

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет**

На правах рукописи

Отраднова Лина Сергеевна

**Движение механических систем при
односторонних связях с трением.**

Специальность: 01.02.01 — Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2012

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и
мехатроники механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: Кугушев Евгений Иванович,
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: Иванов Александр Павлович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Зленко Александр Афанасьевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Ведущая организация: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук

Защита диссертации состоится 02 ноября 2012 года в 16 часов 30 минут на заседании совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 02 октября 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Прошкин Владимир Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Движение тел с ударами является классической задачей механики систем с односторонними связями. Удар моделирует взаимодействие элементов механической системы кратковременное, но приводящее к конечным изменениям параметров движения системы. В настоящее время активно развивается теория механических систем при односторонних связях с трением. Построение моделей ударов в таких системах (неидеальных ударов, или ударов с трением) представляет интерес как при рассмотрении классических задач механики, так и при изучении динамики сложных робототехнических систем.

Цель работы. Диссертация посвящена задачам о движении твердых тел, соударяющихся с шероховатыми поверхностями, в рамках модели ударного взаимодействия, учитывающей трение. Рассматривается несколько задач о движении однородного шара: между двумя параллельными плоскостями, внутри сферы и внутри кругового цилиндра, а также плоского диска, движущегося по инерции в прямолинейном канале. Изучаются периодические режимы движения и условия выхода системы на эти режимы. Считается, что при ударе шероховатых поверхностей происходит мгновенное наложение и снятие связи, состоящей в том, что касательная составляющая скорости контактирующей точки тела равна нулю, то есть выполняется условие качения без проскальзывания.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Они базируются на классических утверждениях механики. Среди новых результатов следует отметить построение моделей классической теории удара с учетом сил трения при ударном взаимодействии твердых тел и применение этих моделей к изучению движения некоторых механических систем.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы строго обоснованы, они базируются на утверждениях теоретической механики.

Используемые методы. В работе используются методы аналитической механики, в том числе методы классической теории удара, дискретной математики, которые применяются в рассматриваемых задачах.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты дают возможность изучать движение механических систем с односторонними связями при наличии трения в момент удара. В частности, рассмотренные методы позволяют изучать удар с трением твердого тела, стесненного неголономными связями качения без проскальзывания.

Апробация работы и публикации. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Семинар по аналитической механике и теории устойчивости (имени В.В.Румянцева) под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В.Белецкого, проф. А.В.Карапетяна (2011, 2012),
- Семинар по математическим методам технической механики под руководством доц. А.А.Бурова, проф. С.Я.Степанова (2012),
- Конференции-конкурсе молодых ученых, НИИ Механики МГУ им.М.В. Ломоносова, 2008 г.;
- Симбирской молодежной научной школе по аналитической механике, устойчивости и управлению движениями и процессами, посвященной памяти академика Валентина Витальевича Румянцева, Ульяновск, июнь 2009 г.;
- Научной конференции "Ломоносовские чтения". МГУ им. М.В.Ломоносова, 2010, 2011 гг.;
- Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2010". МГУ им.М.В. Ломоносова, Москва, апрель 2010;
- XI–XII Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(Конференции Пятницкого), Москва, 2010, 2012 гг.;
- XXIII Международной научной конференции "Математические Методы в Технике и Технологиях"(ММТТ-23), Саратов, июнь 2010 г.;

- 4–5th Chaotic Modeling and Simulation Conference (Chaos 2011), Crete, Greece, June 2011; (Chaos 2012), Athens, Greece, June 2012;
- Международной конференции "Optimization and applications"(OPTIMA 2011), Petrovac, Montenegro, 2011;
- Международной конференции по механике "Шестые Поляховские чтения посвященной 95-летию со дня рождения С.В.Валландера, Санкт-Петербург, 2012;
- Всероссийском конкурсе студентов и аспирантов в области математических наук (победитель, диплом первой степени), Ульяновский Государственный Университет, Ульяновск, 2012;
- ICNPAA Congress: Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, Vienna University of Technology, Vienna, Austria, 2012.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в печатных работах, список которых приведен в конце авторефера.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 70 наименований. Общий объем диссертации — 122 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан краткий обзор работ, связанных с темой диссертации, также приведено краткое содержание диссертации.

В **первой главе** рассматривается модель удара с трением, состоящая в том, что при ударе тела о шероховатую поверхность происходит мгновенное наложение и снятие связи качения без проскальзывания, состоящей в том, что равна нулю касательная составляющая к поверхности скорость контактирующей точки тела. Шестимерный вектор обобщенного импульса \vec{p} твердого тела раскладывается на нормальную \vec{p}_n и касательную \vec{p}_τ составляющие к плоскости P_i_τ удара: $\vec{p} = \vec{p}_n + \vec{p}_\tau$, $\vec{p}_\tau \in \Pi_\tau$, $\vec{p}_n \perp \Pi_\tau$. Нормальная составляющая при ударе в соответствии с законом отражения Ньютона меняет свой знак, и ее модуль изменяется пропорционально коэффициенту восстановления ν , то есть $\vec{p}_n^+ = -\nu \vec{p}_n^-$. Касательная составляющая \vec{p}_τ

раскладывается на нормальную \vec{p}_s и касательную \vec{p}_r компоненты в пространстве качения, т.е. гиперплоскости L_r в плоскости удара, в которой лежат все векторы импульса, отвечающие связи качения: $\vec{p}_\tau = \vec{p}_s + \vec{p}_r$. Таким образом, $\vec{p} = \vec{p}_n + \vec{p}_s + \vec{p}_r$. Нормальная составляющая после удара обнуляется $\vec{p}_s^+ = 0$, а касательная составляющая сохраняется $\vec{p}_r^+ = \vec{p}_r^-$. Показывается, что такая модель может быть описана как частный случай модели В.В. Козлова удара с вязким трением, для которой им указан физический способ реализации удара с трением, основанный на предельном переходе в полных уравнениях движения при введении поля упругих и диссипативных сил с большими коэффициентами жесткости и трения. Рассматривается также модель с частичным наложением связи качения без проскальзывания. В этой модели $\vec{p}_s^+ = c\vec{p}_s^-$, где $0 \leq c \leq 1$ — постоянный коэффициент.

Для описанной модели удара показывается, что при ударе свободного твердого тела остается справедливым утверждение о вариационном принципе для определенного класса вариаций траектории.

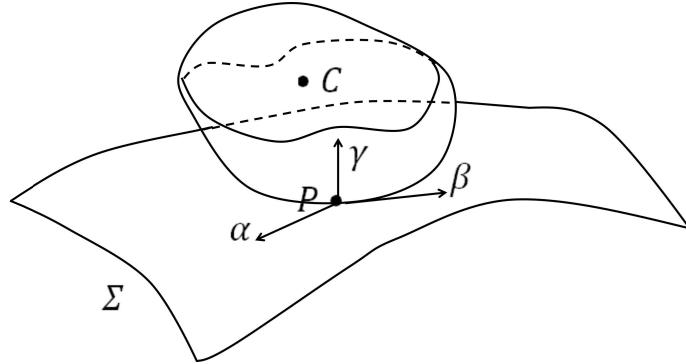


Рис. 1: Удар тела о шероховатую поверхность Σ .

