Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.927.7

Бибило Юлия Петровна

# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МОНОДРОМИИ ДЛЯ СИСТЕМ С ИРРЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2012

Работа выполнена на кафедре теории динамических систем Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | академик РАН Аносов Дмитрий Викторович. |
| **Официальные оппоненты:** | доктор физико-математических наук,<br>профессор Лексин Владимир Павлович,<br>Московский государственный областной<br>социально-гуманитарный институт,<br>профессор кафедры математики и методики<br>преподавания математических дисциплин,<br><br>кандидат физико-математических наук<br>Вьюгин Илья Владимирович,<br>Институт проблем передачи<br>информации им. А. А. Харкевича РАН,<br>старший научный сотрудник<br>Лаборатории № 4. |
| **Ведущая организация:** | Санкт-Петербургское отделение<br>Математического института<br>им. В. А. Стеклова РАН. |

Защита диссертации состоится 26 октября 2012 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8-й этаж).

Автореферат разослан 26 сентября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Данная работа посвящена изомонодромным деформациям систем линейных дифференциальных уравнений на сфере Римана с иррегулярными особыми точками. Рассматривается система вида

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y, \tag{1}$$

из $d$ линейных дифференциальных уравнений, у которой матрица коэффициентов $A(z)$ является мероморфной матричной функцией с полюсами в точках $a_1^0, \ldots, a_n^0$, и деформация этой системы

$$\frac{dy}{dz} = A(z,t)y, \tag{2}$$

где $t$ – некоторый набор параметров. Среди особых точек $a_1^0, \ldots, a_n^0$ системы (1) могут быть как фуксовые (регулярные) особенности, так и иррегулярные, то есть такие, что фундаментальная матрица системы имеет экспоненциальный рост в окрестностях этих особых точек.

Впервые вопрос об изомонодромных деформациях скалярных дифференциальных уравнений был поставлен Б. Риманом[1]. Но основные результаты были получены позже. Л. Фукс, Р. Гарнье, Л. Шлезингер опубликовали ряд работ, посвященных изомонодромным деформациям скалярных линейных дифференциальных уравнений высоких порядков и систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Долгое время изучались деформации только фуксовых систем.

В теории изомонодромных деформаций центральными являются следующие вопросы[2,3]:

- построение изомонодромной деформации,
- исследование общего вида дифференциальной формы, задающей изомонодромную деформацию,
- анализ условий изомонодромности, в частности исследование уравнения Шлезингера,

[1] Б. Риман, *Сочинения*, ОГИЗ, Москва, 1949.

[2] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана.* Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.

[3] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, Москва, 2009.

- вычисление $\Theta$-дивизора и $\tau$-функции

и другие.

Новый импульс теория изомонодромных деформаций получила в 20-м веке. Интерес к изомонодромным деформациям во многом был вызван связью между изомонодромными деформациями фуксовых систем и интегрируемыми нелинейными уравнениями. Деформация фуксовой системы изомонодромна, если и только если найдется интегрируемая дифференциальная 1-форма, задающая данную деформацию. Условия интегрируемости сводятся к нелинейным уравнениям, удовлетворяющим свойству Пенлеве, в частности, к уравнению Пенлеве 6. Позже выяснилось, что к уравнениям Пенлеве 1–5 приводят деформации систем, содержащих как иррегулярные, так и фуксовы особенности[4].

В настоящее время теория изомонодромных деформаций развивается по нескольким направлениям. Рассматриваются изомонодромные деформации фуксовых систем на алгебраических кривых, деформации фуксовых систем с расширенным набором параметров. Исследуются нелинейные уравнения в частных производных, которые следуют из условий интегрируемости, и так далее.

Изомонодромные деформации систем с иррегулярными особыми точками впервые были построены М. Джимбо и Т. Мивой[5,6]. Они рассматривали системы общего положения, то есть системы, у которых все иррегулярные особые точки – нерезонансные. Построение изомонодромных деформаций во многом стало возможным после доказательства ряда теорем о свойствах систем линейных дифференциальных уравнений[7] и их решений в окрестности иррегулярной особой точки[8,9,10]. Определение изомонодромной деформации Джимбо и Мивы требует сохранения не только матриц монодромии, но и матриц Стокса.

[4] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана.* Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.

