

На правах рукописи

Харламов Александр Андреевич

**ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ИЗОБРАЖЕНИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
В ЗАДАЧАХ О ДВИЖЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ**

Специальность 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2012

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Владимир Павлович Карликов
Научный консультант:	доктор физико-математических наук профессор Александр Георгиевич Петров
Официальные оппоненты:	доктор технических наук с.н.с. Олег Павлович Шорьгин кандидат физико-математических наук доцент Александр Мефодьевич Головин
Ведущая организация:	Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина

Защита состоится 07 декабря 2012 г. в 15 часов 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «__» _____ 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д.501.001.89,
доктор физико-математических наук



А.Н. Осипцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Методы расчёта течений идеальной и вязкой жидкостей при наличии в них нескольких тел важны для моделирования течений как вокруг неподвижных конструкций (элементы гидравлических машин, быки мостов, стойки нефтедобывающих станций и другие сооружения), так и твёрдых тел,двигающихся в жидкости в присутствии границ. Для моделирования нестационарных процессов необходима информация о коэффициентах присоединённых масс.

Многочисленные эксперименты и прямое численное моделирование подтверждают возможность во многих случаях использования модели идеальной жидкости для реальных жидкостей при стационарном и нестационарном характерах течения как в безграничной жидкости (Mougin G., Magnaudet J., 2002; Wakaba L., Balachandar S., 2007), так и при наличии твёрдых границ (Риман И.С., Крепс Р.Л., 1947; Chen S.S., Wambsganss M.W., Jendrzejczyk J.A., 1976).

Несмотря на то, что в прошлом столетии было представлено большое количество методов расчёта и решений течений идеальной жидкости, область применения многих из них имеет ряд ограничений. Нестационарные течения вокруг произвольно двигающихся твёрдых тел были ограничены случаем двух тел (Hicks W.M., 1880; Воинов О.В., 1969; Мазур В.Ю., 1970), а исследования стационарных течений вокруг более чем двух тел были представлены в основном решениями для обтекания решёток профилей (Кочин Н.Е., 1941; Гинзбург Б.Л., 1950). Произвольное движение нескольких цилиндров стало исследоваться лишь в последние годы (Finn M.D., Cox S.M., Byrne H.M., 2003; Crowdy D., 2006, 2008).

В диссертации обобщается метод изображений, впервые использованный Хиксом для расчёта течения вокруг двух сфер (Hicks W.M., 1880) и применимый для расчёта течения вокруг двух параллельных круговых цилиндров. Разработанный обобщённый метод позволяет исследовать течения вокруг произвольного количества таких цилиндров, двигающихся в идеальной жидкости. Результаты расчёта ряда течений этим методом сравниваются в диссертации с результатами, известными из литературы. Возможности обобщённого метода иллюстрируются также на примере расчёта коэффициентов присоединённых масс при автоколебаниях кругового цилиндра, сильно загромождающего поток в плоском канале. Нестационарная задача об автоколебаниях тел загромождающих поток в каналах является сложной,

малоизученной и имеет важные приложения в технологиях, применяемых при добычи нефти и газа. Результаты решения её представляют интерес, например, для оптимизации процесса прочистки газовых скважин.

Другим направлением исследований в диссертационной работе является нахождение асимптотических зависимостей для сил гидродинамического взаимодействия твёрдых тел различной формы вблизи их контакта с другими телами, а также с твёрдыми границами. Исследованы случаи течения при малых числах Рейнольдса (теория смазки) и при больших числах Рейнольдса (модель идеальной жидкости). Применяемый метод позволяет получать асимптотические решения для широкого класса задач. Эти асимптотические решения могут служить, например, для контроля верности численных решений соответствующих задач гидродинамики.

Основные цели работы:

1. Обобщение метода изображений для расчёта течений идеальной жидкости при движении в ней нескольких тел.
2. Расчёт коэффициентов присоединённых масс сферы при нестационарном движении её в идеальной жидкости вдоль твёрдой стенки, и цилиндра, движущегося между двумя параллельными стенками. Исследование возможностей применения полученных формул и обобщённого метода изображений к другим задачам.
3. Получение асимптотических решений для сил, действующих на тела в идеальной и вязкой жидкостях в областях близкого контакта с другими телами.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты, выносимые на защиту:

1. Метод изображений обобщён для расчёта течений вокруг произвольного количества цилиндров, перемещающихся в идеальной жидкости, а также течений вокруг двух сфер, двигающихся перпендикулярно линии их центров.
2. Разработанным методом рассчитаны зависимости для коэффициента присоединённой массы сферы, двигающейся возле твёрдой стенки параллельно ей, и

коэффициентов присоединённых масс цилиндра, произвольно двигающегося между двумя параллельными стенками. Показана возможность применения найденных зависимостей для описания автоколебаний свободного цилиндра, сильно загромождающего поток в прямоугольном канале. Указан способ использования обобщённого метода изображений для расчёта нестационарного течения жидкости вокруг нескольких цилиндров внутри угла и между двумя стенками.

3. Найдены асимптотики для сил, действующих на тела в идеальной или вязкой жидкостях при сближении с другими телами вплоть до контакта. Сделано сравнение с некоторыми решениями, найденными другими методами.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов обусловлена многочисленными сравнениями рассчитанных зависимостей в частных случаях с решениями, полученными другими известными методами, а так же с результатами экспериментов.

Практическое значение. Разработанные методы могут использоваться для нахождения течений идеальной жидкости при движении в ней произвольного количества сфер или цилиндров, и для нахождения асимптотических значений для сил, действующих на тела, двигающиеся вблизи других тел в идеальной и вязкой жидкостях.

Полученные решения (как численные так и асимптотические) могут использоваться для моделирования ряда технологических процессов. Благодаря простоте результатов и их вывода асимптотические решения могут найти применение как в инженерных расчётах, так и в теории построения соответствующих численных схем для их тестирования.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования представлялись и обсуждались на следующих научных конференциях: XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии, физические секции (2007); XXI Международная научная конференция Математические Методы в Технике и Технологиях - ММТТ-21 (Саратов, 2008); X

Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011); Коллоквиум Динамика Жидкостей (Прага, 2011).