Для удара тела о шероховатую поверхность Σ выводятся уравнения удара, т.е. соотношения, позволяющие определять параметры движения тела после удара $(\cdot)^+$ по параметрам его движения до удара $(\cdot)^-$:

$$(\vec{V}_p^+, \vec{\gamma}) = -\nu(\vec{V}_p^-, \vec{\gamma}), \quad (\vec{V}_p^+, \vec{\alpha}) = c(\vec{V}_p^-, \vec{\alpha}), \quad (\vec{V}_p^+, \vec{\beta}) = c(\vec{V}_p^-, \vec{\beta}).$$

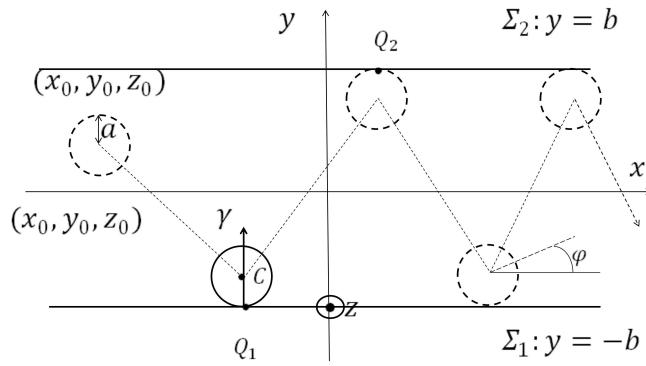
$$m[\vec{PC}, \vec{V}_c^+] + \mathbb{J}\vec{\omega}^+ = m[\vec{PC}, \vec{V}_c^-] + \mathbb{J}\vec{\omega}^-,$$

Здесь: V_c — скорость центра масс C тела, $\vec{\omega}$ — угловая скорость тела, $\vec{V}_p = \vec{V}_c + [\vec{\omega}, \vec{CP}]$ — скорость контактирующей точки P тела, m

— масса и \mathbb{J} — матрица центрального тензора инерции тела. Единичные векторы $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, касаются поверхности Σ в точке контакта, $\vec{\gamma}$ — единичная нормаль к этой поверхности, $0 \leq c \leq 1$ — коэффициент шероховатости, $0 \leq \nu \leq 1$ — коэффициент восстановления.

Затем, на основе этих соотношений выводятся уравнения удара для следующих случаев: удар шара с симметричным распределением массы; удар свободного плоского тела; удар плоского диска с симметричным распределением массы.

Во **второй главе** рассматривается плоский однородный диск радиуса a , движение которого ограничено двумя параллельными шероховатыми прямыми образующими стенки прямолинейного канала ширины $2b$. При движении диск последовательно ударяется о стенки. Считается, что масса m диска распределена симметрично так, что центр масс диска совпадает с его геометрическим центром (J — его центральный момент инерции). Рассмотрение ведется в системе



$$\omega_z = \varphi, T = \frac{2b}{y_1} \quad b > a > 0$$

Рис. 2: Движение диска между параллельными прямыми.

координат Oxy , где ось Ox направлена вдоль канала. Положение диска описывается координатами (x, y) его центра и углом φ поворота диска относительно оси Ox . Рассматривается несколько задач: движение по инерции в случае неподвижных стенок канала; движение в случае, когда стенки перемещаются по некоторому закону; движение в однородном поле тяжести в случае, когда стенки канала вертикальны. Показывается, что в этих случаях движение диска выходит на периодический режим, или режим, близкий к периодическому. Рассматривается также метод диаграмм, позволяющий

наглядно представить процесс выхода движения на периодический режим. Результаты этой главы используются в Главе 3, в которой показывается, что движение шара между параллельными шероховатыми плоскостями при подходящем выборе системы координат аналогично движению диска между шероховатыми прямыми.

В первой части главы проводится анализ движения диска между неподвижными прямыми. Рассматривается движение диска по инерции между неподвижными шероховатыми прямыми в случае абсолютно упругого и неупругого соударения с коэффициентом восстановления ν : $0 < \nu < 1$. Выводится закон изменения скоростей диска при ударе n :

$$\dot{\varphi}_n^+ = -\mu \dot{\varphi}_{n-1}^+, \quad \dot{x}_n^+ = \mu \dot{x}_{n-1}^+, \quad \mu = \frac{ma^2 - J}{\nu(ma^2 + J)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Показано, что, если $\mu < 1$, то диск выйдет на периодический режим движения по нормали к стенкам канала с нулевой угловой скоростью. При выходе на этот режим диск повернется на конечный угол и пройдет конечное расстояние вдоль канала:

$$\varphi^n \rightarrow \varphi_1 + \frac{T\dot{\varphi}_1^+}{1+\mu}, \quad x^n \rightarrow x_1 + \frac{T\dot{x}_1^+}{1-\mu} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Эдсерь T — интервал времени между первым и вторым ударами, (x_1, φ_1) — координаты диска в момент первого удара. Линейная скорость движения диска вдоль канала и угловая скорость диска будут стремиться к нулю в геометрической прогрессии с показателем μ . Если вся масса сосредоточена на ободе диска, то угловая скорость и скорость движения диска вдоль канала после первого же удара станут равными нулю. Диск будет совершать движения по нормали к стенкам канала, периодически соударяясь с ними.

Если же $\mu > 1$, то линейная скорость движения диска вдоль канала и угловая скорость диска будут стремиться к нулю в геометрической прогрессии с показателем μ , однако диск повернется на сколь угодно большой угол и уйдет вдоль канала сколь угодно далеко.

Во второй части главы описан метод диаграмм. Он позволяет наглядно показать сходимость предельного движения диска по скорости даже в ряде сложных движений. Уравнение удара для компоненты скорости центра диска отделяется. На плоскости импульсов

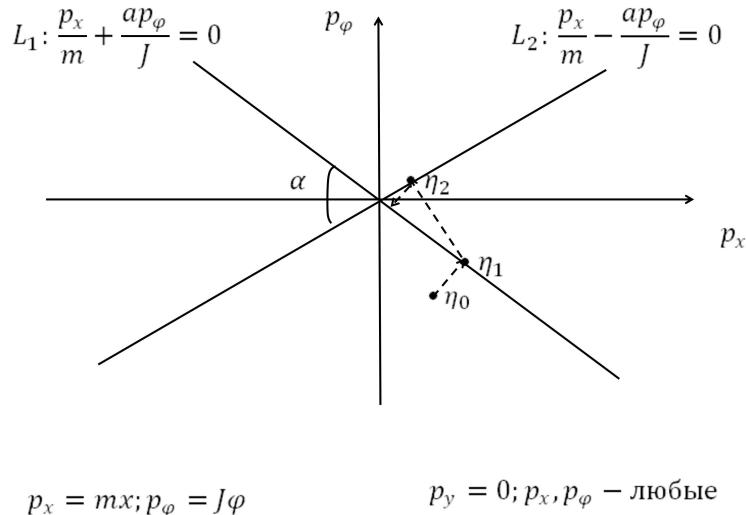


Рис. 3: Метод диаграмм. Начальная изображающая точка $\eta_0 = (p_{x_0}, p_{\varphi_0})$ проектируется на линию качения L_1 в точку $\eta_0 = (p_{x_1}, p_{\varphi_1})$. Эта точка проектируется на L_2 в точку $\eta_0 = (p_{x_2}, p_{\varphi_2})$ и т.д.