[5] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficientes*, Physica D, **2** (1981), pp. 306–352.

[6] J. Palmer, *Zeros of the Jimbo, Miwa, Ueno tau function*, J. Math. Phys. **40**:12 (1999), pp. 6638–6681.

[7] Y. Sibuya, *Stokes phenomena*, Bulletin of the American Mathematical Society, **83**:5 (1977), pp. 1075–1077.

[8] В. Вазов, *Ассимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, «Мир», Москва, 1968.

[9] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, *A general theory of invariants for meromorphic differential equations. I. Folmal invariants*, Funkcialaj Ekvacioj, **22**:2 (1979), pp. 197–221.

[10] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, *A general theory of invariants for meromorphic differential equations. II. Proper invariants*, Funkcialaj Ekvacioj, **22**:2 (1979), pp. 257–283.

Б. Мальгранж построил изомонодромную деформацию иррегулярной системы общего положения (а также, системы специального вида с иррегулярными резонансными особенностями), рассматривая семейство как семейство пар[11]. Каждая пара включает в себя голоморфное векторное расслоение $E$ на сфере Римана и мероморфную связность $\nabla$, заданную на расслоении $E$. Множество значений параметров $\Theta$, при которых расслоение $E$ нетривиально (и, значит, деформация не может быть продолжена на это множество) называется $\Theta$-дивизором Мальгранжа. $\Theta$-дивизор Мальгранжа может быть описан как множество нулей некоторой аналитической функции, такую функцию традиционно называют $\tau$-функцией.

Построением и исследованием изомонодромных деформаций систем с резонансными иррегулярными особенностями занимались в разное время Б. Мальгранж, А. А. Болибрух[12], В. Ю[13], М. Бертола и М. Ю. Мо[14], М. В. Федорюк[15]. Необходимость отдельных исследований вызвана тем, что семейства систем с резонансными иррегулярными особенностями имеют существенные отличия от семейств систем общего положения (в том числе отличия, связанные с вычислением фундаментальной матрицы, видом формальной нормальной формы, описанием формальных и мероморфных локальных инвариантов). В качестве набора $t$ параметров деформации выбраны положения особых точек $a_1, \dots, a_n$ и инварианты $\beta_1, \dots, \beta_h$ фундаментальной матрицы решений, характеризующие ее экспоненциальный рост в окрестностях иррегулярных особенностей.

Помимо перечисленных проблем также рассматривается вопрос о слиянии особых точек при изомонодромной деформации. В. И. Арнольдом были сформулированы две задачи, посвященные изомонодромным слияниям фуксовых особенностей[16]. Задачи Арнольда включают в себя вопрос о том, как описать множество систем с регулярными особыми точками в терминах изомонодромных деформаций (пределов) фуксовых систем? Болибрух, рассматривая так называемые нормализованные изомонодромные слияния особых точек фуксовых систем, получил два результата, достаточно ис-

[11] B. Malgrange, *Sur les déformations isomonodromiques. II. Singularités irrégulières*, Progr. Math. **37** (1983), pp. 427–438.

[12] A. Bolibruch, *Inverse problems for linear differential equations with meromorphic coefficients*, CRM Proceeding and Lecture Notes, **31** (2002), pp. 3–25.

[13] V. Heu, *Universal isomonodromic deformations of meromorphic rank 2 connections on curves*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **60**:2 (2010), pp. 515–549.

[14] M. Bertola, M. Y. Mo, *Isomonodromic deformation of resonant rational connections*, Int. Math. Res. Papers, **2005**:11 (2005), pp. 565–635.

[15] М. В. Федорюк, *Изомонодромные деформации уравнений с иррегулярными особенностями*, Матем. сб., **181**:12 (1990), pp. 1623–1639.

[16] *Задачи Арнольда*, ФАЗИС, Москва, 2000.

черпывающе отвечающих на него: 1) любая регулярная система является результатом изомонодромного слияния особенностей фуксовой системы[17]; 2) при изомонодромном слиянии регулярных особенностей не может образоваться иррегулярная особая точка[18].

**Цель работы.**

Целью данной работы является исследование общего вида формы изомонодромных деформаций в случае необщего положения, классификация мероморфных систем с точки зрения изомонодромных слияний особенностей, исследование структуры $\Theta$-дивизора, локального и глобального вида $\tau$-функции.