Результаты работы докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры гидромеханики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова и МИАН им. В.А. Стеклова под руководством академика А.Г. Куликовского, профессора В.П. Карликова и член-корр. О.Э. Мельника 26 октября 2011 г.

Публикации и личный вклад автора. Основное содержание и результаты диссертационного исследования изложены в десяти работах [1-10], в том числе в шести журналах [1,4,5,8,9,10], рекомендованных ВАК. Работы [2,5,6,7,8,9] выполнены соискателем лично. В работах [1,3,4,10], написанных в соавторстве, автору диссертации принадлежит постановка задачи, вывод основных соотношений и построение алгоритмов решения. Все положения, вынесенные на защиту, получены автором самостоятельно.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка цитируемой литературы (80 наименований), списка публикаций соискателя (10 наименований). Общий объём диссертации 108 страниц, включая 64 рисунка и 4 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обсуждается актуальность темы диссертации, основные цели и направления исследований, указана научная и практическая ценность работы.

Представлен обзор литературы, посвящённый течениям идеальной жидкости при движении в ней сфер и цилиндров. Приведены известные решения начиная с первых работ (Hicks W.M., 1880; Basset A.B., 1887), в которых решается задача о движении двух сфер, а также работ, в которых исследуется предельный случай обтекания сферы, при расстоянии до другой сферы или стенки стремящемся к нулю (Small R.D., Weihs D., 1975; Cox S.J., Cooker M.J., 2000). Указаны решения, найденные для различных расстояний между двумя сферами или цилиндрами (Weihs D., Small R.D., 1975; Jeffrey D.J., Chen H.-S., 1977; Crowdy D.G., Surana A., Yick K.-Y., 2007).

Обсуждаются возможности получения асимптотических решений для сил, действующих на тела,двигающиеся в вязкой и идеальной жидкостях в присутствии других тел, как для больших так и для малых расстояний между движущимися телами. Приведены известные решения для вязкой жидкости, в случае малых расстояний между обтекаемыми сферическими или цилиндрическими телами (Keller J.B., 1963; Batchelor G.K., 2002, упражнение 1 в конце параграфа 4.8; Bungay P.M., Brenner H., 1973) и для идеальной жидкости, где расстояния между обтекаемыми сферическими телами велики (Stokes G.G., 1843; Basset A.B., 1887). Указаны экспериментальные работы, подтверждающие некоторые асимптотические решения (Christopherson D.G., Dowson D., 1959; Kirsch A.A., Fuchs N.A., 1967).

Отмечены публикации, посвящённые экспериментальному и теоретическому исследованию явления автоколебаний свободно подвешенных тел, сильно загромождающих поток в трубах и каналах (Молодых О.В., Степанов Г.Ю., 2004; Карликов В.П., Толоконников С.Л., 2004; Карликов В.П., Хомяков А.Н., Шоломович Г.И., 2005). Обсуждается возможность моделирования указанных явлений в рамках модели идеальной жидкости.

На основе обзора литературы сделан вывод, что проблема расчёта течения идеальной жидкости вокруг более чем двух тел для любых расстояний между телами исследована недостаточно. Решения с обтеканием решёток верны лишь для фиксированных расстояний между элементами решёток. Решения для обтекания более чем двух цилиндров, произвольно двигающихся в идеальной жидкости, являются весьма сложными математически.

Асимптотические методы расчёта сил, действующих на тела,двигающиеся в идеальной жидкости, известны лишь для больших расстояний между телами. Для вязкой жидкости известен метод получения асимптотических решений только при малых расстояниях и найденные решения немногочисленны.

В **Главе 1** представлен новый алгоритм построения последовательности диполей в методе изображений, позволяющий рассчитывать двумерные нестационарные течения вокруг **нескольких произвольно двигающихся параллельных круговых цилиндров** в безграничном объёме идеальной жидкости. Этот алгоритм является обобщением классического метода изображений, применявшегося ранее лишь для

расчёта течения вокруг двух движущихся цилиндров. Основная трудность применения метода изображений для расчёта течения вокруг более чем двух цилиндров заключается в том, что любой диполь, добавляемый к течению, одновременно изменяет граничные условия более чем на двух цилиндрах, и построение решения в виде последовательности отдельных диполей становится невозможным.

В отличие от классического метода изображений в обобщённом методе решение представляется бесконечной последовательностью **групп диполей**. Первую группу составляют диполи, находящиеся в центрах цилиндров и соответствующие движению каждого цилиндра в безграничной жидкости. При движении в жидкости m цилиндров первая группа содержит m диполей с потенциалами

$$\varphi_i(\vec{r}) = -\frac{a_i^2 \vec{V}_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

где a_i - радиусы цилиндров, \vec{V}_i - их скорости, \vec{r}_i - радиус векторы их центров.

Изображением точечного диполя в цилиндре является другой точечный диполь. Для каждого цилиндра во вторую группу входят изображения в этом цилиндре всех диполей первой группы, которые лежат вне этого цилиндра (см. рис. 1). Таким образом, вторая группа содержит $m(m-1)$ диполей.

Для удобства записи вводится оператор изображения в i -том цилиндре - A_i . Тогда потенциалы диполей второй группы запишутся

$$\varphi_{ij} = A_i(\varphi_j), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

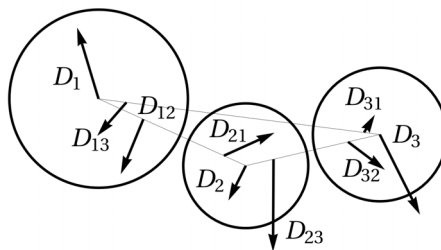


Рисунок 1. Первая D_i и вторая D_{ij} группы диполей при количестве цилиндров m равном 3. Диполи обозначены стрелками, их длины пропорциональны мощности диполей (длины стрелок второй группы для удобства увеличены в пять раз).