$p_x = m\dot{x}$, $p_\varphi = J\dot{\varphi}$, линейного вдоль канала и вращательного движений диска, строятся две линии качения L_1 и L_2 , отвечающие ударам о стенки канала. Уравнения этих линий — это уравнения качения диска без проскальзывания по соответствующей стенке канала. В процессе соударений изображающая точка $\eta_k = (p_{x_k}, p_{\varphi_k})$ ортогонально проектируется на эти прямые последовательно чередующимся образом (k — номер удара). Диаграмма движения изображающей точки на плоскости импульсов p_x , p_φ позволяет изучать предельные движения диска. В случае частичной шероховатости, при проектировании на очередную прямую качения L_k , изображающая точка сдвигается перпендикулярно к этой прямой так, что расстояние до прямой качения L_n изменяется в c раз.

С применением метода диаграмм показывается, что характер движения диска для частично шероховатых стенок ($0 < c < 1$) при абсолютно упругом соударении ($\nu = 1$) такой же, как и при абсолютной шероховатости ($c = 0$). В общем случае, в пределе, при стремлении времени к бесконечности, диск выйдет на периодический режим движения по нормали к стенкам канала с нулевой угловой скоростью. При выходе на этот режим диск повернется на конечный угол и пройдет конечное расстояние вдоль канала. Линейная скорость движения диска вдоль канала и угловая скорость диска будут стремиться к нулю в геометрической прогрессии с по-

казателем λ :

$$|\eta_n^+| = \lambda |\eta_n^-|, \quad \lambda = \sqrt{(1 - c) \frac{(ma^2 - J)^2}{(ma^2 + J)^2} + c}.$$

В третьей части рассмотрен случай подвижных шероховатых стенок канала, в котором движется диск. Диск движется по инерции между стенками канала, перемещающимися поступательно с постоянными скоростями u_1 и u_2 вдоль оси канала. Рассматривается случай абсолютно упругого соударения с абсолютно шероховатой прямой, т.е. при $\nu = 1$, $c = 0$. Используется метод диаграмм. Линии качения L_1 и L_2 на плоскости импульсов (p_x, p_φ) сдвигаются параллельно на векторы $(mu_1, 0)$, $(mu_2, 0)$ и пересекаются в некоторой точке $(p_x^* = m\dot{x}^*, p_\varphi^* = m\dot{\varphi}^*)$.

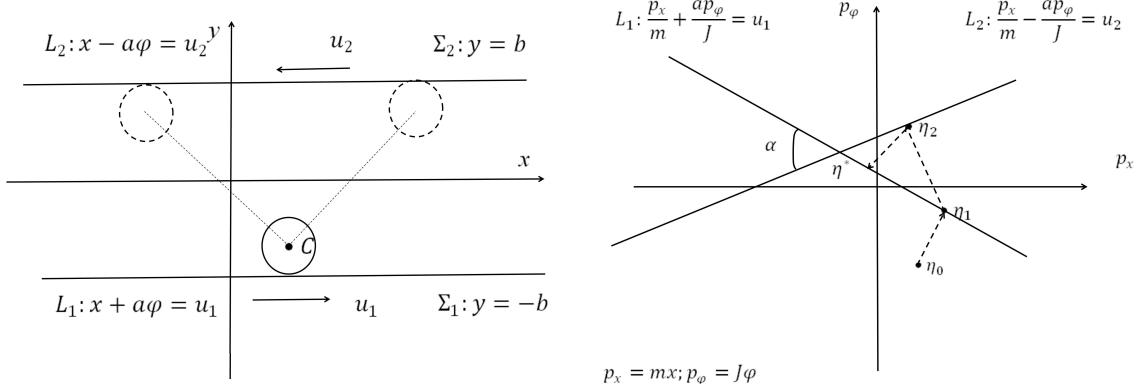


Рис. 4: Движение диска между двумя параллельными подвижными прямыми.

Рис. 5: Движение диска между параллельными подвижными прямыми. Метод диаграмм.

Если вся масса диска сосредоточена в его центре, т.е. $J = 0$, то линейная (вдоль канала) скорость центра диска \dot{x} постоянна, а угловая принимает пару чередующихся значений. Если вся масса диска сосредоточена на его ободе, т.е. $J = ma^2$, то линии качения L_1 и L_2 при ударе о стенки ортогональны. На нулевом шаге проектирования изображающая точка (p_x, p_φ) попадает на прямую L_1 , а на первом шаге проектирования попадает в начало координат. В пространстве скоростей изображающая точка попадет в точку $(\dot{x}^*, \dot{\varphi}^*)$ пересечения прямых L_1 и L_2 . Это означает, что движение сразу выйдет на периодический режим, когда скорость диска между ударами равна $\dot{x} = \dot{x}^*$, $\dot{y} = \pm \dot{y}_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}^*$. Значит, центр диска будет с постоянной

скоростью перемещаться вдоль канала, а его угловая скорость будет постоянна.

Пусть не вся масса диска сосредоточена в его центре или на ободе. Показывается, что в пределе центр диска будет с постоянной скоростью $\dot{x}^* = \frac{u_1 + u_2}{2}$ перемещаться вдоль канала, а его угловая

скорость будет постоянна и равна $\dot{\varphi}^* = \frac{u_1 - u_2}{2a}$. Поскольку $(\dot{x}^*, \dot{\varphi}^*)$ — точка пересечения прямых качения L_1 и L_2 , то линейная скорость центра \dot{x}^* и угловая скорость $\dot{\varphi}^*$ такие, как если бы стенки канала прижимали диск сверху и снизу, и он катился бы между ними без проскальзывания.

Если прямые движутся в разные стороны с одинаковыми скоростями, ($u_1 = -u_2$), то $\dot{x}^* = 0$. В этом случае, центр диска, пройдя конечное расстояние, стабилизируется, и диск будет совершать движение ортогонально стенкам канала. При выходе на этот режим диск повернется на конечный угол и пройдет конечное расстояние вдоль канала.

В общем случае соотношение $u_1 = -u_2$ скоростей стенок канала будет иметь место, если перейти в подвижную систему координат, движущуюся вдоль канала со скоростью $\frac{u_1 + u_2}{2}$.

