Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи
УДК 511.34

Архипова Людмила Геннадьевна

Квадратичные характеры в проблеме распределения целых точек в шаре

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре математических и компьютерных методов анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Чубариков Владимир Николаевич
Официальные оппоненты:	Добровольский Николай Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО Тульский государственный университет имени Л.Н. Толстого, заведующий кафедрой
	Сухарев Иван Юрьевич, кандидат физико-математических наук, Евразийская экономическая комиссия, консультант департамента статистики
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 16 ноября 2012 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: РФ 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 16 октября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация является исследованием в области аналитической теории чисел, теории квадратичных характеров и арифметических проблем распределения целых точек в областях.

Проблемой шара называют задачу о выводе асимптотической формулы для $T(a)$ – числа узлов трехмерной целочисленной решетки, лежащих внутри шара растущего радиуса a с центром в начале координат, а также возможно более точной оценке остаточного члена $R(a)$ данной асимптотики.

Из рассуждений К.Ф. Гаусса, касающихся проблемы круга, легко следует асимптотическая формула для количества $T(a)$ вида $T(a) = \frac{4}{3}\pi a^3 + R(a)$, $R(a) \ll a^2$. Главный член этой формулы есть просто объем шара радиуса a. В 1926 году венгерский математик Сеге[1] доказал, что $R(a)$ есть $\Omega(a\sqrt{\ln a})$. В 1935 году И.М. Виноградов свел проблему оценки остатка $R(a)$ к сферическим суммам, то есть тройным суммам по целым точкам, лежащим на сфере переменного радиуса, и применил к ним свой метод [2,3] оценок тригонометрических сумм, разработанный для исследования числа классов квадратичных форм отрицательного дискриминанта и для исследований по проблеме Варинга[4], и получил первое со времен Гаусса улучшение оценки остаточного члена в проблеме шара[5]. Оценка Виноградова имела вид $R(a) \ll a^{1,4+\epsilon}$. В дальнейшем он же неоднократно улучшал этот результат. В 1949 году[6] была получена оценка $R(a) \ll a^{1,4-\frac{2}{405}+\epsilon}$. Оценка 1955 года[7] имеет вид $R(a) \ll a^{\frac{11}{8}+\epsilon}$. Оценка 1960 года[8] $R(a) \ll a^{\frac{19}{14}+\epsilon}$. И, наконец, в 1963 году И.М. Виноградов[9] оценил остаток $R(a)$ величиной $a^{\frac{4}{3}}\ln^6 a$. Более совершенное изложение последнего результата содержится в моно-

[1] G. Szego, *“Beitrage zur Theorie der Laguerreschen Polynome”*, II, Zahlentheoretische Anwendungen, Math. Z., 25 (1926), 388-404.

[2] И.М. Виноградов, *“О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя”*, Сообщ. Харьк. мат. о-ва, 1918 т.16, **1-2**, с. 10-38.

[3] И.М. Виноградов, *“Докторская диссертация”*

[4] И.М. Виноградов, *“О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга”*, Изв. АН СССР, ОМЕН, 1934, **10**, с. 1455-1469. Рез. на англ. яз.

[5] И.М. Виноградов, *“Число целых точек в шаре”*, Тр. мат. ин-та, 1935, т. 9, с. 17-38.

[6] И.М. Виноградов, *“Улучшение остаточного члена одной асимптотической формулы”*, Изв. АН СССР, Сер. мат. 1949, т. 13, **2**, с. 97-110.

[7] И.М. Виноградов, *“Улучшение асимптотических формул для числа целых точек в области трех измерений”*, Изв. АН СССР, Сер. мат. 1955, т. 19, **1**, с. 3-10.

[8] И.М. Виноградов, *“К вопросу о числе целых точек в заданной области”*, Изв. АН СССР, Сер. мат. 1960, т. 24, **6**, с. 777-786.