В третью группу входят изображения в каждом цилиндре диполей второй группы. Таким образом, третья группа будет содержать $m(m-1)^2$ диполей. Потенциалы диполей третьей группы запишутся

$$\varphi_{ijk} = A_i(A_j(\varphi_k)), \quad 1 \leq i, j, k \leq m$$

Последующие группы строятся аналогично. Для практических расчётов необходимо ограничиться n изображениями, содержащими конечное количество диполей. Потенциал течения представляется суммой потенциалов всех моделирующих диполей:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i + \sum_{i,j} \varphi_{ij} + \sum_{i,j,k} \varphi_{ijk} + \dots$$

В отличие от классического метода изображений, где каждый последующий диполь, являющийся изображением предыдущего, обеспечивает точное удовлетворение граничных условий попеременно на одном из цилиндров, в обобщённом методе изображений это невозможно, граничные условия не выполняются ни на каком цилиндре, и при добавлении изображений происходит приближение к ним.

Кинетическая энергия жидкости рассчитывается как интеграл по поверхностям цилиндров

$$2T = \rho_f \sum_{i=1}^m \oint_i \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl,$$

где $\partial \varphi / \partial n$ - производная потенциала в направлении нормали к поверхности цилиндра. На поверхности i -го цилиндра $(\partial \varphi / \partial n)_i = V_i \cos(\vartheta)$, где ϑ - угол между вектором скорости цилиндра и вектором, направленным из центра цилиндра в точку интегрирования. Интеграл был вычислен аналитически и для него была получена новая простая формула, представляющая кинетическую энергию в виде суммы по всем моделирующим диполям.

В стационарном случае линии тока, полученные обобщённым методом изображений и, Crowdy D. (2006) совпадают (рис. 2 слева). В нестационарном случае при трёх движущихся и одном неподвижном цилиндре (рис. 2 справа) вид векторных линий скорости жидкости в некоторый фиксированный момент времени так же совпадает с полученным Finn M.D. et al. (2003). В отличие от методов, применяемых

Crowdy и Finn, предложенная в диссертации схема использует существенно более простой алгоритм, который основывается на классическом методе, и, поэтому, более проста в понимании и применении.

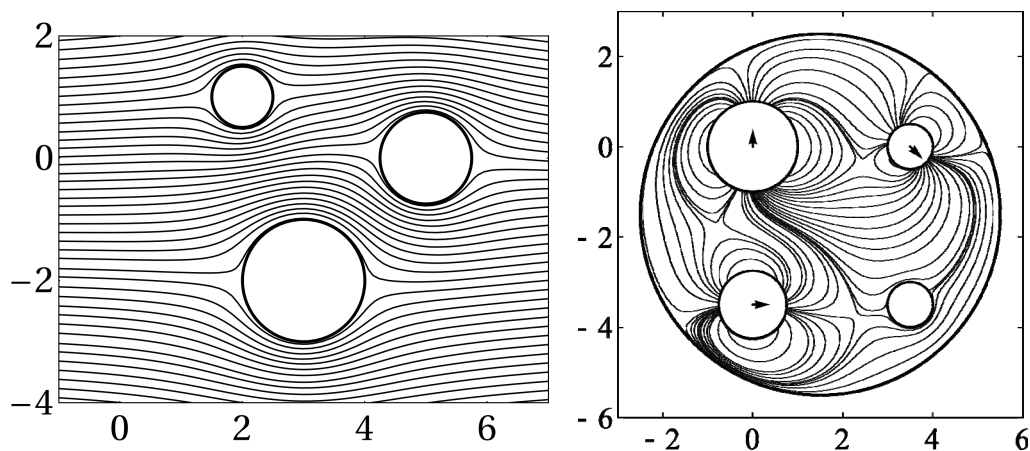


Рисунок 2. Течение идеальной жидкости вокруг 3-х неподвижных цилиндров (левый рисунок) и вокруг 3-х движущихся и одного неподвижного цилиндров внутри неподвижного цилиндра в некоторый момент времени (правый рисунок).

В этой же главе излагается способ обобщения метода изображений для расчёта течения идеальной жидкости вокруг **двух сфер, двигающихся перпендикулярно линии центров**. Известный метод изображений является неприменимым для решения этой задачи.

Изображением точечного диполя в сфере в этом случае является точечный диполь в точке инверсии и непрерывное распределение диполей между точкой инверсии и центром сферы. Наличие непрерывного распределения диполей в изображении явилось для Хикса (Hicks W.M., 1880) непреодолимым препятствием для получения аналитического решения для сфер, двигающихся параллельно линии центров. В работе Воинова О.В. (1969) решение представлено в виде рядов с многократным использованием интегрального оператора изображения, действующего на диполь.

В диссертационной работе непрерывное распределение диполей заменяется дискретным набором k точечных диполей, см. рис. 3, с последующим построением дальнейших изображений. Течение от такого набора точечных диполей достаточно быстро при $k \rightarrow \infty$ становится эквивалентным течению от непрерывного распределения.

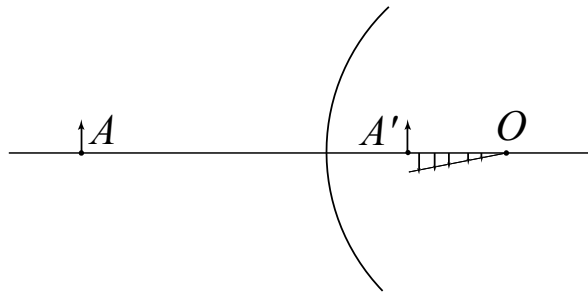


Рисунок 3. Диполь A и его изображение – диполь в точке инверсии A' и непрерывное распределение диполей от точки инверсии до центра сферы O . Непрерывное распределение заменено дискретным набором точечных диполей.