Рассматривается случай, когда скорость стенок канала переменная: $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$. Обозначим через t_n — момент n -го соударения, а через w_n — скорость стенки, о которую происходит удар в этот момент. В соответствии с методом диаграмм, перед ударом $n + 1$ изображающая точка η_n находилась на прямой качения L_n : $\dot{x} - (-1)^n \dot{\varphi} = w_n$, а при ударе $n + 1$ должна в кинетической метрике ортогонально проектироваться на прямую качения L_{n+1} : $\dot{x} + (-1)^n \dot{\varphi} = w_{n+1}$. Точку пересечения этих прямых обозначим через $\eta_n^* = (\dot{x}_n^*, \dot{\varphi}_n^*)$. Пусть скорости движения стенок канала ограничены: $u_i^- \leq u_i \leq u_i^+$, $i = 1, 2$, тогда точки η_n^* ($n = 1, 2, \dots$) лежат в некотором прямоугольнике Π^* . Диаметр этого прямоугольника обозначим через d .

Показывается, что в пределе, при $n \rightarrow +\infty$, расстояние от изображающей точки η_n до прямоугольника Π^* не превосходит величины $\delta = \frac{d(ma^2 - J)}{2J}$. В строгой формулировке: для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное N такое, что при всех $n > N$ расстояние ρ_n от

изображающей точки η_n до прямоугольника Π^* будет меньше $\delta + \varepsilon$.

В частности, если скорости стенок канала ограничены по модулю одинаковым образом: $-f \leq u_i(t) \leq f$, $i = 1, 2$, то

$$d = \frac{2f}{a} \sqrt{ma^2 + J}, \quad \delta = \frac{f\sqrt{ma^2 + J}(ma^2 - J)}{aJ},$$

и в пределе диапазоны изменения линейной \dot{x}_n^+ и угловой $\dot{\varphi}_n^+$ скоростей после удара такие:

$$|\dot{x}_n^+| \leq f + \frac{\delta}{\sqrt{m}} + \varepsilon = O(f) + \varepsilon, \quad |\dot{\varphi}_n^+| \leq \frac{f}{a} + \frac{\delta}{\sqrt{J}} + \varepsilon = O(f) + \varepsilon,$$

при $f \rightarrow +0$. Значит, при малых скоростях движения стенок канала, линейная и угловая скорости диска будут с ростом времени падать до небольшой величины, имеющей такой же порядок малости, как и скорости движения стенок канала.

Рассматривается движение обруча между подвижными стенками. Пусть масса диска сосредоточена на его границе (обруч), тогда $J = ma^2$. Пусть стенки канала совершают продольные гармонические колебания: $u_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + B_1)$, $u_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + B_2)$. Поскольку при ударах составляющая скорости центра диска, нормальная к стенкам канала, не меняется по модулю, то время между ударами постоянно. Выберем, для простоты, такой масштаб, чтобы время между ударами составляло единицу: $T = 1$. Тогда частота ударов равна $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$.

Пусть частоты колебаний стенок не кратны частоте ударов, т.е. для любых целых k выполнено: $\omega_i \neq k\omega_0 = 2k\pi$, $i = 1, 2$. Показывается, что среднее значение скорости диска вдоль канала и его угловой скорости равны нулю, и во все время движения диск отклонится от начального положения (x_0, y_0, φ_0) на конечную величину.

Линии качения ортогональны, и, поэтому, на каждом ударе n изображающая точка $\eta_n = (\dot{x}_n, \dot{\varphi}_n)$ попадает в точку пересечения линий качения η_n^* . Пусть частоты колебаний стенок канала независимы, т.е. для любых целых n_1, n_2 , таких, что $n_1^2 + n_2^2 \neq 0$, выполнено: $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \neq 0$. Показывается, что точки $\eta_n^* = (\dot{x}_n^*, \dot{\varphi}_n^*)$ всюду плотно заполняют некоторый параллелограмм.

В этой **четвертой части** рассматривается движение диска в прямолинейном вертикальном канале. Пусть диск движется в однород-

ном поле тяжести, плоскость движения вертикальна. Рассматривается случай абсолютно упругого соударения с абсолютно шероховатыми прямыми, т.е. $\nu = 1$, $c = 0$. Выводятся следующие свойства движения диска.

Если вся масса сосредоточена в центре диска, то $J = 0$. В этом случае модуль угловой скорости в моменты ударов растет с постоянным ускорением $\lambda_2 = \frac{magT}{ma^2 + J}$, а сама угловая скорость меняет знак при каждом ударе. Скорость движения диска вдоль канала в моменты ударов растет с постоянным ускорением $a\lambda_2$.

Если вся масса сосредоточена на ободе диска, то $J = ma^2$. В этом случае, после первого удара, центр диска будет с постоянной скоростью перемещаться вдоль канала (вниз), а его угловая скорость будет постоянна по модулю и менять знак при каждом ударе.

В общем случае, когда $0 < J < ma^2$, в пределе, центр диска будет с постоянной скоростью перемещаться вдоль канала (вниз), а его угловая скорость будет постоянна по модулю и менять знак при каждом ударе.

В третьей главе рассматривается движение шара между двумя параллельными шероховатыми плоскостями.

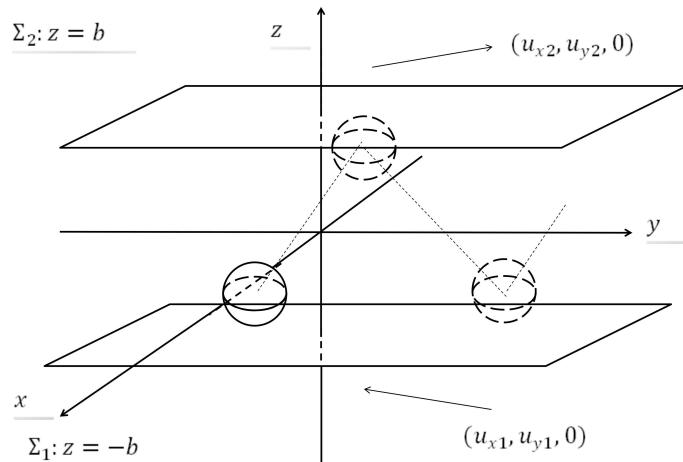


Рис. 6: Движение шара с ударами между подвижными плоскостями.

Пусть в системе координат $Oxyz$ движется по инерции шар, имеющий радиус a . Его движение ограничено двумя шероховатыми плоскостями, которые задаются, соответственно, уравнениями: $z = -b$ и $z = b$, где $b > a > 0$. Эти плоскости образуют стенки пространственной полосы, внутри которой движется шар.

Показывается, что движение шара можно разложить на сумму движений по координатным осям Ox и Oy , причем каждое из этих движений аналогично движению диска между параллельными шероховатыми прямыми (см. Главу 2). Рассматриваются следующие случаи: абсолютно и частично шероховатые плоскости; неподвижные и подвижные плоскости; движение шара в однородном поле тяжести между вертикальными плоскостями. Масса шара m определена симметрично так, что центр масс шара совпадает с его геометрическим центром C , а центральный тензор инерции — шаровой: $\mathbb{J} = \text{diag}\{J, J, J\}$. Из физических соображений следует, что $J \leq \frac{2}{3}ma^2$. Используются обозначения: $\vec{V}_C = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ — скорость центра шара; $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ — угловая скорость шара; $(\cdot)^-, (\cdot)^+$ — параметры движения шара сразу до и после удара, имеются ввиду моменты $t - 0$ и $t + 0$ для удара в момент времени t .

