глава диссертации посвящена исследованию динамики мяча с гладкой поверхностью на травяном газоне. Мяч — это абсолютно твердое однородное изотропное недеформируемое тело сферической формы радиуса r, обладающее массой m. Газон моделируется однородным множеством упругих стержней длины h, жестко закрепленных на опорной плоскости и имеющих прямолинейную форму в недеформированном состоянии. Стержни могут испытывать как продольные, так и изгибные деформации, а также ударные воздействия в момент контакта с поверхностью мяча. Деформации стержней изучаются в рамках линейной теории продольных и изгибных деформаций.

В 1.1 формулируется постановка задачи и вводятся основные переменные. В неподвижной системе координат $OX_1X_2X_3$ зададим X_1, X_2, X_3 — координаты центра мяча. При условии $X_3 = r(1+\delta)+h, \delta \leq 0$ мяч взаимодействует со множеством стержней, и контакт происходит по сферическому сегменту

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = X_1 + r\sin\theta\cos\varphi, x_2 = X_2 + r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$x_3 = X_3 - r\cos\theta, \theta \leqslant \theta_0, \varphi \; mod \; 2\pi\},$$

где θ, φ – сферические координаты на поверхности мяча, а угол $\theta_0 = \arccos\frac{X_3-h}{r}$. Проекцией сферического сегмента Σ на плоскость OX_1X_2 является круг

$$\sigma = \{(x_1, x_2) : \quad x_1 = X_1 + \rho\cos\varphi, \quad x_2 = X_2 + \rho\sin\varphi,$$
$$0 \leqslant \rho \leqslant r\sin\theta_0, \varphi \; mod \; 2\pi\}, \quad \rho = r\sin\theta$$

Поле перемещений срединных линий стержней, основания которых принадлежат области σ, представлено в виде:

$$\mathbf{R}(s,\rho,\varphi,t) = [s + U(s,\rho,\varphi,t)]\mathbf{e_3} + [\rho + V(s,\rho,\varphi,t)]\mathbf{e}_\rho +$$
$$+ W(s,\rho,\varphi,t)\mathbf{e}_\varphi, \quad 0 \leqslant s \leqslant h,$$
$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e_1}\cos\varphi + \mathbf{e_2}\sin\varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e_1}\sin\varphi + \mathbf{e_2}\cos\varphi,$$

где $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ – орты системы координат $OX_1X_2X_3$, а $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e_3}$ – орты цилиндрической системы координат с началом в центре σ.

Из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского выводятся уравнения движения стержня с граничными условиями, соответствующими жестко закрепленному нижнему концу и свободному верхнему.

$$\eta\ddot{U} = ND_1^2U; U(0) = 0, D_1^1U(h) = N^{-1}f_3$$
$$\eta\ddot{V} + TD_2^4V = 0; V(0) = V'(0) = 0, D_2^2V(h) = 0, D_2^3V(h) = -T^{-1}f_\rho$$
$$\eta\ddot{W} + TD_2^4W = 0; W(0) = W'(0) = 0, D_2^2W(h) = 0, D_2^3W(h) = -T^{-1}f_\varphi,$$

где η, N и T — линейная плотность материала стержня, его продольная и изгибная жесткости соответственно, и введены дифференциальные операторы $D_n^m = \frac{\partial^m}{\partial s^m} + \chi_n\frac{\partial^{m+1}}{\partial s^m \partial t}, \quad m = 1,2,3,4, \quad n = 1,2.$

Согласно методу разделения движений динамическая задача о продольно-поперечных колебаниях стержня заменяется квазистатической задачей, а процесс взаимодействия стержня с поверхностью мяча разбивается на абсолютно неупругий удар, вследствие которого энергия рассеивается при затухающих колебаниях, и скольжение свободного конца стержня по гладкой поверхности мяча. Эти движения в работе считаются независимыми и рассматриваются по отдельности.

Исследование ударного взаимодействия между стержнем и сферической поверхностью приведено в п. 1.2. Получено условие $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) > 0$, где $\mathbf{V}$ — скорость мяча в системе координат $OX_1X_2X_3$, наложения связей на границе зоны контакта, сопутствующее вовлечению новых стержней во взаимодействие с мячом.