Решение задачи представляется сходящейся последовательностью изображений, при этом первое изображение ($n=1$) содержит два диполя, второе изображение ($n=2$) содержит $2(k+1)$ диполя, n -е – $2(k+1)^{n-1}$ диполей. Для численного решения берутся первые n изображений, при этом при одновременном увеличении чисел n и k численное решение приближается к точному.

Кинетическая энергия жидкости определяется, как указано выше, интегралом по поверхности сфер. Он находится аналитически для каждого диполя, моделирующего течение, и кинетическая энергия представляется суммой по всем диполям.

В Главе 2 обобщённый метод изображений применяется для расчёта коэффициентов присоединённых масс цилиндра, произвольно движущегося между двумя параллельными стенками.

Течение вокруг цилиндра, двигающегося между двумя стенками, совпадает с течением вокруг одного из цилиндров в двойной бесконечной решётке цилиндров. Для расчётов используется конечное (m) количество цилиндров, причём течение вокруг центрального цилиндра наиболее приближено к течению вокруг цилиндра, движущегося между двумя стенками. Задача нахождения коэффициентов присоединённых масс разбивается на две подзадачи – о движении цилиндра параллельно и перпендикулярно стенкам. Коэффициенты присоединённых масс C_{mi} ($i=1,2$) находятся как функции безразмерных расстояний до стенок для различных чисел m и n . Число n обозначает количество рассматриваемых изображений. Для ускорения сходимости двойной последовательности используется метод Шенкса.

При движении цилиндра перпендикулярно стенкам метод позволяет получить решение с относительной погрешностью порядка 1% даже для предельного случая стремления расстояния до стенок к нулю. В этом случае показано, что предельное значение коэффициента присоединённой массы

$$C_{m1} = 3.26 \pm 0.04 .$$

Производится анализ сходимости решения как в зависимости от количества изображений n и количества моделирующих цилиндров m , так и в зависимости от расстояния между цилиндром и стенками. Уже при небольшом расстоянии между цилиндром и стенками метод позволяет достигнуть точности, достаточной для практических расчётов при моделировании экспериментально наблюдаемых автоколебаний цилиндра между двумя стенками (Карликов В.П., Хомяков А.Н., Шоломович Г.И. 2005). На основании рассчитанных данных были впервые получены аппроксимационные формулы для коэффициентов присоединённых масс при движении как параллельно так и перпендикулярно стенкам, верные для любых расстояний до стенок. Зависимости коэффициентов присоединённых масс от безразмерных расстояний до стенок $\bar{b} = b/a$, $\bar{c} = c/a$ (a - радиус цилиндра) представлены на рис. 4.

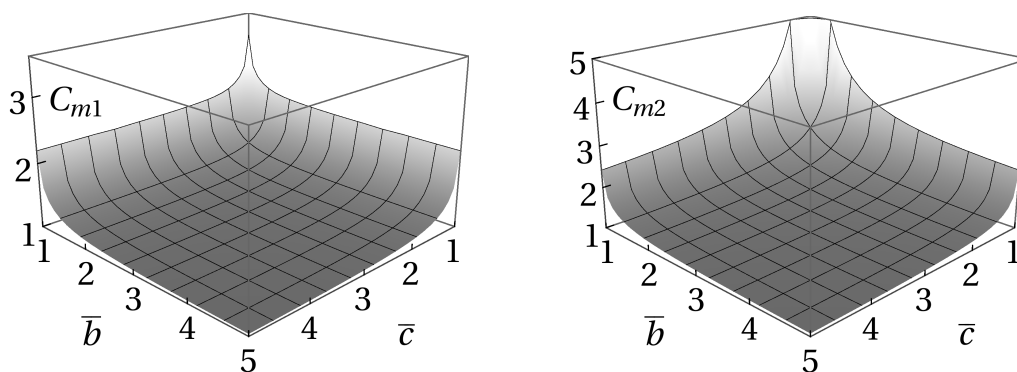


Рисунок 4. Коэффициенты присоединённых масс цилиндра при его движении перпендикулярно (левый рисунок) и параллельно (правый рисунок) стенкам в зависимости от безразмерных расстояний до стенок.

В предельном случае одной стенки найденное решение совпадает с известным решением Мазура В.Ю. (1966), найденным другим методом, что подтверждает надёжность обобщённого метода. Задача о стационарном обтекании асимметрично расположенного неподвижного цилиндра между двумя стенками была решена

численно автором методом граничных элементов. Найденное решение совпадает с решением, полученным обобщённым методом изображений, и также свидетельствует об эффективности использованного этого метода.

Методом изображений по предложенной схеме была получена также зависимость **коэффициента присоединённой массы сферы, движущейся параллельно стенке.** На основании этих данных была впервые получена аппроксимационная формула, действительная для любого расстояния до стенки. Известные из литературы приближения (Stokes G.G., 1843; Yang F.-L., 2006) верны лишь для больших расстояний.

Коэффициент присоединённой массы представляется суммой по всем диполям и находится численно как функция расстояния до стенки для различных значений n и k , где n обозначает количество рассматриваемых изображений, а k - количество дискретных диполей, заменяющих их непрерывное распределение. Для ускорения сходимости получаемой таким образом двойной последовательности используется метод Шенкса (Shanks D., 1955).

Рассчитанные зависимости для коэффициента присоединённых масс сферы C_{m2} при её движении параллельно стенке а также коэффициента C_{m1} для перпендикулярного движения к ней (Hicks W.M., 1880) были аппроксимированы (рис. 5) с высокой точностью простыми формулами, верными вплоть до предельного случая близости к стенке. Эти формулы удобны для расчёта движения сферы возле стенки.