Глава разбита на 4 части.

В первой части рассматривается движение шара между неподвижными плоскостями.

Сначала рассмотрен случай абсолютно упругого соударения с абсолютно шероховатыми плоскостями, т.е. $\nu = 1$, $c = 0$. Выводятся рекуррентные соотношения, связывающие параметры движения шара на двух последовательных ударах. Уравнения удара разделяются, и их можно рассматривать отдельно для пары (\dot{x}, ω_y) и для пары (\dot{y}, ω_x) . Для каждой пары уравнения по виду совпадают с аналогичными уравнениями для движения диска между параллельными прямыми.

Если повернуть оси координат вокруг оси Oz так, чтобы после первого удара было выполнено: $\dot{y} = 0$, то далее движение центра шара будет происходить параллельно оси Ox . При этом будет верно: $\dot{y} = 0$, $\omega_x = 0$, а координаты (\dot{x}, ω_y) будут меняться так же, как и для диска между параллельными прямыми. Из физических соображений: $\frac{1}{3\nu} \leq \mu \leq \frac{1}{\nu}$. Поэтому при каждом ударе о стенку знак угловой скорости ω_y меняется, величина скорости уменьшается с коэффициентом μ ; направление движения шара вдоль оси Ox сохраняется, но скорость этого движения уменьшается с коэффициентом μ .

Если вся масса сосредоточена в центре шара, то $J = 0$. В этом

случае скорость движения шара вдоль Ox после ударов сохраняется, и шар улетит сколь угодно далеко.

Для случая $\frac{1}{3\nu} \leq \mu < \frac{1}{\nu}$ показывается, что в пределе, при стремлении времени к бесконечности, шар выйдет на периодический режим движения по нормали к стенкам полости и с вертикальной угловой скоростью. При выходе на этот режим, шар пройдет конечное расстояние вдоль оси Ox . Если в начальный момент вертикальная составляющая угловой скорости равнялась нулю, то, при выходе на периодический режим, суммарный поворот шара будет конечен.

Далее рассмотрен случай неупругого соударения шара со стенками полости, когда выполнено: $c = 0$ и $0 \leq \nu \leq 1$.

Случай $\nu = 1$ рассмотрен в первом разделе главы. Если $\nu = 0$, то после первого удара, в соответствии с $\dot{z} = 0$, шар останется на стенке полости и будет катиться по ней без проскальзывания.

Пусть $0 < \nu < 1$. Если вся масса сосредоточена в центре шара, то $J = 0$. В этом случае скорость движения шара вдоль Ox после ударов сохраняется, и шар улетит сколь угодно далеко.

Рассмотрим основной случай, когда $\frac{1}{3\nu} \leq \mu < \frac{1}{\nu}$. Уравнения удара разделяются, и их можно рассматривать отдельно для пары (\dot{x}, ω_y) и для пары (\dot{y}, ω_x) . Для каждой пары уравнения по виду совпадают с аналогичными уравнениями для движения диска между параллельными прямыми. Если повернуть оси координат вокруг оси Oz так, чтобы было $\dot{y} = 0$, то дальнейшее движение центра шара будет происходить параллельно оси Ox . При этом будет выполнено: $\dot{y} = 0$, $\omega_x = 0$, а координаты (\dot{x}, ω_y) будут меняться так же, как и для диска между параллельными прямыми (см. Главу 2). Поскольку $\mu < 1$, то, в пределе, при стремлении времени к бесконечности, шар выйдет на периодический режим движения по нормали к стенкам полости с вертикальной угловой скоростью. При выходе на этот режим, он пройдет конечное расстояние вдоль оси Ox . Если в начальный момент вертикальная составляющая угловой скорости равнялась нулю, то, при выходе на периодический режим, суммарный поворот шара будет конечен.

Если $\mu \geq 1$, то, при стремлении времени к бесконечности, шар уйдет сколь угодно далеко вдоль оси Ox .

Затем рассмотрен случай соударения шара с частично шероховатыми стенками полости, когда $\nu = 1$ и $0 \leq c \leq 1$.

Случай $c = 0$ рассмотрен в первом разделе главы. Если $c = 1$, то после любого соударения будет справедливо: $\dot{x}^+ = \dot{x}^-$, $\dot{y}^+ = \dot{y}^-$, $\omega_x^+ = \omega_x^-$, $\omega_y^+ = \omega_y^-$, т.е. удар эквивалентен обычному удару об одностороннюю связь. Если в начальный момент угловая скорость шара и проекция скорости центра шара на плоскость Oxy были отличны от нуля, то при стремлении времени к бесконечности шар повернется на сколь угодно большой угол вокруг оси параллельной вектору угловой скорости, и его центр уйдет сколь угодно далеко вдоль направления $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, 0)$.

Пусть $0 < c < 1$, тогда уравнения удара разделяются, и их можно рассматривать отдельно для пары (\dot{x}, ω_y) и для пары (\dot{y}, ω_x) . Для каждой пары уравнения по виду совпадают с аналогичными уравнениями для движения диска между параллельными прямыми. Если повернуть оси координат вокруг оси Oz так, чтобы после первого удара было $\dot{y} = 0$, то дальнейшее движение центра шара будет происходить параллельно оси Ox . При этом будет выполнено: $\dot{y} = 0$, $\omega_x = 0$, а координаты (\dot{x}, ω_y) будут меняться так же, как и для диска между параллельными прямыми.

Характер движения для $0 < c < 1$ такой же, как и при $c = 0$.

Если вся масса сосредоточена в центре шара, то $J = 0$ и скорость движения шара вдоль Ox после ударов сохраняется, значит, шар улетит сколь угодно далеко.

Если $J > 0$, то $\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1$. В пределе, при стремлении времени к бесконечности, шар выйдет на периодический режим движения по нормали к стенкам полости с вертикальной угловой скоростью. При выходе на этот режим шар пройдет конечное расстояние вдоль оси Ox . Если в начальный момент вертикальная составляющая угловой скорости равнялась нулю, то при выходе на периодический режим суммарный поворот шара будет конечен.

Во второй части рассматривается движение шара между подвижными плоскостями.

Сначала выводятся соотношения для удара шара о движущуюся плоскость. Движение шара ограничено плоскостью $z = -b$, причем эта плоскость движется поступательно с постоянной скоростью $(u_x, u_y, 0)$. Полученные соотношения используются в следующих разделах. Уравнения удара разделяются, и их можно рассматривать отдельно для пары (\dot{x}, ω_y) и для пары (\dot{y}, ω_x) . Для каждой

пары уравнения по виду совпадают с аналогичными уравнениями для движения диска между параллельными прямыми.