Поведение стержня на малом интервале времени после момента наложения связи описывается функциями

$$
\begin{aligned}
U(s, t+\tau) &= -\frac{s\tau}{h}(\mathbf{V}, \mathbf{n})\cos\theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(\tau)\Phi_k(s),\\
&\Phi_k(s) = \sin\frac{\pi k s}{h}\\
V(s, t+\tau) &= \frac{(3hs^2 - s^3)\tau}{2h^3}(\mathbf{V}, \mathbf{n})\sin\theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\tau)\Psi_k(s)\\
&\Psi_k(s) = (\operatorname{sh}\nu_k + \sin\nu_k)(\operatorname{ch}\frac{\nu_k s}{h} - \cos\frac{\nu_k s}{h}) -\\
&-(\operatorname{ch}\nu_k + \cos\nu_k)(\operatorname{sh}\frac{\nu_k s}{h} - \sin\frac{\nu_k s}{h}), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0
\end{aligned}
$$

Здесь ν_k – корень характеристического уравнения $\tan\nu = \tanh\nu$, а функции $\Phi_k(s)$, $\Psi_k(s)$ удовлетворяют граничным условиям

$$
\Phi_k(0) = \Phi_k(h) = 0, \Psi_k(0) = \Psi_k'(0) = \Psi_k(h) = \Psi_k''(h) = 0
$$

и образуют ортогональный базис в линейных многообразиях конфигурационных пространств, описывающих продольные и поперечные колебания стержня. Функции $q_k(\tau)$, $p_k(\tau)$ стремятся к нулю за счет сил внутреннего вязкого трения.

Вычислена кинетическая энергия продольных и поперечных деформаций стержня в процессе контакта с поверхностью мяча:

$$E(t,\rho,\varphi) = \frac{\eta}{2}\int_0^h (\dot{U}^2 + \dot{V}^2)ds = \frac{\mu}{r}(\mathbf{V},\mathbf{n})^2 H((\mathbf{V},\mathbf{n})),$$
$$\mu = \frac{\eta h r}{840}(99 + 41\cos{\theta_0}^2)$$

На основании теоремы об изменении кинетической энергии вычислена величина нормальной средней силы, действующей на стержень при ударе $f = \frac{\mu}{r\tau_0}(\mathbf{V},\mathbf{n})H((\mathbf{V},\mathbf{n}))$, где H — функция Хевисайда. После интегрирования f получены силы результирующего ударного взаимодействия, пропорциональные квадрату скорости мяча:

$$F_v(v,\dot{X}_3,X_3) = -2\mu\sin\theta_0[v^2\sin^2\theta_0(\sin\varphi_0 - 1/3\sin^3\varphi_0) +$$
$$+ \dot{X}_3^2\cos^2\theta_0\sin\varphi_0 - v\dot{X}_3\sin\theta_0\cos\theta_0(\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0)]H(v - \dot{X}_3\operatorname{ctg}\theta_0)$$
$$F_3(v,\dot{X}_3,X_3) = \mu\cos\theta_0[v^2\sin^2\theta_0(\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0) +$$
$$+ 2\dot{X}_3^2\varphi_0\cos^2\theta_0 - 4v\dot{X}_3\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\varphi_0]H(v - \dot{X}_3\operatorname{ctg}\theta_0)$$

Момент поля сил ударных реакций относительно центра мяча равен нулю, так как поле совпадает с нормалью к сферической поверхности мяча.

В 1.3 исследуются силы, действующие со стороны стержней на мяч после окончания переходных процессов в пренебрежении внутренней вязкостью. Связь между перемещениями конца стержня и силой, действующей на свободный конец стержня, имеет вид:

$$f_3 = \kappa U(h),\ f_\rho = \zeta\kappa V(h),\ f_\varphi = \zeta\kappa W(h), \quad \kappa = N/h,\ \zeta = 3TN^{-1}h^{-2}$$

и порождается потенциалом:

$$\Pi(U,V,W) = \frac{\kappa}{2}(U^2 + \zeta V^2 + \zeta W^2).$$

Условие нормальности силового поля поверхности мяча позволяет найти U, V, W.