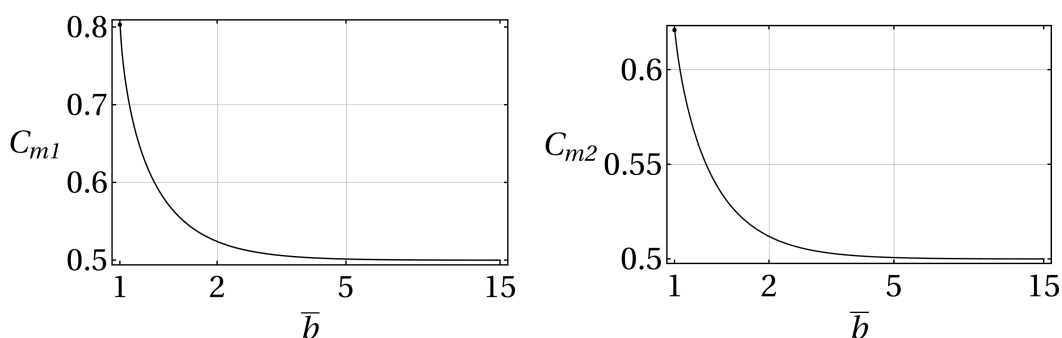


Рисунок 5. Коэффициенты присоединённых масс при движении сферы перпендикулярно, C_{m1} (левый рисунок), и параллельно, C_{m2} (правый рисунок), стенке. Точками обозначены предельные значения коэффициентов в случае стремления расстояния от сферы до стенки к нулю.

В диссертации были также получены аппроксимационные формулы для коэффициентов присоединённых масс для двух равных сфер,двигающихся произвольно в безграничном объёме идеальной жидкости.

В этой же главе представлено возможное применение рассчитанных коэффициентов присоединённых масс для **описания автоколебаний свободного кругового цилиндра, сильно загромождающего поток в прямоугольном канале.** Экспериментальное исследование указанных автоколебаний проведено в работе Карликова В.П., Хомякова А.Н., Шоломовича Г.И. (2005).

В отличие от модели Молодых О.В. и Степанова Г.Ю. (2004), предложенная в диссертации приближённая модель строится в рамках безотрывного обтекания цилиндра, что позволяет использовать рассчитанные зависимости коэффициентов присоединённых масс цилиндра между двумя стенками. Уравнения в форме Лагранжа получаются из кинетической энергии системы, выраженной через эти коэффициенты.

Сравнение экспериментальной и рассчитанной зависимостей числа Струхалия $Sh = fD/V_0$ (f - частота автоколебаний, D - диаметр цилиндра, V_0 - скорость набегающего потока) от безразмерной ширины зазора между каналом и цилиндром $\bar{\delta} = \delta/D$ представлено на рис. 6. В рамках модели зависимость числа Струхалия от числа Рейнольдса $Re = V_0D/\nu$ отсутствует (ν - кинематическая вязкость). Графики соответствуют значениям отношений плотностей: (a) - $\rho/\rho_f = 1.29$, (b) - $\rho/\rho_f = 8.2$. Сплошными линиями обозначены результаты расчётов, штриховой линией – экспериментальные кривые при $Re = 1.5 \cdot 10^4$, штрих пунктирной линией – экспериментальные кривые при $Re = 7.2 \cdot 10^4$.

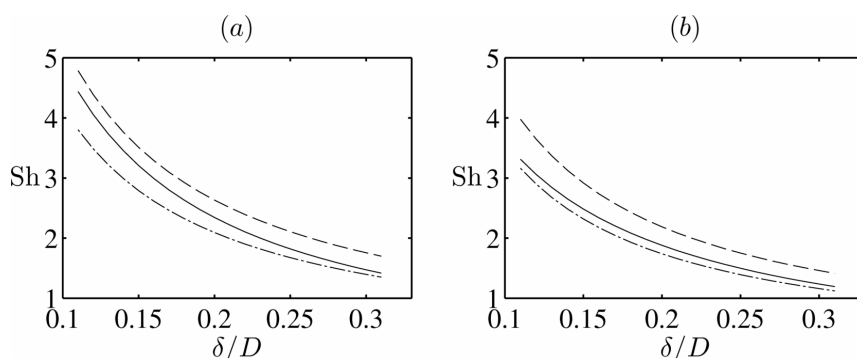


Рисунок 6. Сравнение экспериментальной (штриховая и штрих пунктирная линии) и расчётной (сплошная линия) зависимостей для числа Струхалия.

Далее в главе описано применение обобщённого метода изображений для нахождения поля скоростей течения и коэффициентов присоединённых масс **нескольких цилиндров, движущихся внутри угла, в прямоугольной области или между двумя стенками.** Если при движении в безграничной жидкости нескольких цилиндров в поле скоростей присутствуют две плоскости симметрии, то часть этого течения оказывается совпадающей с течением вокруг нескольких цилиндров внутри угла.

Показано, что обобщённый метод позволяет находить течения вокруг цилиндров внутри угла, если величина угла составляет π/n , где n - целое (см. рис. 7 слева). Если же цилиндры находятся на биссектрисе угла, и их скорости направлены вдоль неё, то угол может составлять $2\pi/n$ (см. средний рис. 7).

Течение вокруг нескольких цилиндров, движущихся между двух стенок, приближённо совпадает с течением вокруг этих цилиндров, расположенных между двумя неподвижными цилиндрами, если радиусы последних достаточно велики (см. рис. 7 справа). Однако, для нахождения коэффициентов присоединённых масс рассмотренный выше метод предпочтительней с точки зрения сходимости и точности вычислений.