Далее рассматривается движение шара между плоскостями, движущимися с постоянной скоростью, в случае абсолютно упругого соударения с абсолютно шероховатой плоскостью (при $\nu = 1, c = 0$). Пусть шар движется по инерции между плоскостями $z = -b$ и $z = b$, причем эти плоскости движутся поступательно с постоянными скоростями $(u_{x1}, u_{y1}, 0)$, $(u_{x2}, u_{y2}, 0)$ (т.е. вдоль самих себя).

Если $J > 0$, то найдутся такие пары (\dot{x}^*, ω_y^*) , (\dot{y}^*, ω_x^*) , что при $n \rightarrow +\infty$ будет выполнено: $\dot{x}_n \rightarrow \dot{x}^*$, $\omega_{yn} \rightarrow \omega_y^*$, $\dot{y}_n \rightarrow \dot{y}^*$, $\omega_{xn} \rightarrow \omega_x^*$, где n — номер удара. Значит, в пределе центр шара будет с постоянной скоростью перемещаться вдоль стенок полости, а угловая скорость шара будет постоянна. При этом (\dot{x}^*, ω_y^*) , (\dot{y}^*, ω_x^*) — точки пересечения прямых качения, отвечающие движению шара вдоль осей Ox и Oy . Поэтому-то линейная скорость центра (\dot{x}^*, \dot{y}^*) и угловая скорость $\vec{\omega}^* = (\omega_x^*, \omega_y^*, 9)$ такие, как если бы плоскости Σ_1 и Σ_2 прижимали шар сверху и снизу (т.е. при $b = a$), и он катился бы между ними без проскальзывания. Вертикальная составляющая угловой скорости ω_z остается постоянной.

Если вся масса шара сосредоточена в его центре, т.е. $J = 0$, то линейная скорость центра \dot{x} постоянна, а каждая компонента угловой скорости принимает два чередующиеся значения.

Также рассматривается движение шара между плоскостями, движущимися с переменной скоростью: $(u_{1x}(t), u_{1y}(t), 0)$, $(u_{2x}(t), u_{2y}(t), 0)$. Обозначим t_n — момент n -го соударения, а $(w_{xn}, w_{yn}, 0)$ — скорость стенки, о которую происходит удар в этот момент.

Уравнения удара разделяются, и их можно рассматривать отдельно для пары (\dot{x}, ω_y) , т.е. для проекции движения шара на плоскость Oxz , и отдельно для пары (\dot{y}, ω_x) , т.е. для проекции движения шара на плоскость Oyz . Соответственно, можно применять метод диаграмм отдельно для движения шара в проекции на плоскости Oxz и на ось Oz .

В соответствии с методом диаграмм перед ударом $n + 1$ изображающая точка $\eta_{xn} = (\dot{x}_n, \omega_{yn})$ находилась на прямой качения $L_{xn} : \dot{x} + (-1)^n a \omega_y = w_{xn}$. Это линия качения для проекции на плоскости Oxz — она отвечает качению шара без проскальзывания вдоль оси Ox . Изображающая точка $\eta_{yn} = (\dot{y}_n, \omega_{xn})$ находилась на прямой

качения L_{yn} : $\dot{y} - (-1)^n a \omega_x = w_{yn}$. Это линия качения для проекции на плоскости Oyz , она отвечает качению шара без проскальзывания вдоль оси Oy .

При ударе $n + 1$ изображающие точки $\eta_{xn} = (\dot{x}_n, \omega_{yn})$ и $\eta_{yn} = (\dot{y}_n, \omega_{xn})$ проектируются ортогонально в кинетической метрике на прямые качения $L_{x(n+1)}$ и $L_{(n+1)}$. Точки пересечения прямых L_{xn} , $L_{x(n+1)}$ и прямых L_{yn} , $L_{y(n+1)}$ обозначим, соответственно, $\eta_{xn}^* = (\dot{x}_n^*, \omega_{yn}^*)$ и $\eta_{yn}^* = (\dot{y}_n^*, \omega_{xn}^*)$.

Пусть скорости движения стенок полости ограничены: $u_{ix}^- \leq u_{ix}(t) \leq u_{ix}^+$, $u_{iy}^- \leq u_{iy}(t) \leq u_{iy}^+$, $i = 1, 2$. Тогда точки η_{xn}^* и η_{yn}^* , $n = 1, 2, \dots$, лежат в некоторых прямоугольниках Π_x^* и Π_y^* . Диаметры этих прямоугольников обозначим через d_x и d_y .

Показывается, что в пределе, при $n \rightarrow +\infty$, расстояние от изображающих точек η_{xn} и η_{yn} до прямоугольников Π_x^* и Π_y^* не превосходит величин $\delta_x = d_x D$ и $\delta_y = d_y D$, где $D = \frac{(ma^2 - J)}{2J}$. В строгой формулировке: для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное N такое, что при всех $n > N$ расстояние ρ_{xn} от изображающей точки η_{xn} до прямоугольника Π_x^* будет меньше $\delta_x + \varepsilon$, и расстояние ρ_{yn} от изображающей точки η_{yn} до прямоугольника Π_y^* будет меньше $\delta_y + \varepsilon$.

В частности, если скорости стенок канала ограничены по модулю одинаковым образом: $-f \leq u_{xi}, u_{yi} \leq f$ ($i = 1, 2$), то $d_x = d_y = d$, $\delta_x = \delta_y = \delta$, и в пределе диапазоны изменения линейных $(\dot{x}_n^+, \dot{y}_n^+)$ и угловых $(\omega_{yn}^+, \omega_{xn}^+)$ скоростей после удара такие: при $f \rightarrow +0$

$$|\dot{x}_n^+|, |\dot{y}_n^+| \leq f + \frac{\delta}{\sqrt{m}} = O(f), \quad |\omega_{yn}^+|, |\omega_{xn}^+| \leq \frac{f}{a} + \frac{\delta}{\sqrt{J}} = O(f).$$

Значит, при малых скоростях движения стенок полости проекции линейной и угловой скоростей шара на плоскости стенок будут с ростом времени падать до небольшой величины, имеющей такой же порядок малости, как скорости движения стенок полости.

В третьей части рассматривается движение шара между вертикальными плоскостями в однородном поле тяжести. Будем считать, что ось Ox направлена вертикально вниз. Тогда оси Oy и Oz будут горизонтальны, а ограничивающие плоскости $z = -b$ и $z = b$ — вертикальны. Рассматривается случай абсолютно упругого соударения с абсолютно шероховатыми плоскостями, т.е. $\nu_i = 1$, $c_i = 0$, $i = 1, 2$.

Выписывают уравнения удара. Они разделяются, и их можно

рассматривать отдельно для пары (\dot{x}, ω_y) и для пары (\dot{y}, ω_x) . Для каждой пары уравнения по виду совпадают с аналогичными уравнениями для движения диска между параллельными прямыми. Для движения вдоль оси Oy это будет движение по инерции, а для движения вдоль Ox это будет движение в вертикальном канале.