Вычисленная величина результирующей силы $\mathbf{Q} = Q_3\mathbf{e_3}$ зависит только от глубины погружения мяча в газон δ и направлена по оси OX_3:

$$\mathbf{Q} = \pi\kappa r^3\delta^2\left(1+\frac{2\delta}{3\zeta}\right)\mathbf{e_3}, \quad \delta = \frac{X_3-h}{r}-1, \quad |\delta| \ll 1$$

В 1.4 получены уравнения движения мяча в проекциях на оси подвижной системы координат. Уравнения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно переменных v, ψ, X_3 с нелинейными правыми частями.

$$\begin{aligned}
&m\dot{v} = p_v - 2\mu\sin\theta_0[v^2\sin^2\theta_0(\sin\varphi_0 - 1/3\sin^3\varphi_0) + \dot{X}_3^2\cos^2\theta_0\sin\varphi_0 - \\
&\quad - v\dot{X}_3\sin\theta_0\cos\theta_0(\varphi_0+\sin\varphi_0\cos\varphi_0)]H(v-\dot{X}_3\operatorname{ctg}\theta_0) \\
&mv\dot{\psi} = p_\psi \\
&m\ddot{X}_3 = p_3 + \pi\kappa r^3\delta^2(1+\frac{2\delta}{3\zeta}) + \mu\cos\theta_0[v^2\sin^2\theta_0(\varphi_0+\sin\varphi_0\cos\varphi_0) + \\
&\quad + 2\dot{X}_3^2\varphi_0\cos^2\theta_0 - 4v\dot{X}_3\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\varphi_0]H(v-\dot{X}_3\operatorname{ctg}\theta_0)
\end{aligned}$$

Так как в случае гладкой поверхности мяча поля сил в 1.2 и 1.3 нормальны сферической поверхности, момент силы равен нулю, и в уравнения движения не входит угловая скорость.

Так как полученные в 1.4 уравнения движения не могут быть разрешены в общем случае, более детальный анализ динамики гладкого мяча на газоне приводится в 1.5 для некоторых частных режимов движения.

Рассмотрено движение мяча по горизонтальной плоскости в отсутствие внешних сил, отличных от силы тяжести. Показано, что при таком движении имеет место обратная зависимость между малым параметром δ, описывающим вертикальное перемещение центра мяча, и горизонтальной скоростью центра мяча v. Физически это означает, что с ростом скорости v мяч как бы "всплывает" в газоне; и наоборот, чем меньше скорость, тем больше мяч погружен в газон. Похожий эффект описан в статье Пешеля Т., Швагера Т. и Бриллиантова Н.В. (1999).

Для вертикальных колебаний центра мяча уравнения движения сводятся к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с единственной переменной δ:

$$mr\ddot{\delta} = \mu\pi r^2\dot{\delta}^2 H(-\dot{\delta}) - mg + \pi\kappa r^3\delta^2$$

Найдено устойчивое положение равновесия мяча на газоне $\delta_* = -\sqrt{mg/(\pi\kappa r^3)}$. В системе Maple 14 построен фазовый портрет механической системы с особой точкой типа "фокус".

Рассмотрено движение мяча по наклонной плоскости, углы наклона которой определяются положительными константами g_0, g_1. Для движения мяча по наклонной плоскости под действием силы тяжести найдены частные решения $\psi = 0$ или $\psi = \pi$ и исследована их устойчивость. Так, показано, что движение "вверх" $\psi = \pi$ по наклонной плоскости неустойчиво, в отличие от движения "вниз" $\psi = 0$. Существование и количество стационарных движений в последнем случае определяется количеством корней уравнения $G(y) = mg_1$, где функция G задается соотношением $G(y) = \frac{3\sqrt{2}\pi\mu g_0}{16y} + \pi\kappa r^3 y^4$, $y = \sqrt{-\delta} > 0$. Если уравнение не имеет корней, стационарных движений, удовлетворяющих условию $\psi = 0$, нет. Если уравнение имеет единственный корень, соответствующий минимуму функции $G(y)$, существует единственное стационарное решение. Если у уравнения есть два корня, существуют два стационарных движения (v_1, δ_1) и (v_2, δ_2).