[9] И.М. Виноградов, *“К вопросу о числе целых точек в шаре”*, Изв. АН СССР, Сер. мат. 1963, т. 27, **5**, с. 957-968.

графии "Особые варианты метода тригонометрических сумм" 1976 года[10]. Следует отметить, что несколько позднее И.М. Виноградова, но независимо от него известный китайский математик Чен Джин Ран[11] также получил оценку вида $R(a) \ll a^{\frac{4}{3}+\epsilon}$.

Метод Виноградова, использованный в работе[12] 1963 года, по существу состоит в сведении задачи к оценке сферической тригонометрической суммы $P(\alpha)$ вида

$$P(\alpha) = a \sum_{l^2+m^2+n^2 \asymp a^\alpha} \frac{e^{2\pi i a \sqrt{l^2+m^2+n^2}}}{l^2+m^2+n^2}.$$

при условии, что параметр α меняется в промежутке $E = \left(0; \frac{4}{3}\right)$. При каждом значении α сумма $P(\alpha)$ оценивается и применяется к исследованию остатка $R(a)$ в асимптотической формуле. В современном виде зависимость оценки суммы $P(\alpha)$ от α приведена в работе[13] Г. Иванца и Ф.Чамизо. В диссертации приводится явное аналитическое и графическое представление этой оценки.

До 1995 года результат И.М. Виноградова в проблеме шара оставался наилучшим. Лишь в 1995 году Г. Иванец и Ф.Чамизо доказали, что $R(a) \ll a^{\frac{29}{22}+\epsilon}$. Идея данной работы состоит в том, чтобы найти асимптотическую формулу для количества целых точек в узком шаровом слое вида $a^2 \ll l^2+m^2+n^2 \ll (a+h)^2$, где h – маленькое число, являющееся отрицательной степенью числа a, и за счет этого учитывать вместе с точками внутри шара точки, лежащие вне его, но с коэффициентом, гладко убывающим от единицы к нулю с ростом радиуса внутри этого слоя. Такое "сглаживание" позволяет вместо отрезка $E = \left(0; \frac{4}{3}\right)$ при оценке суммы $P(\alpha)$ ограничиться отрезком $E_\gamma = \left(0; \frac{4}{3} - \gamma\right)$, где $\gamma > 0$ – некоторая постоянная. На новом отрезке сумма $P(\alpha)$ по Виноградову оценивается лучше, чем на E, тем самым улучшается оценка остатка $R(a)$.

В 1997 году Д.Р. Хис-Браун усилил результат работы Г. Иванца и Ф.Чамизо. Он доказал[14], что $R(a) \ll a^{\frac{21}{16}+\epsilon}$. С помощью новых соображений он увеличил значение параметра h и благодаря этому еще более сузил промежуток E_γ до величины $E_{\gamma=\frac{1}{12}} = \left(0; \frac{4}{3} - \frac{1}{12}\right) = \left(0; \frac{5}{4}\right)$. Оценка Виноградова

[10] И.М. Виноградов, *"Особые варианты метода тригонометрических сумм"*, Москва, Наука, 1976.

[11] Chen Jing-Run, *"Improvement on the asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimentions"*, Sci. Sinica, 12, 1963, 751-764.

[12] И.М. Виноградов, *"К вопросу о числе целых точек в шаре"*, Изв. АН СССР, Сер. мат. 1963, т. 27, **5**, с. 957-968.

[13] F. Chamizo and H. Iwaniec. *"On the Sphere Problem"*, Rev. Mat. Iberoamericana Vol.11, 2,1995, 417-429.

