МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи
УДК 515.168.3, 517.938.5

Скрипченко Александра Сергеевна

Системы наложений отрезков в приложении к слоениям и динамическим системам.

Специальность:
01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2012

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «МГУ имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Иван Алексеевич Дынников
Официальные оппоненты:	Евгений Викторович Жужома доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина», профессор)
	Владлен Анатольевич Тиморин доктор физико-математических наук, (ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», профессор)
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Защита диссертации состоится 14 декабря 2012 года в 16:45 на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 14 ноября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Актуальность темы.

Диссертационная работа посвящена изучению систем наложений отрезков и их приложений к задаче С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3-периодических поверхностей, которая была сформулирована Новиковым[1] в 1982 году в связи с изучением теории проводимости монокристаллов в магнитном поле.

Поверхность в $\mathbb{R}^3$ называется *3-периодической*, если она инвариантна относительно сдвигов на вектора некоторой целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3$. В задаче Новикова рассматриваемая поверхность является $\mathbb{Z}^3$ - накрывающей ферми-поверхности, поэтому должна быть поверхностью уровня некоторой гладкой 3-периодической функции. Предметом исследования является асимптотическое поведение неограниченных компонент, если таковые имеются, плоских сечений этой поверхности плоскостями определенного направления. С точки зрения физики, речь идет о полуклассическом движении электрона в металле при наличии однородного магнитного поля: направление плоскостей сечения определяется направлением магнитного поля, а сама поверхность, как уже было сказано, является поверхностью Ферми металла. Исследования Новикова в этой области продолжают работу научной школы И.М.Лифшица[2].

Поставленная задача эквивалентна задаче об устройстве слоев слоения, заданного с помощью формы $H_1dx^1 + H_2dx^2 + H_3dx^3$, где

$$H_1x^1 + H_2x^2 + H_3x^3 = const$$

— семейство параллельных плоскостей, которыми мы сечем нашу поверхность, на $\mathbb{Z}^3$ - проекции рассматриваемой 3-периодической поверхности (то есть на поверхности уровня некоторой гладкой функции в трехмерном торе).

Первые результаты были получены А. В. Зоричем[3] в 1984 году и И. А. Дынниковым[4,5,6] в начале 90-х годов. В частности, было доказано, что обычно плоские сечения 3-периодических поверхностей либо состоят

[1]С. П. Новиков, *Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса*, УМН, 37:5 (1982), 3–49.

[2]Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И, *Электронная теория металлов*//Наука. 1971.

[3]Зорич А. В., *Задача С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона в однородном магнитном поле, близком к рациональному*, УМН, 39:5 (1984), 235–236.

[4]Дынников И. А., *Доказательство гипотезы С. П. Новикова для случая малых возмущений рациональных магнитных полей*, УМН, 47:3 (1992), 161–162.

[5]Дынников И. А., *Задача С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона*, УМН, 48:2 (1993), 179–180.

[6]Дынников И. А., *Доказательство гипотезы С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона*, Мат. заметки, 53:5 (1993), 57–68.

только из компактных компонент (*тривиальный случай*), либо содержат неограниченные компоненты, каждая из которых представляет из себя прямую линию, возмущенную конечной деформацией (*интегрируемый случай*). С. П. Царев построил первый пример, когда это свойство не выполняется: неограниченные компоненты, хотя и имели асимптотическое направление, не содержались в полосе конечной ширины. Пример Царева, впрочем, не обладал необходимой общностью - коэффициенты, задающие направление плоскости, не были полностью несоизмеримы над полем рациональных чисел. Впоследствии такие траектории были названы *слабо хаотическими*. В 1997 году Дынников[7] показал, что возможен еще один - *хаотический* - случай, когда неограниченные компоненты соответствующих сечений не имеют выраженного асимптотического направления, а

$$dim_{\mathbb{Q}}\langle H_1, H_2, H_3\rangle = 3. \tag{1}$$

Таким образом, как было доказано в работах Зорича и Дынникова, при выполнении условия (1) возможно три принципиально разных варианта устройства слоев рассматриваемого слоения:

- *Тривиальный случай:* все компоненты H-сечений компактны.
- *Интегрируемый случай:* слоение разбивается сепаратрисными циклами на торы с дырками и цилиндры. На торах слоение ведет себя как иррациональная обмотка, а цилиндры состоят из замкнутых слоев.
- *Хаотический случай:* слоение имеет минимальную компоненту рода $g \geq 3$.

Пример Царева является промежуточным между вторым и третьим случаем приведенной классификации.

В настоящее время все оставшиеся в задаче Новикова открытые вопросы связаны с хаотическим случаем. В частности, актуальны следующие задачи:

- построение примеров хаотических режимов, обладающих дополнительной симметрией. Как уже упоминалось, поверхность, о которой идет речь в задаче Новикова, является ферми-поверхностью некоторого металла и потому должна являться поверхностью уровня некоторой четной функции. Пример хаотического режима, постороенный Дынниковым, не обладает этим свойством. Первый соответствующий пример строится в данной диссертации.