Устойчивость этих стационарных движений исследуется на основе уравнений в вариациях. Считая для определенности $\delta_1 > \delta_2$ и $v_1 > v_2$, показана устойчивость движения (v_2, δ_2) и неустойчивость стационарного движения (v_1, δ_1) согласно критерию Гурвица.

Качественный анализ движения мяча подкреплен результатами численного компьютерного моделирования.

Вторая глава посвящена изучению трения, возникающего при движении мяча с шероховатой поверхностью по газону. Задача нахождения результирующих силы и момента трения сводится к интегрированию по поверхности контакта элементарных сил и моментов, возникающих при скольжении свободного конца стержня по поверхности шара. При этом необходимо учитывать распределение контактных напряжений, которое принимается совпадающим с аналогичным распределением в предположении о гладкости поверхности контакта, полученным в главе 1.

В 2.1 сформулирован диссипативный функционал, описывающий рассеяние энергии механической системы вследствие трения:

$$
\begin{aligned}
&D[\mathbf{v_e^2}, X_3] = \chi \int_\sigma n(X_3, U, V, W, \rho, \varphi) b(\mathbf{v_e^2}) \rho d\rho d\varphi \\
&\mathbf{v_e^2} = [\sum_{i=1}^{3} \dot{X}_i \mathbf{e_i} + \omega \times (\mathbf{Z} + W\mathbf{e}_\varphi) - \dot{V}\mathbf{e}_\rho - \dot{W}\mathbf{e}_\varphi - \dot{U}\mathbf{e_3}]^2, \\
&\mathbf{Z} = (r\sin\theta + V)\mathbf{e}_\rho + (-r\cos\theta + U)\mathbf{e_3}
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathbf{v_e}$ — скорость свободного конца стержня относительно поверхности мяча. Компоненты силы и момента трения находятся как частные производные функционала по компонентам скорости $\dot{X}_i$ или угловой скорости ω_i. Полное выражение диссипативного функционала позволяет написать замкнутую систему связанных интегро-дифференциальных уравнений. В дальнейшем функционал и определенные на его основе сила и момент вычисляются приближенно с точностью до главных членов.

В выражение для диссипативного функционала входит функция $b(\mathbf{v_e^2})$, описывающая мощность трения в точке соприкосновения мяча и стержня в зависимости от относительной скорости точки контакта $\mathbf{v_e}$. Рассмотрению различных исследованных в литературе моделей сил трения, посвящен раздел 2.2. Для более подробного исследования выбраны три различные функции $b(\mathbf{v_e^2})$, соответствующие линейному вязкому трению, сухому трению Кулона и, наконец, вязкой аппроксимации сухого трения:

1) z,

2) $\sqrt{z}$,

3) $\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}g_1 z^2 + \frac{1}{6}g_2 z^3, \quad g_1 > 0,\ g_2 > 0,$

Модель сухого трения имеет существенный недостаток, связанный с отсутствием производной функции $\sqrt{z}$ в нуле, который приводит к появлению зон застоя при нулевых значениях относительной скорости, к потере единственности решений возникающих дифференциальных уравнений и к появлению в ряде случаев зависимости движений от предыстории движений. Модель с вязкой аппроксимацией задается гладкой функцией и обладает немаловажным физическим свойством: коэффициент трения покоя в ней выше коэффициента трения скольжения.