[14] D.R. Heath-Brown *"Lattice points in the sphere"*, Number theory in progress. Pr. Int. conference. Zacopane, Poland, 30.06-09.07, 1997. Vol.2: Elem. And anal. numb. Theory. Berlin: de Gruyter. 883-892 (1999)

для $P(\alpha)$ на уменьшенном промежутке лучше, чем на старом. В указанной работе Хис-Браун утверждает, что правый конец $\alpha = \frac{5}{4}$ промежутка E_γ можно еще несколько уменьшить. Однако это уже не ведет к улучшению оценки для $R(a)$, поскольку показатель степени в виноградовской оценке для $P(\alpha)$ в точке $\alpha = 1$ имеет локальный максимум, равный $\frac{21}{16}$, который вместе с точкой $\alpha = \frac{5}{4}$ является глобальным на $E_{\gamma=\frac{1}{12}} = \left(0; \frac{5}{4}\right)$.

Основной результат данной диссертации состоит в получении новой оценки суммы $P(\alpha)$ в фиксированной окрестности точки $\alpha = 1$. Здесь доказано, что при $\alpha \in \left(0; \frac{38}{37}\right)$ сумма $P(\alpha)$ оценивается так

$$P(\alpha) \ll a^{\frac{21}{16} - \frac{1}{592} + \epsilon}.$$

Хотя из этой оценки не следует улучшение оценки остатка $R(a)$ в проблеме шара, однако реализация схемы Хис-Брауна, направленная на дальнейшее уменьшение длины промежутка E_γ, вместе с нашей оценкой позволяет рассчитывать на получение новых оценок остатка $R(a)$.

Цель работы

Вывод новых форм остаточного члена в проблеме шара, выраженных через сферические тригонометрические суммы, а так же суммы, скрученные с квадратичным характером, и получение новых оценок сферических сумм в зависимости от длины промежутка суммирования, в том числе в одной из двух точек глобального максимума прежних оценок.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Предложен новый метод выражения остаточного члена асимптотической формулы в проблеме шара через сферические тригонометрические суммы И.М. Виноградова.

2. Найдено выражение сферических сумм через тригонометрические суммы, скрученные с квадратичным характером.

3. Предложены специальные представления гибридных сумм.

4. Получены новые оценки сферических тригонометрических сумм. Благодаря этому проблема нахождения новых оценок остатка в проблеме

шара сведена к оценке сферических сумм в окрестности второй точке глобального максимума.

5. Найдено новое неравенство типа Вейля - Корпута.

6. Предложено новое доказательство квадратичного закона взаимности, основанное на применении тригонометрических сумм, скрученных с квадратичным характером.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы аналитической теории чисел, в том числе многомерная формула суммирования Пуассона с остаточным членом, формула И.М. Виноградова для обращения тригонометрических сумм, результаты теории теории представления чисел квадратичными формами, метод сглаживания, метод тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в задачах аналитической теории чисел, связанных с применением тригонометрических сумм, изучением распределения целых точек в областях, в теории производящих рядов Дирихле.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

- Семинар «Аналитическая теория чисел» МГУ, Москва (неоднократно в 2006 − 2012 гг.)
- XVI международная конференция серии "Математика. Компьютер. Образование. г. Пущино, 19-24 января 2009г.
- VII международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященная памяти профессора А.А. Карацубы, г. Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 11-15 мая, 2010 г.

- Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения к дифференциальным уравнениям и теории чисел» (Белгород, Белгородский государственный университет, 17–21 октября 2011 г.).

- X международная конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения г.Волгоград, УКЦ ФМИФ ВГ-СПУ, 10-16 сентября 2012 г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 7 работах, список которых приводится в конце автореферата [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и библиографии (29 наименований). Общий объем диссертации составляет 79 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемых вопросов, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Приведены формулировки известных ранее результатов в рассматриваемых направлениях исследований, снабженные подробными ссылками.