[7]Dynnikov I. A. *Semiclassical Motion of the Electron. A Proof of the Novikov Conjecture in General Position and Counterexamples*, Solitons, Geometry and Topology: on the Crossroad //AMS Transl, Ser. 2 179 (1997), 45–73.

- исследование вопроса об асимптотическом поведении хаотических сечений, в том числе о количестве связных компонент соответствующих сечений. В диссертации для всех построенных на сегодняшний день примеров хаотических сечений показано, что почти все соотвествующие сечения состоят ровно из одной связной компоненты.

Кроме того, в 2003 году Новиковым и А. Я. Мальцевым[8] была высказана гипотеза о том, что мера множества хаотических режимов равна нулю, а хаусдорфова размерность соответствующего множества строго меньше 1. В настоящий момент в общем случае эта гипотеза не доказана.

Основным инструментом для изучения измеримых слоений на поверхностях являются перекладывания отрезков, которые возникают как отображения первого возвращения на трансверсали. Однако, все результаты, полученные в рамках исследования устройства орбит типичного перекладывания (более подробно соответствующие утверждения изложены ниже) касаются ситуации наиболее общего положения; нас же в связи с задачей Новикова интересует сильно вырожденный случай, когда поверхность имеет род не меньше 3, а у 1-формы есть всего 3 независимых интеграла.

В 2008 году Дынников[9] показал, что изучение хаотического случая можно свести к изучению обобщения перекладываний отрезков - систем наложений отрезков порядка 3.

Система наложений отрезков - это объект, который состоит из отрезка действительной оси (отрезка-носителя) и конечного набора сохраняющих ориентацию изометрий $\phi_j : A_j \to B_j$, где каждая база A_j, B_j - подотрезок отрезка-носителя. Для такой системы можно определить орбиты: две точки отрезка-носителя принадлежат одной орбите, если и только если существует некоторое слово из порождающих ϕ_j и обратных к ним, отправляющее x в y (см. рис. 1).

Термин «системы наложений отрезков» был введен в 2007 году, но интерес к подобным объектам наблюдался ранее как в теории динамических систем, где системы наложения отрезков могут быть рассмотрены как естественные обобщения перекладываний отрезков и отображений сдвигов отрезков, так и в геометрической теории групп, где изучается более общая конструкция - ленточные комплексы (вместо слоений здесь рассматриваются двойственные им ламинации, вместо одного отрезка-носителя - конечный граф). В обоих случаях предметом исследования являются вопросы устройства орбит

[8]Novikov S. P, Maltsev A. Ya, *Dynamical Systems, Topology and Conductivity in Normal Metals*, Statist. Phys., Vol.115. No 1–2 (2003), 31–46

[9]Дынников И. А., *Системы наложений отрезков и плоские сечения 3-периодических поверхностей*, Тр.МИАН, 263 (2008), 72–84

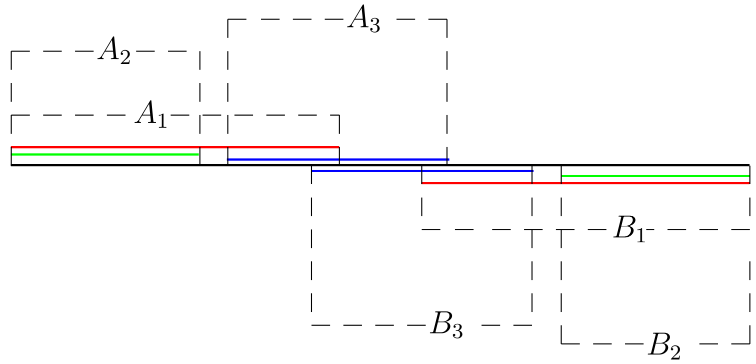

Рис. 1: Система наложений отрезков порядка 3.

рассматриваемых систем: компактные ли они или всюду плотные, насколько часто встречается ситуация, когда орбиты всех точек систем наложения отрезков являются всюду плотными, сколько топологических концов может быть у орбиты и т. д. В частности, наибольший интерес представляет ситуация, когда орбиты всех точек отрезка - носителя всюду плотны (в литературе такой случай назван «тонким»).

Упоминавшиеся ранее перекладывания отрезков, исторически возникшие раньше других аналогичных объектов, представляют собой частный случай систем наложений отрезков, в котором пересечения между входящими в наборы A_j и B_j подотрезками внутри каждого набора запрещены. В случае перекладываний отрезков, ответы на перечисленные вопросы известны. Гипотеза, сформулированная М.Кином[10] и доказанная независимо У. Вичем[11] и Г. Мазуром[12] в 70-е и 80-е годы, утверждает, что в общем случае орбиты заданного неприводимой перестановкой перекладывания всюду плотны и, более того, есть свойство строгой эргодичности - соответствующее перекладывание имеет ровно одну инвариантную меру.