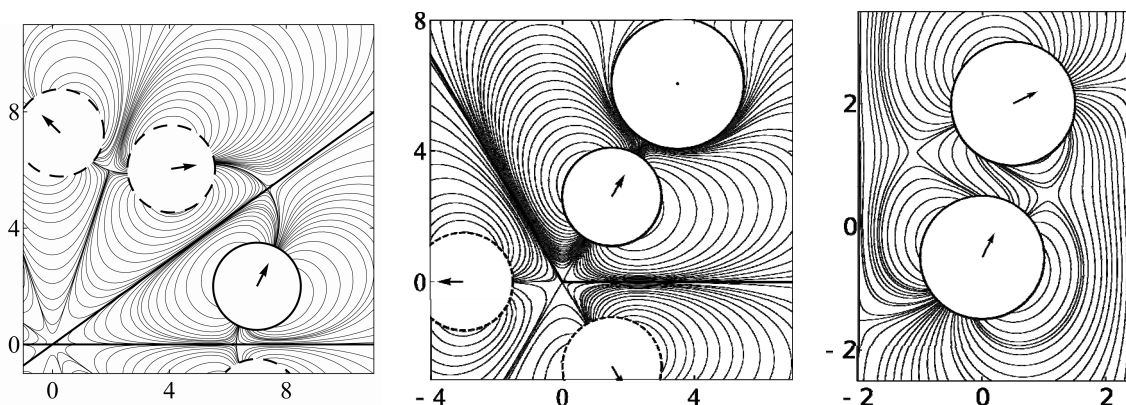


Рисунок 7. Нестационарное течение в некоторый момент времени идеальной жидкости вокруг цилиндра, движущегося внутри угла $\pi/5$ (левый рисунок), вокруг движущегося и неподвижного цилиндров на биссектрисе угла $2\pi/3$ (средний рисунок) и вокруг двух движущихся между двумя стенками цилиндров (правый рисунок).

В Главе 3 найдены выражения для асимптотических значений сил, действующих на тела,двигающиеся вблизи других тел в идеальной или вязкой жидкостях. Асимптотические решения отличаются простотой как вывода, так и результата и позволяют получать более общие решения, неизвестные ранее.

Силы, действующие на тела,двигающиеся в вязкой жидкости были найдены в рамках теории смазочного слоя. Метод нахождения сил, действующих на тела в идеальной жидкости представлен впервые. В обоих случаях метод основан на предположении, что если расстояния между границами тел,двигающимися в жидкости, стремятся к нулю, то главные асимптотики сил, действующих на эти тела, определяются течением жидкости в окрестности контакта. Полученные решения сравниваются с известными частными решениями.

Полученные асимптотические решения в зависимости от случая справедливы при минимальной ширине зазора между телами $h_0 < (0.001 \div 0.1)a$, где a - характерный

размер тела. Решения приближения смазочного слоя верны при $Re = \frac{h|\dot{h}_0|}{\nu} \ll 1$, где ν - кинематическая вязкость. Решения в рамках теории идеальной жидкости соответствуют большим числам Рейнольдса $Re \gg 1$. Необходимо отметить, что точное решение уравнений Навье-Стокса в слое жидкости между двумя движущимися параллельно пластинками (Петров А.Г., 2012) при $Re > 100$ переходит в решение, полученное в рамках теории идеальной жидкости, а при $Re < 0.1$ в решение, полученное в рамках теории смазочного слоя. Этот результат подтверждает применимость предлагаемых асимптотических методов и позволяет оценить диапазоны их применимости.

Построены новые асимптотические решения для сил гидродинамического взаимодействия цилиндров и сфер,двигающиеся в вязкой жидкости при $Re \ll 1$ в следующих конфигурациях:

- Обтекание вязкой жидкостью цилиндра, произвольно движущегося в канале, при малых зазорах между цилиндром и стенками канала. Сила сопротивления, действующая на цилиндр вдоль направления течения, имеет асимптотику

$$F = 18\sqrt{2}\pi\mu \frac{a^{5/2}}{h_{01}^{5/2} + h_{02}^{5/2}}(V_0 - V), \text{ где } \mu - \text{ динамическая вязкость, } a - \text{ радиус}$$

цилиндра, h_{01}, h_{02} - расстояния до стенок, V_0 - скорость течения, V - проекция скорости цилиндра на направление течения. Остальные результаты, полученные в этой главе, имеют такой же простой вид.

- Произвольное движение двух расширяющихся параллельных цилиндров на малом расстоянии друг от друга. В частном случае движения цилиндра перпендикулярно стенке решение согласуется с полуаналитическим решением Keh H.J., Wang L.R. (2008), см. рис. 8 слева.
- Произвольное движение двух расширяющихся сфер на малом расстоянии друг от друга. В частном случае сфер постоянного радиуса решение совпадает с приведённым в монографии Batchelor G.K. (2002).
- Произвольное движение сферы между двумя стенками. В частном случае движения сферы перпендикулярно стенке, решение согласуется с Batchelor G.K. (2002). В частном случае движения вращающейся сферы параллельно стенке решение согласуется с приведённым Прокуниным А.Н. (2003).
- Вращение двух сфер вокруг общей оси. В частном случае вращения сферы у стенки решение согласуется с решением Jeffery G.B. (1915), см. рис. 8 справа.

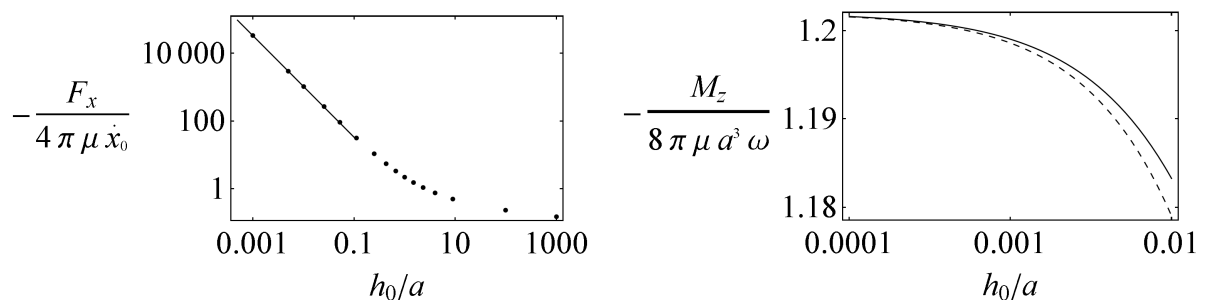


Рисунок 8. Безразмерная сила F_x , действующая на цилиндр,двигающийся к стенке со скоростью \dot{x}_0 (левый рисунок). Безразмерный момент M_z , действующий на сферу с радиусом a , вращающуюся с угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной стенке оси, (правый рисунок). Асимптотические решения обозначены сплошными линиями; точками и штриховой линией обозначены точные решения.