Содержание главы 1

В первой главе находится аналитическое представление для выражения остатка асимптотической формулы для числа целых точек в шаре через сферическую тригонометрическую сумму. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Обозначим через $T(a)$ количество точек целочисленной решетки, лежащих в шаре радиуса a. Пусть δ – некоторая положительная постоянная с условием $\delta \leq \frac{1}{3}$, $B = 5a^{\frac{4}{3}+2\delta}\ln a$ и $B_0 = 10B\ln a$. Тогда*

$$T(a) = \sum_{\substack{l,m,n \\ l^2+m^2+n^2 \leqslant B_0}} e^{-\frac{\pi^2}{B}(l^2+m^2+n^2)} K(l,m,n) + O\left(a^{\frac{4}{3}-\delta+\epsilon}\right),$$

где при $l^2+m^2+n^2\neq 0$ *выполняется равенство*

$$K(l,m,n)=a\frac{\cos\left(2\pi a\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}\right)}{\pi(l^2+m^2+n^2)}+\frac{\sin\left(2\pi a\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}\right)}{2\pi^2(l^2+m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

и $K(0,0,0)=\frac{4}{3}\pi a^3$.

Подобное представление ранее получалось И.М. Виноградовым разбиением шара на 48 частей и выражением остатка через дробные доли арифметических функций с последующим разложением "сглаженной" дробной доли в ряд Фурье. Г. Иванец и Ф. Чамизо для тех же целей применяли кратную формулу суммирования Пуассона, но делали это формально и без оценки остатка. Наш вывод основан на троекратном применении одномерной формулы суммирования Пуассона[15] с остаточным членом. Кроме того, оценка остатка проводится в явном виде. Здесь же следует сказать, что мы ради простоты изложения не пользуемся "сглаживанием" количества целых точек по шаровому слою, оценивая их количество тривиально. Из-за этого параметр α в нашем случае выходит за пределы отрезка $E=\left(0;\frac{4}{3}\right)$, что в данном случае несущественно, поскольку наши дальнейшие усилия направлены в основном на оценку величины $P(\alpha)$ в окрестности точки $\alpha=1$.

Содержание главы 2

Во второй главе диссертации мы сводим вопрос об оценке сферических сумм к тригонометрическим, скрученным символом Якоби, которые мы далее называем гибридными суммами. Для этих сумм мы находим новые представления, которые, на наш взгляд, могут быть использованы для улучшения существующих оценок остаточного члена асимптотики в проблеме шара. Обозначим через $T=T(N,K)$ гибридную сумму вида

$$T(N,K)=\sum_{N<n\leq N_1}{}' \frac{1}{n}\sum_{K<k\leq K_1}\frac{e^{2\pi iad\sqrt{k}}}{d\sqrt{k}}\left(\frac{-k}{n}\right).$$

Здесь символ $\sum'$ означает, что суммирование ведется по нечетным числам n, свободным от квадратов, а для N и K выполнены неравенства $N\ll a^{1+\frac{15}{222}}$, $N_1\asymp N$, $K\ll a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{111}}$, $K_1\asymp K$, $d\in\mathbb{N}$. Для суммы $T=T(N,K)$

[15]Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков, *“Лекции по математическому анализу”*, Москва, Дрофа, 2004г., с. 442.

найдены следующие представления:

$$T(N,K) =$$

$$= \sum_{N<n\le N_1}{}' \frac{\theta_n}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{y=0}^{n-1} \left(\frac{y}{n}\right) \sum_{\frac{da}{2\sqrt{K_1}}+\frac{y}{n}\le m\le \frac{da}{2\sqrt{K}}+\frac{y}{n}} \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}}{d} \left(m-\frac{y}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i \frac{(da)^2}{2}\left(m-\frac{y}{n}\right)^{-1}} +$$

$$+O\left(\sum_{N<n\le N_1}{}' \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{y=0}^{n-1} \left(d^{-\frac{3}{2}} a^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{da}{2\sqrt{K}}+\frac{y}{n}\right)^{\frac{3}{4}} + d^{-1}K^{-\frac{1}{2}} \ln(K+1)\right)\right)$$