**Методы исследования.**

В работе применяются методы аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе современные методы теории голоморфных расслоений и связностей на них, комплексного анализа и теории формальных рядов.

**Научная новизна работы.**

В диссертации получены следующие новые результаты:

- Доказана теорема о том, что деформация системы (не обязательно общего положения) изомонодромна тогда и только тогда, когда дифференциальная 1-форма, задающая данную деформацию, удовлетворяет условию интегрируемости Фробениуса.

- Исследован общий вид дифференциальной формы изомонодромной деформации, доказаны оценки порядков полюсов в точках, которые являются формально фуксовыми иррегулярными особенностями семейства.

- Доказано, что любая система с иррегулярными особыми точками является пределом изомонодромного слияния особых точек семейства, ранги Пуанкаре всех особенностей которого минимальны.

- Получены оценки полюсов матриц коэффициентов изомонодромного семейства специального вида вдоль его $\Theta$-дивизора.

[17] А. А. Болибрух, *Регулярные особые точки как изомонодромные слияния фуксовых*, Успехи матем. наук, **56**:4 (2001), стр. 135–136.

[18] А. А. Болибрух *Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей*, Труды МИАН им. В.А. Стеклова, **221**, вып.1 (1998), стр. 127–142.

**Теоретическая и практическая ценность.**

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы специалистами по теории изомонодромных деформаций систем линейных дифференциальных уравнений.

**Апробация работы.**

Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

1. на семинаре кафедры теории динамических систем механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством академика РАН Д. В. Аносова, д. ф.-м. н. В. М. Закалюкина в 2009 г.;

2. на семинаре «Аналитическая теория дифференциальных уравнений» под руководством академика РАН Д. В. Аносова, д. ф.-м. н., профессора В. П. Лексина (МИАН им. В.А.Стеклова) в 2008, 2011 гг.;

3. на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной И. Г. Петровскому (г. Москва, 30 мая – 4 июня 2011 г.);

4. на международной конференции «Formal and Analytic Solutions of Differential and Difference Equations» (г. Бедлево, Польша, 8 – 13 августа 2011 г.);

5. на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 2 – 7 июля 2010 г.);

6. на конференции «Информационные технологии и системы — 2010. 33-я конференция молодых ученых и специалистов ИППИ РАН» (г. Геленджик, 20 – 24 сентября 2010 г.);

7. на международной математической конференции «50 лет ИППИ РАН» (г. Москва, 25 – 29 июля 2011 г.);

8. на XIII международной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения — 2009) (г. Пинск, Беларусь, 26 – 29 мая 2009 г.);

9. на 5-й международной конференции «Analytical Methods of Analysis and Differential Equations» (г. Минск, Беларусь, 14 - 19 сентября 2009 г.).

**Публикации.**

Результаты диссертации опубликованы в трех работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1,2,3] опубликованы в журналах из перечня ВАК.

**Структура и объем работы.**

Диссертация содержит введение, четыре главы и список литературы. Главы разделены на параграфы. Список литературы содержит 38 наименований. Объем диссертации — 86 страниц.

## Содержание диссертации.

Данная диссертация состоит из четырех глав. В главе 1 рассматривается система с мероморфной матрицей коэффициентов, даются основные определения и формулируются основные теоремы, посвященные особенностям, формальным инвариантам, мероморфным инвариантам, структуре формальной фундаментальной матрицы.

Среди изомонодромных деформаций фуксовых систем ключевыми являются изомонодромные деформации Шлезингера. Однако, есть и существенно отличные (то есть те, которые нельзя свести к шлезингеровским при помощи мероморфных преобразований) деформации фуксовых систем, примеры которых построены Болибрухом. Деформации Джимбо и Мивы, вообще говоря, не включают в себя нешлезингеровские деформации фуксовых систем.