Выводятся следующие свойства движения шара. Если $0 < J \leq \frac{2}{3}ma^2$, то в пределе центр шара остановит движение вдоль оси Oy (в горизонтальном направлении) и будет с постоянной скоростью перемещаться вдоль оси Ox (вниз), а его угловая скорость в проекции на ось Ox станет равной нулю, а в проекции на ось Oy будет постоянна модулю и будет менять знак при каждом ударе.

Если вся масса сосредоточена в центре диска ($J = 0$), то скорость движения шара вдоль Oy постоянна, а вдоль Ox при каждом ударе растет с постоянным ускорением $a\lambda_2$. Компонента угловой скорости ω_x при каждом ударе растет по модулю с постоянным ускорением λ_2 и меняет знак при каждом ударе.

В четвертой главе рассматривается движение по инерции шара с симметричным распределением масс в сферической и цилиндрической полости. Считается, что при ударе шара о стенки полости происходит мгновенное наложение и снятие связи, состоящей в том, что равна нулю касательная к стенке составляющая скорости точки шара, которой он соударяется со стенкой.

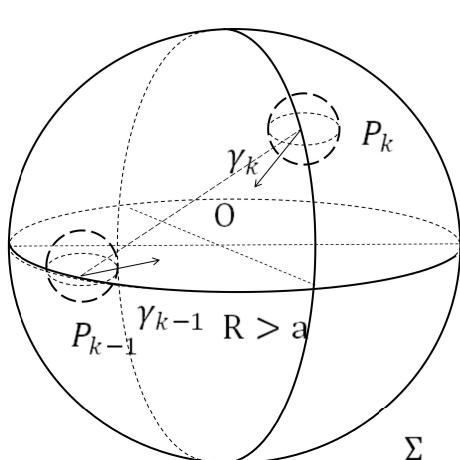


Рис. 7: Движение шара внутри сферы.

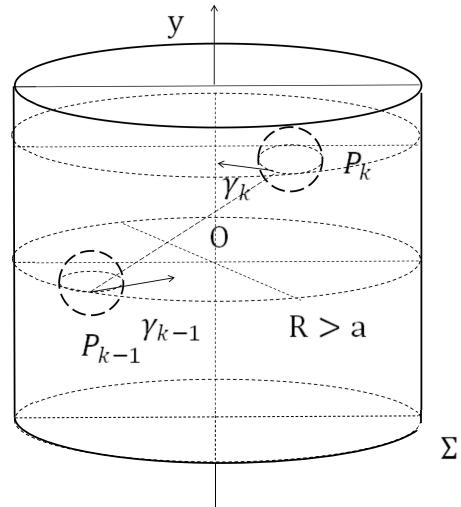


Рис. 8: Движение шара внутри кругового цилиндра.

Показывается, что в обоих случаях скорость движения центра шара и угловая скорость шара выходят на периодический режим — угловая скорость постоянна, а скорость после каждого удара поворачивается на постоянный угол вокруг оси, параллельной угловой скорости.

При движении внутри цилиндра после первого же удара диск выйдет на периодический режим движения в том смысле, что его угловая скорость будет постоянна, а центр диска будет двигаться так, что величина его вектора скорости будет постоянна, а сам вектор после каждого удара будет поворачиваться на один и тот же угол. Иначе говоря, движение шара в проекции на плоскость ортогональную оси цилиндра будет подобно движению точки в математическом бильярде внутри круга.

В пятой главе рассматривается задача об ударе катящегося тела о шероховатую стенку. Сначала рассматривается задача в общей постановке, а затем задача об ударе однородного шара, катящегося по горизонтальной плоскости, об вертикальную плоскую шероховатую стенку. В задаче о движении шара в канале с параллельными плоскими стенками показано, что в общем случае в пределе движение центра масс шара стремится к периодическому, при котором центр шара между ударами движется по нормали к стенкам, его продольная скорость равна нулю, а угловая скорость горизонтальна и параллельна стенкам канала. Эта часть состоит из трех разделов.

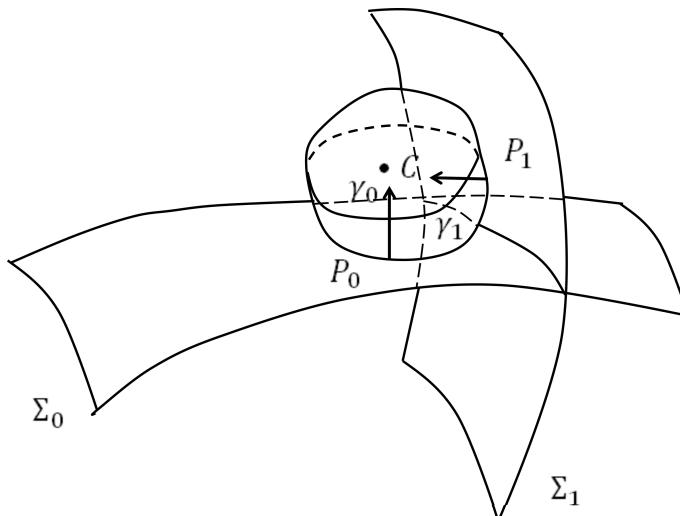


Рис. 9: Удар тела, катящегося по поверхности Σ_0 , о поверхность Σ_1 .

В первом разделе выводятся соотношения для удара тела, катящегося без проскальзывания по некоторой поверхности, о другую шероховатую поверхность (стенку). Предполагается, что поверхности строго выпуклы, и тело ограничено строго выпуклой гладкой поверхностьюю, и, поэтому, точки соприкосновения тела и поверхностей единственны. Считается, что при ударе тела о поверхность происходит мгновенное наложение и снятие связи, состоящей в том, что касательная к стенке составляющая скорости соприкасающейся точки шара равна нулю. Выводятся уравнения удара, позволяющие определять параметры движения тела после удара $(\cdot)^+$ по параметрам его движения до удара $(\cdot)^-$:

$$\vec{V}_c^+ + [\vec{\omega}^+, C\vec{P}_0] = 0, \quad (\vec{V}_{p1}^+, \vec{\gamma}_1) = -\nu(\vec{V}_{p1}^-, \vec{\gamma}_1),$$

$$(\mathbb{J}_0 P_0 \vec{P}_1, \vec{\omega}^+) = (\mathbb{J}_0 P_0 \vec{P}_1, \vec{\omega}^-), \quad (\mathbb{J}_0 \vec{n}, \vec{\omega}^+) = 0.$$

Здесь

$$\vec{V}_{p1}^- = \vec{V}_c^- + [\vec{\omega}^-, C\vec{P}_1], \quad \vec{V}_{p1}^+ = \vec{V}_c^+ + [\vec{\omega}^+, C\vec{P}_1],$$

$$\vec{n} = |P_0 \vec{P}_1|_k^2 \vec{\gamma}_1 - (\vec{\gamma}_1, P_0 \vec{P}_1)_k |P_0 \vec{P}_1|_k^2 P_0 \vec{P}_1,$$

\mathbb{J}_0 — матрица тензора инерции тела относительно точки P_0 , и $(\vec{a}, \vec{b})_k = (\mathbb{J}_0 \vec{a}, \vec{b})$.