и

$$T(N,K) =$$

$$= \sum_{N<n\le N_1}{}' \frac{\theta_n}{dn} \sum_{\frac{dan}{2\sqrt{K_1}}\le m\le \frac{dan}{2\sqrt{K}}} \left(\frac{-m}{n}\right) \frac{e^{2\pi i \frac{(da)^2 n}{4m}}}{\sqrt{m}} + O\left(d^{-2}\left(a^{-\frac{1}{6}+\frac{5}{444}} + a^{\frac{15}{222}} \ln a\right)\right) .$$

Далее в этой главе получены новые оценки для величины $P(\alpha)$ на различных промежутках изменения параметра α. Мы вводим величину $W(\alpha) = a^{-1}P(\alpha)$, то есть

$$W(\alpha) = \sum_{l^2+m^2+n^2 \asymp a^\alpha} \frac{e^{2\pi i a\sqrt{l^2+m^2+n^2}}}{l^2+m^2+n^2} .$$

Показываем, что оценка И.М. Виноградова для величины $W(\alpha)$ на отрезке $E = \left(0;\frac{4}{3}\right)$ может быть записана в виде

$$W(\alpha) \ll a^{\phi(\alpha)+\epsilon}, \quad \text{где} \quad \phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} & \text{при} \quad 0<\alpha<\frac{14}{23}, \\ \frac{7}{24}+\frac{\alpha}{48} & \text{при} \quad \frac{14}{23}\le\alpha<1, \\ \frac{3}{8}-\frac{\alpha}{16} & \text{при} \quad 1\le\alpha<\frac{6}{5}, \\ \frac{\alpha}{4} & \text{при} \quad \frac{6}{5}\le\alpha\le\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Наша оценка, полученная в главе 2, имеет вид

$$W(\alpha) \ll a^{\kappa(\alpha)+\epsilon}, \quad \text{где} \quad \kappa(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} & \text{при} \quad 0<\alpha<\frac{26}{43}, \\ \frac{65}{224}+\frac{9\alpha}{448} & \text{при} \quad \frac{26}{43}\le\alpha<\frac{38}{37}, \\ \frac{3}{8}-\frac{\alpha}{16} & \text{при} \quad \frac{38}{37}\le\alpha<\frac{406}{333}, \\ \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{222} & \text{при} \quad \frac{406}{333}\le\alpha\le\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Сравнение этих оценок показывает, что наша оценка лучше оценки И.М. Виноградова на промежутках $E' = \left(\frac{26}{43};\frac{38}{37}\right)$ и $E'' = \left(\frac{6}{5};\frac{46}{37}\right)$. Следует отметить, что $\sup\limits_{E'}\phi(\alpha) = \sup\limits_{(0;\frac{5}{4})}\phi(\alpha)$ и $\sup\limits_{E'}\phi(\alpha) - \sup\limits_{E'}\kappa(\alpha) = \frac{1}{592} > 0$. Поэтому сужение отрезка E_γ за точку Хис-Брауна $\alpha = \frac{5}{4}$ позволило бы из нашего результата получить новое степенное понижение в остаточном члене асимптотической формулы в проблеме шара.

В настоящий момент проблема получения новых оценок этого остатка остается открытой.

Материалы настоящей диссертации открывают новые возможности для степенных улучшений в данном направлении. Во-первых, можно реализовать указание Хис-Брауна с целью некоторого увеличения значения параметра γ и получения новых оценок по указанной выше схеме. Во-вторых, можно воспользоваться полученной в разделе 2.4 новым выражением гибридной суммы $T(N, K)$ и применить к нему схему оценки, разработанную И.М. Виноградовым для оценки сумм, скрученных с функцией Мебиуса[16]. При этом следует учесть, что в новой записи сумма $T(N, K)$ представляет собой тригонометрическую сумму, скрученную с произведением символа Якоби $\left(\frac{-r}{n}\right)$ на аргумент суммы Гаусса θ_n. Указанное произведение принимает четыре различных значения ± 1,$\pm i$, в то время как функция Мебиуса равна ± 1. По-видимому, модификация метода работы И.М. Виноградова для наших целей не представляет непреодолимых трудностей. И, наконец, третий подход к оценке сумм $T(N, K)$ состоит в применении к формулам из раздела 2.3 новой формы неравенства Вейля - Корпута, вывод которой приводится в главе 3.