В главе 2 сперва дается определение допустимой деформации, а затем и изомонодромной деформации иррегулярной системы. Изомонодромность понимается в следующем смысле. Семейство линейных систем

$$\frac{dy}{dz} = A(z,t)y, \quad A(z,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r_i+1}\frac{A_{i,k}(t)}{(z-a_i)^k}, \tag{3}$$

является изомонодромной деформацией системы (1), если для каждого значения параметра $t \in D(t^0)$ ($D(t^0)$ – окрестность в пространстве параметров, $t = (a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_h)$) найдется фундаментальная матрица решений семейства (3) такая, что представление монодромии и матрицы Стокса совпадают с представлением монодромии и матрицами Стокса исходной системы (1) (такую фундаментальную матрицу решений будем называть изомонодромной). Предлагаемое определение использует идею Болибруха, предложенную им для деформаций фуксовых систем, и таким образом включает в себя более широкий класс деформаций фуксовых систем.

Одним из важных результатов, доказанных в главе 2, является следующая теорема.

**Теорема 1.** Допустимая деформация

$$\frac{dy}{dz} = A(z,t)y, \quad A(z,t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i+1} \frac{A_{i,k}(t)}{(z-a_i)^k},$$

является изомонодромной тогда и только тогда, когда существует матричная дифференциальная мероморфная 1-форма $\omega$ (форма деформации), определенная на $\overline{\mathbb{C}} \times D(t^0)$, с особенностями вдоль гиперплоскостей $\{z - a_i = 0\}$, такая, что выполнены условия
1. $\omega = A(z,t)dz$, при каждом фиксированном значении параметра $t \in D(t^0)$,
2. $d\omega = \omega \wedge \omega$.

Доказательство данной теоремы опирается на следующее утверждение, которое также используется для вычисления общего вида формы деформации.

**Теорема 2.** Пусть задана изомонодромная деформация, тогда найдется аналитическая в $\overline{\mathbb{C}} \times D(t^0) \setminus \bigcup_{i=1}^n \{z - a_i = 0\}$ изомонодромная фундаментальная матрица решений.

Из теоремы 1 следует, что для построения изомонодромных деформаций и исследования их связи с нелинейными уравнениями полезно знать общий вид дифференциальной формы, которая может задавать изомонодромную деформацию. В главе 2 доказана следующая теорема (и следствия из нее), в которой описывается общий вид такой дифференциальной формы.

**Теорема 3.** Дифференциальная 1-форма $\omega$, определенная на $\overline{\mathbb{C}} \times D(t^0) \setminus \bigcup_{i=1}^n \{z - a_i = 0\}$ и задающая изомонодромную деформацию (3), имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i+1} \frac{A_{i,k}(t)}{(z-a_i)^k} d(z-a_i) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{M_i} \frac{\Phi_{i,k,j}(t)}{(z-a_i)^k} da_j + \sum_{j=1}^{n} \Psi_j(t) da_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{h} \sum_{k=1}^{N_i} \frac{\bar{\Phi}_{i,k,j}(t)}{(z-a_i)^k} d\beta_j + \sum_{j=1}^{h} \bar{\Psi}_j(t) d\beta_j,$$

где матричные функции $\{\Phi_{i,k,j}(t), \bar{\Phi}_{i,k,j}(t), \Psi_j(t), \bar{\Psi}_j(t)\}$ голоморфны в $D(t^0)$.

В доказательстве теоремы 3 используются результаты Р. Шафке о представлении формальной фундаментальной матрицы в виде произведения голоморфных по $t$ матричных функций[19].

Кроме того, проводится оценка полюсов $N_i, M_i$ формы деформации $\omega$, соответствующих так называемым формально фуксовым иррегулярным особым точкам.

Запишем формальную фундаментальную матрицу в левелевском базисе $\hat{Y}(z,t) = \hat{U}(z,t)(z-a_i)^{D_i}(z-a_i)^{\hat{E}_i} e^{Q_i(z,t)}$, где $D_i$ – диагональная целочисленная матрица формальных нормирований. Иррегулярная особая точка $a_i$ называется формально фуксовой, если формальный ряд $\hat{U}(z,t) = U_0(t) + U_1(t)(z-a_i) + \dots$ удовлетворяет условию $\det U_0(t) \neq 0$.

**Лемма 1.** Пусть точка $a_i$ – формально фуксова иррегулярная особая точка, тогда порядки полюсов $M_i$, $N_i$ дифференциальной формы $\omega$ вдоль гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$ не превосходят максимума из ранга Пуакаре $r_i$ и целочисленных разностей собственных значений матрицы $A_{i,1}(t^0)$.