Впервые были найдены асимптотические решения для цилиндров и сфер,двигающихся в идеальной жидкости в следующих конфигурациях:

- Движение вдоль линии центров двух расширяющихся цилиндров на малом расстоянии друг от друга.
- Движение вдоль линии центров двух цилиндров. Получены выражения для коэффициентов присоединённых масс вплоть до предельного случая контакта. Сравнение коэффициентов присоединённых масс с решением Мазура В.Ю. (1970) при конечных расстояниях (рис. 9) показывает незначительное отличие.
 - Движение цилиндра перпендикулярно стенке вплоть до контакта.
 - Движение цилиндра между двумя стенками перпендикулярно им. Проведено сравнение с решением, полученным в Главе 2 обобщённым методом изображений, см. рис. 10 слева.
 - Расширение двух цилиндров с неподвижными центрами.
 - Расширение цилиндра у стенки. Проведено сравнение с аналитическим решением, полученным Воиновым О.В., Гуревичем М.И. (1974).
- Движение цилиндра между двумя стенками параллельно им. Сравнение с решением, полученным в Главе 2 обобщённым методом изображений, см. рис. 10 справа. Аналитически решена задача устойчивости равновесия цилиндра, свободно подвешенного в потоке в плоском канале. Показано, что равновесие цилиндра неустойчиво.
- Обтекание в канале потоком жидкости с плотностью ρ и средней скоростью V цилиндра с радиусом a , касающегося без протекания одной стенки и находящегося на малом расстоянии до другой. Сравнение решения для безразмерной циркуляции Γ/Γ_0 (Γ_0 - циркуляция при удалении второй стенки на бесконечность) с решением, полученным автором методом граничных элементов, см. рис. 11 слева. Сравнение решения для силы F_x , действующей на цилиндр, с решением Карликова В.П., Толоконникова С.Л. (2004), см. рис. 11 справа.
- Движение двух расширяющихся сфер вдоль линии центров на малом расстоянии друг от друга.

- Движение двух сфер вдоль линии центров. Сравнение решения для коэффициентов присоединённых масс с решением Hicks W.M. (1880), см. рис. 12.
 - Движение сферы перпендикулярно стенке.
 - Движение сферы между двумя стенками перпендикулярно им.
- Расширение двух сфер.
 - Расширение сферы у стенки.
- Движение сферы в круглом цилиндрическом канале параллельно оси при малом зазоре между каналом и сферой. Показано, что как и цилиндр в центре канала, сфера находится в состоянии неустойчивого равновесия.

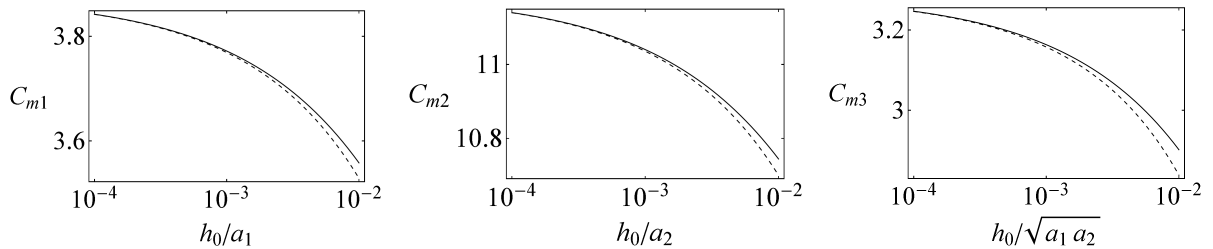


Рисунок 9. Коэффициенты присоединённых масс двух цилиндров, движущихся вдоль линии центров. Сравнение асимптотического (штриховая линия) и точного (сплошная линия) решений.

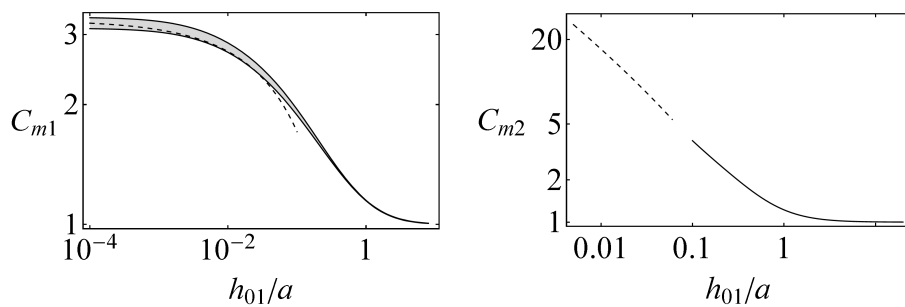


Рисунок 10. Коэффициенты присоединённых масс цилиндра, расположенного в канале асимметрично, $h_{01} = 3h_{02}$, и движущегося перпендикулярно (левый рисунок) и параллельно (правый рисунок) стенкам. Сравнение асимптотического решения (штриховая линия) и численного (сплошная линия, серая область с учётом погрешности вычислений).