В 2.3 на основе диссипативного функционала вычисляются компоненты силы и момента трения для модели линейного вязкого трения, что дает возможность сформулировать уравнения движения мяча:

$$
\begin{aligned}
m\dot{v} &= -2\mu\sqrt{-2\delta}\left(-\frac{4}{3}v^2\delta + r^2\dot{\delta}^2 - \frac{\pi}{2}vr\dot{\delta}\sqrt{-2\delta}\right) - \\
&\quad - 4\pi\chi\kappa r^4\delta^2[v + r(\omega_1 \sin\psi) - \omega_2\cos\psi] \\
mv\dot{\psi} &= -4\pi\chi\kappa r^5\delta^2(\omega_1\cos\psi + \omega_2\sin\psi) \\
mr\ddot{\delta} &= \mu(-\pi v^2\delta + \pi r^2\dot{\delta}^2 - 4vr\dot{\delta}\sqrt{-2\delta}) - mg + \pi\kappa r^3\delta^2 \\
J\dot{\omega}_1 &= -4\pi\chi\kappa r^5\delta^2(\omega_1 + vr^{-1}\sin\psi) \\
J\dot{\omega}_2 &= -4\pi\chi\kappa r^5\delta^2(\omega_2 - vr^{-1}\cos\psi) \\
J\dot{\omega}_3 &= \frac{8}{3}\pi\chi\kappa r^5\delta^3\omega_3
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Эти уравнения имеют нелинейные правые части и в случае горизонтальной плоскости описывают систему с единственным аттрактором, соответствующим положению равновесия мяча на плоскости:

$$v_0 = 0, \quad \delta_0^2 = \frac{mg}{\pi\kappa r^3}, \quad \omega_{\mathbf{0}} = 0$$

В случае наклонной плоскости в зависимости от параметров системы могут существовать стационарные движения, соответствующие равномерному прямолинейному качению мяча по газону. Приведены графики, соответствующие результатам численного интегрирования уравнений движения мяча, для случаев гладкой поверхности мяча и поверхности с линейным вязким трением. Показано, что пренебрежение членами младшего порядка при вычислении силы и момента трения вносит малое возмущение в траекторию мяча.

В 2.4 сформулированы интегральные выражения для компонент силы и момента трения в случае сухого трения Кулона. Вычислена сила трения для аппроксимации сухого трения, показано, что она имеет нелинейный характер. Громоздкие выражения для силы и момента не позволяют дать качественное описание характера движения в этом случае. Для случая вязкой аппроксимации сухого трения проведено численное моделирование и построены графики в сравнении с движением с линейным вязким трением.

В выражения для всех компонент силы и момента трения в обоих рассмотренных случаях входят компоненты скорости и угловой скорости мяча, что приводит к взаимосвязи между движениями мяча: скольжением, верчением, качением. В отличие от классического результата Эйлера (1758 г.), в котором после окончания этапа проскальзывания мяч может независимо катиться и вращаться вокруг вертикальной оси, взаимосвязь трех видов движения шара характерна для задач, где модель трения строится по протяженной площадке контакта (Журавлев В.Ф. (1998 г.), Карапетян А.В. (2008 г.), Александров Е.Б., Вильке В.Г., Косенко И.И. (2008 г.)).

В **главе 3** исследуются особенности механической системы для случая вязкоупругих стержней, связанные с внутренней вязкостью материала, из которых они изготовлены. В работе используется модель Кельвина-Фойхта, объединяющая упругие и вязкие свойства.

В п. 3.1 решается задача приближенного определения главного вектора сил. Сформулирован функционал внутренних диссипативных сил

$$D[\dot{U}(s,\delta,\rho),\dot{V}(s,\delta,\rho)] = \frac{1}{2}\int_{\sigma}\int_{0}^{h}[\chi_1 N\dot{U'^2}+\chi_2 T(\dot{V''^2}+\dot{W''^2})]ds\rho d\rho d\varphi,$$

где χ_1, χ_2 — коэффициенты вязкости при продольных и поперечных деформациях стержня, а σ — невозмущенная зона контакта (круг). С учетом сил внутренней вязкости получены возмущенные уравнения движения стержней с точностью до членов более высокого, чем $O(\delta)$ и $O(\frac{\rho^2}{r^2})$ порядка малости.