В главе 2 также приведены примеры изомонодромных деформаций систем с иррегулярными (в том числе резонансными) особыми точками, которые не сводятся к деформации Джимбо и Мивы.

В главе 3 рассматриваются изомонодромные слияния иррегулярных и регулярных особых точек. Система

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \tag{4}$$

[19] R. Schafke, *Formal Fundamental Solutions of Irregular Singular Differential Equations Depending Upon Parameters*, Journal of Dynamical and Control Systems, **7**:4 (2001), pp. 501–533.

с особыми точками $b_1, ..., b_m$ является результатом изомонодромного слияния особых точек семейства (3), если матрица $A(z,t)$ стремится к $B(z)$, когда точки некоторого набора $a_{j_1}, ..., a_{j_{m_i}}$ особых точек стремятся к точке $b_i$ $(i = 1, ..., m)$.

Если бы систему с иррегулярной особой точкой можно было представить как предел при изомонодромном слиянии фуксовых особенностей и установить связь данных Стокса с матрицами монодромии сливающихся особенностей, это бы упростило изучение иррегулярных особенностей. Однако Болибрух показал, что такое представление невозможно. Таким образом, задачи Арнольда можно распространить на случай слияния фуксовых и иррегулярных особых точек: 1) Представить мероморфную систему как предел семейства более простого вида при изомонодромном слиянии особых точек; 2) Классифицировать мероморфные системы как результаты изомонодромного слияния более простых особенностей.

Основным результатом главы 3 является теорема, частично отвечающая на вопрос 1):

**Теорема 4.** Любая система является результатом изомонодромного слияния особых точек семейства, ранги Пуанкаре всех особенностей которого минимальны.

В главе 4 обсуждается локальная структура $\tau$-функции для изомонодромной деформации иррегулярной системы общего положения. Кроме того, доказана теорема о глобальном виде $\tau$-функции в частном случае.

**Теорема 5.** Пусть монодромия $(2\times 2)$-системы, у которой две иррегулярные нерезонансные особые точки $a_1^0, a_2^0$, ранги Пуанкаре которых равны 1, и $n-2$ фуксовые особые точки $a_3^0, \ldots, a_n^0$, имеющей вид

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{A_{1,2}^0}{(z-a_1^0)^2} + \frac{A_{2,2}^0}{(z-a_2^0)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{i,1}^0}{z-a_i^0}\right)y, \qquad (5)$$

неприводима и пусть $(E, \nabla)$ – мальгранжева изомонодромная деформация этой системы. Пусть, кроме того, точка $t^* \in \Theta$ такова, что

$$E|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{t^*\}} \cong \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1).$$

Тогда в окрестности $D(t^*)$ точки $t^*$ $\Theta$-дивизор является аналитическим подмногообразием, и матричные функции $A_{i,j}(t)$ имеют полюсы не более чем второго порядка вдоль $D(t^*) \cap \Theta$.

В заключение, я выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, академику РАН Дмитрию Викторовичу Аносову, за постановку задач, многочисленные советы, неисчерпаемое терпение, внимание и ценные замечания. Кроме того, я выражаю глубокую признательность участникам семинара по аналитической теории дифференциальных уравнений за расширение моего научного кругозора и полезные советы, в частности, Ренату Равилевичу Гонцову, за многочисленные обсуждения, критические замечания и идеи, использованные при получении результатов главы 4.

**Работы автора по теме диссертации.**


1. Ю. П. Бибило, *Изомонодромное слияние особых точек*, Матем. заметки, **87**:3 (2010), стр. 330–336.

2. Ю. П. Бибило, *Изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярными особенностями*, Матем. сборник, **203**:6 (2012), стр. 63–80.

3. Ю. П. Бибило, Р. Р. Гонцов, *Некоторые свойства изомонодромных деформаций Мальгранжа линейных* $(2 \times 2)$*-систем*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, **277** (2012), стр. 22–32.

   В данной работе Р. Р. Гонцову принадлежат параграфы 1 и 2, содержащие общую постановку задачи и описание изомонодромных деформаций Мальгранжа. Ю. П. Бибило принадлежит параграф 3, содержащий доказательство теоремы о Θ-дивизоре Мальгранжа.