Содержание главы 3

Третья глава диссертации посвящена приложению рациональных тригонометрических сумм, скрученных символом Лежандра к выводу нового доказательства квадратичного закона взаимности. Кроме того в этой главе мы выводим новою форму известного неравенства Вейля-Корпута, полезную для оценок тригонометрических сумм от функций, принадлежащих классу Корпута - Виноградова, к которым относятся и суммы, рассматриваемые в данной диссертации. Указанное неравенство представлено в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — вещественная функция. Обозначим через S и T суммы вида*

$$S = \sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}, \quad T = T(H) = \frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} \sum_{a+2k\le x\le b-2k} e^{2\pi i f(x)}.$$

[16]И.М. Виноградов, *“Некоторое общее свойство распределения произведений простых чисел”*, Док. АН СССР, 1941 т.30 **8**.

Здесь H – натуральное число, меньшее, чем $(b-a)/2$.

Для суммы $T = T(H)$ справедлива оценка

$$|T^2| \le \frac{b-a-2H+1}{H^2} \sum_{0 \le s \le 2H-2} \sum_{a+s \le y \le b+s-2H} \sum_{\substack{-A(s) \le r \le A(s) \\ r \equiv s \bmod 2}} e^{2\pi i (f(y+r)-f(y-r))},$$

где s, y, r – целые числа, $A(s) = s$ при $0 \le s \le H-1$, и $A(s) = 2H-2-s$ при $H \le s \le 2H-2$.

Кроме того, имеет место очевидное равенство

$$S = T(H) + O(S_1)\,,$$

где S_1 – есть сумма того же вида, что и S, но содержащая не более чем H слагаемых.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Николаевичу Чубарикову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Автор благодарит весь коллектив кафедры математических и компьютерных методов анализа и кафедры математического анализа Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за создание творческой обстановки.

Работы автора по теме диссертации

[1] Л.Г. Архипова, *“О числе целых точек в сфере”*, Вестник МГУ, вып. 5, с. 59-61, 2008г.

[2] Л.Г. Архипова, *“Новые оценки сферических сумм И.М. Виноградова”*, Ученые записки Орл. гос. ун., Орел, №4(48), 2012, с. 19-28.

[3] Л.Г. Архипова, *“О квадратичном законе взаимности”*, Чебышевский сб., т. I , вып. 1(17), с. 155-163,Тула, 2006 г.

[4] Л.Г. Архипова, *“Об оценках экспоненциальных сумм, связанных с распределением целых точек в трехмерных областях”*, Изд. P&C Dynamics. Тез. док. XVI межд. конф. сер. МКО, Пущино, 19-24 янв. 2009г., Вып. 16, Ч. 1, с. 14.

[5] Л.Г. Архипова, *"Новые продвижения в проблеме шара"*, Тез. док. VII межд. конф. Алгебра и теория чисел: сов. проб. и прилож., Тула 11-15 мая 2010г. Тула, изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2010, с. 30-31.

[6] Л.Г. Архипова, *"Оценка тригонометрической суммы, скрученной символом Лежандра"*, Тез. док. межд. конф. Компл. ан. и его прилож. в дифф. ур-ях и т.ч., Белгород, 17-21 окт., 2011, с. 14-15.

[7] Л.Г. Архипова, *"Новый вариант неравенства Вейля - Корпута в методе тригонометрических сумм"*, Тез. док. X межд. конф. Алгебра и теория чисел: сов. проб. и прилож., Волгоград 10-16 сен. 2012г. Изд. ВГСПУ Перемена, с. 5.