Силы сопротивления, порождаемые диссипативным функционалом, получены в виде

$$F_{v1} = -4\chi_1 N\frac{\pi r^2}{h}\delta^2 v + 14\chi_2 T\frac{\pi r^2\delta^3}{\zeta^2 h^3}v$$

$$F_{31} = \chi_1 N\frac{\pi r^3}{h}\delta\dot{\delta} - 12\chi_2 T\frac{\pi r^3}{\zeta^2 h^5}\delta^2\dot{\delta}$$

и должны быть добавлены в правые части уравнений движения (1). Силы внутренней вязкости имеют нелинейный характер и малы по сравнению с силами, рассмотренными в главах 1, 2.

Учет возмущенных уравнений движения стержней приводит к изменению пятна контакта в процессе движения мяча. Определению новой, возмущенной формы зоны контакта посвящен п. 3.2.

В качестве критерия отрыва конца стержня от поверхности мяча используется условие обращения в ноль силы реакции односторонней связи, действующей в точках контакта стержней и поверхности мяча $f_3^2+f_\rho^2+f_\varphi^2=0$, где компоненты силы реакции получены из граничных условий вариационного принципа Гамильтона-Остроградского.

$$ND_1^1[U(h)+\chi_1\dot{U}(h)] = f_3$$

$$TD_2^3[V(h)+\chi_2\dot{V}(h)] = -f_\rho$$

$$\chi_2 TD_2^3\dot{W}(h) = -f_\varphi$$

В предположении о малости коэффициентов вязкости $\frac{\chi_k v}{r} \ll 1, k=1,2$ уравнение границы возмущенной зоны контакта получено с точностью до малых первого порядка в виде

$$\frac{\rho^2(\varphi)}{2r^2} \cong -\delta + 2\chi_1 \frac{h}{r}[v\sqrt{-2\delta}\cos(\varphi-\psi) - r\dot{\delta}],$$

считая отрицательным выражение в квадратных скобках. В противном случае, если $v\sqrt{-2\delta}\cos(\varphi-\psi) > r\dot{\delta}$, граница зоны контакта совпадает с невозмущенной, т.е. дугой окружности.

Далее проводится аналитическое исследование качественного изменения формы пятна контакта.

Для случая $\dot{\delta} = 0$ зона контакта отличается от невозмущенной в левой полуплоскости, т.е. при выполнении условия $\frac{\pi}{2} < \varphi - \psi < \frac{3\pi}{2}$, и представляет собой кривую, полностью лежащую внутри окружности невозмущенной области σ.

Для случая $v = 0, \dot{\delta} > 0$ показано, что граница возмущенной зоны контакта является окружностью, концентрической с невозмущенной, и полностью лежащей внутри последней. При $v = 0, \dot{\delta} < 0$ границы возмущенной и невозмущенной зон контакта совпадают.

Для случаев, когда одновременно v и $\dot{\delta}$ не обращаются в ноль, приведены примеры взаимного расположения возмущенной и невозмущенной границ, являющиеся комбинацией двух рассмотренных частных случаев. В частности, показано, что для $v > 0$ и различных $\dot{\delta}$ реализуются варианты, при которых возмущенная граница отличается от невозмущенной по дуге, большей или меньшей полуокружности, а также может быть представлена окружностью, целиком лежащей внутри границы круга σ, но не концентрической с ней.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

Публикации по теме диссертации

1. *Вильке В.Г., Мигунова Д.С.* О движении мяча по травяному газону // ПММ, 2011, т. 75, вып. 5, с. 801-812.

2. *Vil'ke V.G., Migunova D.* About movement of a ball on a Grassy lawn. In: Classical and Celestial Mechanics. Selected Papers, Gadomski L., Krasil'nikov P.S., Prokopenya A.N. (Eds.). Wydawnictwo Collegium Mazovia, Siedlce, 2012, pp. 195-205.

3. *Vil'ke V.G., Migunova D.* About movement of a ball on a Grassy lawn. In: "7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics. Book of Abstracts" , Wydawnictwo Collegium Mazovia, Siedlce, 2011, pp. 100-102.

4. *Вильке В.Г., Мигунова Д.С.* О движении мяча по травяному газону // Сборник работ победителей "Всероссийского конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук". Издательский центр УлГУ. 2012. С. 74-77.