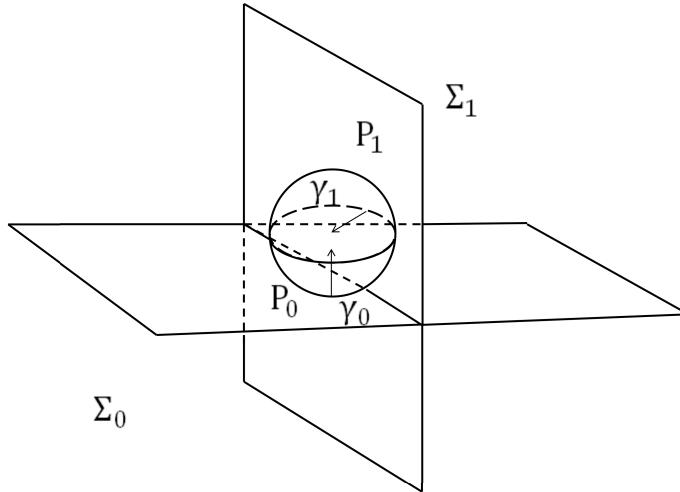


Рис. 10: Удар шара, катящегося по плоскости Σ_0 , о плоскость Σ_1 .

В втором разделе выводятся соотношения для удара шара, катящегося без проскальзывания по некоторой плоскости. Исследуются некоторые свойства такого удара. В частности, если рассматривать движение центра C шара, то оказывается, что угол отражения меньше угла падения (углы между траекторией движения

центра C и нормалью к поверхности стенке). Отыскивается условие, при котором центр шара после удара будет двигаться по траектории ортогональной стенке; условия, при которых центр шара совершил возвратное движение, т.е. его траектория совпадет с траекторией движения до удара, но движение будет происходить в противоположном направлении. Введем систему координат $Oxyz$, где $O = P_0$, плоскость Oxy совпадает с опорной плоскостью Σ_0 , ось Oz направлена по вектору $\vec{\gamma}_0$, а ось Ox — по нормали к плоскости Σ_1 в сторону от центра шара к стенке (т.е. по $-\vec{\gamma}_1$). Тогда уравнения удара примут вид

$$\omega_x^+ = \frac{(J + ma^2)\omega_x^- + J\omega_z^-}{(2J + ma^2)}, \quad \omega_y^+ = -\nu\omega_y^- \quad \omega_z^+ = \omega_x^+.$$

Получены простые свойства удара: угол падения центра шара меньше угла отражения. Центр шара после удара совершает возвратное движение при $\omega_z^- = \frac{3J + 2ma^2}{Ja}\dot{y}^-$.

В третьем разделе рассматривается движение шара в прямолинейном канале с шероховатыми стенками. Пусть в системе координат $Oxyz$ шар, описанный в предыдущем разделе, катится по инерции без проскальзывания по плоскости Oxy . Его движение ограничено двумя шероховатыми плоскостями $x = b$ и $x = -b$, $b > 2a > 0$. Удары шара об эти поверхности рассматриваются в модели с полным мгновенным наложением и снятием связи качения без проскальзывания по этим поверхностям. Показывается, что в общем случае в пределе движение центра масс шара стремится к периодическому, при котором центр шара между ударами движется по нормали к стенкам, его y -координата равна y^* , а угловая скорость шара горизонтальна и параллельна стенкам канала.

В заключении приведены основные результаты и выводы:

В работе рассмотрена модель удара твердого тела о шероховатую поверхность с трением, состоящая в мгновенном наложении связи качения тела по поверхности без проскальзывания, действующей только в момент удара. Показано, что такое взаимодействие тела с поверхностью при ударе может быть описано в рамках модели удара с вязким трением В.В.Козлова, имеющей обоснование физической реализации. В рамках предложенной модели исследовано несколько задач о предельных движениях тела, соударяющегося с шероховатой

тыми поверхностями.

Для диска, перемещающегося с ударами между параллельными прямыми показан выход движения на предельные режимы в случае неподвижных и подвижных прямых. Предложен метод диаграмм, при помощи которого найдены предельные режимы движения для частично шероховатых прямых. Рассмотрено движение диска в вертикальном канале.

Для движения шара, перемещающегося с ударами между параллельными плоскостями, показано, что движение в пределе выходит на установившийся режим по скорости и координатам, угловая скорость шара стремится к постоянному значению, а скорость его центра становится периодической. Рассмотрена задача для плоскостей, совершающих поступательные колебания в своей плоскости. Показан выход на предельный режим с точностью до величины порядка размаха колебаний плоскостей.

Для движения шара, перемещающегося внутри сферы и цилиндра, показано, что движение в пределе выходит на установившийся режим по скорости: угловая скорость шара стремится к постоянному значению, а скорость его центра становится условно периодической. Движение в цилиндре в общем случае сходится к движению в попечной плоскости и аналогично математическому бильярду для движения точки в круге.

Для катящегося шара, ударяющегося о шероховатую стенку, выведены общие соотношения, описывающие удар. Изучены простые свойства удара. В задаче о движении шара в канале с параллельными плоскими стенками показано, что в общем случае, в пределе, движение центра масс шара стремится к периодическому, при котором центр шара между ударами движется по нормали к стенкам, его продольная скорость равна нулю, а угловая скорость горизонтальна и параллельна стенкам канала.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Отраднова Л.С. Максимальность действия по Гамильтону для систем с односторонними связями. // Вестн. Моск. ун-та, сер.1 мат., мех., 2012, N4, 70–72с.
2. Барбашова Т.Ф., Отраднова Л.С. О движении шара с ударами о шероховатую поверхность. // Вестн. Моск. ун-та, сер.1 мат., мех., 2012, N5, 35–39с.

3. Барбашова Т.Ф., Кугушев Е.И., Отраднова Л.С.О движении сферы с множественными соударениями// XII Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(Конференция Пятницкого), 5-8 июня 2012 г., Москва, Россия, тезисы докладов, с. 41-42.
4. Кугушев Е.И., Отраднова Л.С. О движении механической системы с соударениями// Международная конференция по механике "Шестые Поляховские чтения посвященная 95-летию со дня рождения С.В.Валландера, 2012, 31.01-03.02.2012, Санкт-Петербург, Россия, тезисы докладов, с.50.
5. Барбашова Т.Ф., Глухова Л.С. О движении шара с ударами о шероховатую плоскость// XI Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(Конференция Пятницкого), 1-4 июня 2010 г., Москва, Россия, тезисы докладов, с. 32-34.
6. Глухова Л.С. О максимальности действия по Гамильтону для систем с односторонними связями. // Сборник трудов конференции-конкурса молодых ученых, под ред. академика РАН Г.Г. Черного и профессора В.А. Самсонова, М., МГУ, 2009 г., 81–84 с.