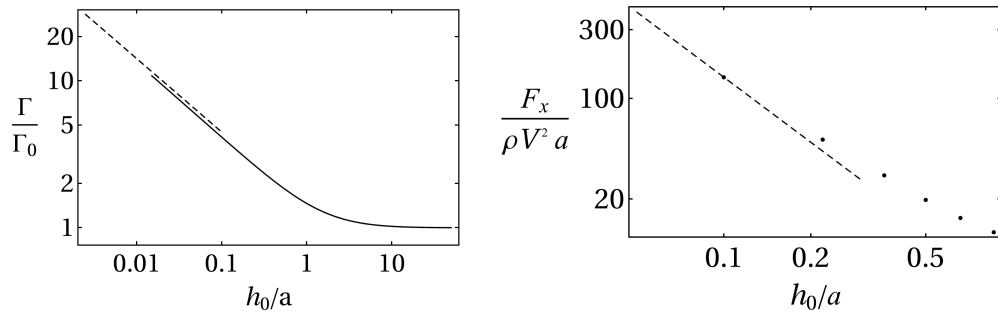


Рисунок 11. Циркуляция (левый рисунок) вокруг цилиндра, касающегося одной из стенок в канале, и действующая на него сила (правый рисунок) в зависимости от безразмерного зазора между цилиндром и другой стенкой. Сравнение асимптотического решения (штриховая линия) и точного (сплошная линия, точки).

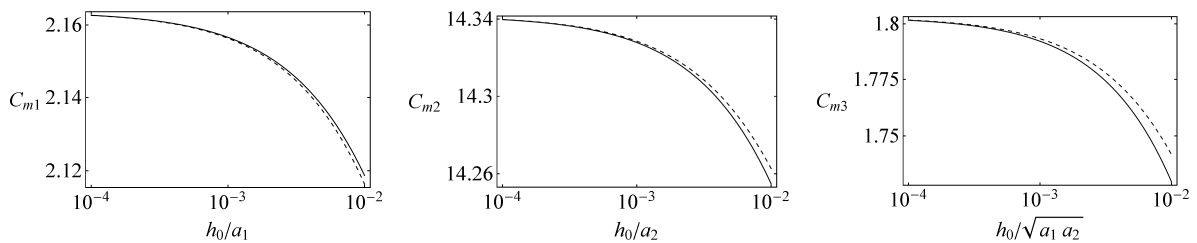


Рисунок 12. Коэффициенты присоединённых масс сферы около стенки, сравнение асимптотического (штриховая линия) и точного (сплошная линия) решений.

В **Заключении** к диссертации сформулированы основные результаты и выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Обобщён классический метод изображений, применявшийся ранее лишь для решения плоской задачи о нестационарном обтекании идеальной жидкостью двух произвольнодвигающихся круговых цилиндров или пространственной задачи о движении вдоль линии центров двух сфер. Обобщённый метод изображений позволяет рассчитывать течения вокруг двух сфер,двигающихся перпендикулярно линии центров, а в случае плоской задачи нестационарные течения вокруг более чем двух цилиндров,двигающихся в идеальной жидкости.
2. При помощи разработанного метода получена простая приближённая формула для зависимости коэффициента присоединённой массы сферы,двигающейся

параллельно стенке, от безразмерного расстояния до неё. Обобщённым методом рассчитаны зависимости коэффициентов присоединённых масс цилиндра, произвольнодвигающегося между двумя стенками. Получены приближённые формулы для коэффициентов присоединённых масс в зависимости от безразмерных расстояний до обеих стенок. Показано возможное применение рассчитанных зависимостей при описании автоколебаний свободного кругового цилиндра, сильнозагромождающего поток в плоском канале. Предложен способ использования обобщённого метода изображений для расчёта нестационарного течения жидкости вокруг нескольких цилиндров, движущихся внутри угла, между двумя стенками, а также в прямоугольной ячейке.

3. Получены многочисленные асимптотические решения для сил, коэффициентов присоединённых масс, циркуляции и давления, возникающих при движении и обтекании сфер и цилиндров на близком расстоянии от других сфер, цилиндров и стенок, в случаях больших и малых чисел Рейнольдса. Проведено сравнение этих решений с точными решениями и с полученными автором обобщённым методом изображений или методом граничных элементов.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. ***Kharlamov A.A., Chara Z., Vlasak P. Hydraulic formulae for the added masses of an impermeable sphere moving near a plane wall // J. Eng. Math. 2007. V. 62. P. 161-172***
2. *Харламов А.А. Присоединённая масса сферы, двигающейся в идеальной несжимаемой жидкости вблизи стены // Тезисы XLII Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии. Физические секции. 21-25 апреля 2008. Изд. РУДН. С. 45*
3. *Kharlamov A.A., Chara Z., Vlasak P. Kinetic energy of ideal incompressible fluid flowing past two equal spheres // Сборник трудов XXI Международной научной конференции Математические Методы в Технике и Технологиях - ММТТ-21. Том 3. 27-30 мая 2008. С. 6-9*

4. ***Kharlamov A.A., Chára Z., Vlasák P.* Energy of inviscid incompressible fluid flowing past two equal spheres // *Acta Technica.* 2009. V. 54. P. 35-47**
5. ***Харламов А.А.* О возможности моделирования поперечных автоколебаний свободного кругового цилиндра сильно загромождающего поток в плоском канале // *Вестн. МГУ. Мат. Мех.* 2010. № 3. С. 60-63**
6. *Харламов А.А.* Движение кругового цилиндра в идеальной жидкости между двумя параллельными стенками // Тезисы X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Секция II. Механика жидкости и газа. 24-30 августа 2011
7. *Kharlamov A.A.* On a generalized images method for calculation of inviscid potential flow past several arbitrary moving cylinders // Book of Abstracts. Colloquium Fluid Dynamics. 19-21 октября 2011
8. ***Харламов А.А.* Коэффициенты присоединенных масс кругового цилиндра, движущегося в идеальной жидкости между параллельными стенками // *ПММ.* 2012. № 76. С. 140-146**
9. ***Харламов А.А.* Моделирование поперечных автоколебаний кругового цилиндра, обтекаемого несжимаемой жидкостью в плоском канале при наличии циркуляции // *ПМТФ.* 2012. № 53. С. 1-6**
10. ***Kharlamov A.A., Filip P.* Generalisation of the images method for calculation of inviscid potential flow past several arbitrarily moving parallel circular cylinders // *J. Eng. Math.,* online first, DOI 10.1007/s10665-012-9532-6**