Для отображений сдвигов отрезков - обобщения перекладываний, для которого отрезкам в одном из двух наборов пересекаться по-прежнему запрещено, но во втором - разрешено, - которые были описаны М. Бошерницаном и И. Корнфельдом[13] в 1995 году, картина оказывается

[10]Keane M, *Interval exchange transformations*, Math. Ztschr., Bd. 141 (1975), 25–31

[11]Veech W.A., *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. Math., Ser. 2, Vol.115, N.2 (1982), 201–242

[12]Masur H., *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. Math., Ser. 2, Vol.115, N.1 (1982), 169–200

[13]Boshernitzan M., Kornfeld I., *Interval translation mappings*, Ergod.Th.Dyn.Sys., Vol. 15

более сложной. Первый пример таких отображений, которые являются аналогом тонкого случая для систем наложений отрезков, был приведен Бошерницаном и Корнфельдом и назван «отображением сдвигов отрезка бесконечного типа». Для частных случаев таких отображений в ряде работ был доказан аналог гипотезы Новикова о том, что множество задающих их параметров имеет в общем множестве параметров меру нуль. В общем случае неизвестно, насколько часто встречаются отображения сдвигов отрезков бесконечного, или тонкого, типа.

Ленточные комплексы впервые были описаны Э. Рипсом, который использовал эту конструкцию для изучения действия конечно порожденных групп на $\mathbb{R}$-деревьях. Первый пример ленточного комплекса тонкого типа был построен Ж. Левиттом[14] в 1993 году, а термин «тонкий» происходит из работ Бествины и Фейна по теории $\mathbb{R}$-деревьев.

С точки зрения теории динамических систем, основным инструментом для изучения таких объектов, как системы наложений отрезков, является некоторый аналог индукции Раузи - алгоритма, представляющего собой применение разновидности алгоритма Евклида деления с остатком к перекладываниям отрезков, который позволяет строить системы с меньшим носителем, но эквивалентным устройством орбит. Индукция Раузи для перекладываний отрезков была описана в 1979 году Ж. Раузи[15] и является своего рода дискретизацией потока Тейхмюллера на пространстве плоских поверхностей. Аналог индукции Раузи описан также для некоторых отображений сдвигов отрезков Бошерницаном и Корнфельдом и Сузуки, Ито и Айхарой[16] для их частного случая - двойных вращений. Однако, в обеих работах рассматриваются очень специальные (маломерные) случаи отображений сдвигов отрезков.

Индукция Раузи для систем наложений отрезков в общем случае была описана Дынниковым[17]. При изучении подобных объектов в динамических системах ключевым вопросом является построение ренормализации, то есть эффективное описание динамической системы, возникающей при применении индукции Раузи. В диссертации строится требуемая ренормализация для симметричных систем наложений отрезков порядка

(1995), 821–831

[14]Levitt G., *La dynamique des pseudogroupes de rotations*, Invent. Math., Vol. 113, N.2 (1993), 633–670

[15]Rauzy G., *Exchanges d'intervalles et transformations induites*, Acta Arith., Vol.34 (1979), 315–328

[16]Suzuki H., Ito S., Aihara K., *Double rotations*, Discrete Contin. Dyn. Sys., Vol. 13 (2005), 515–532

[17]Дынников И. А., *Системы наложений отрезков и плоские сечения 3-периодических поверхностей*, Тр.МИАН, 263 (2008), 72–84

3, а также с ее помощью — пример симметричной системы наложения отрезков тонкого типа, что позволяет предъявить пример хаотического режима с дополнительной симметрией. Построенная поверхность будет поверхностью уровня четной функции. Кроме того, построенная ренормализация позволяет интерпретировать гипотезу Новикова на языке теории динамических систем и получить новое описание множества хаотических режимов — как аттрактора некоторого фрактала.

С точки зрения геометрической теории групп, наиболее естественный способом изучения систем наложения отрезков тонкого типа - это алгоритм машины Рипса, приводящий ленточный комплекс к нормальному виду и позволяющий получить классификацию ламинаций на ленточных комплексах, аналогичную приведенной классификации слоев слоения в задаче Новикова. Указанный алгоритм позволяет исследовать также вопрос о количестве топологических концов у листов соответствующей ламинации (или орбит точек). В диссертации подробно изучается применение машины Рипса к системам наложений отрезков и с использованием результатов этого исследования доказывается, что для известных примеров систем наложений порядка 3 тонкого типа (как симметричных, так и несимметричных) орбиты почти всех точек отрезка - носителя представляют из себя деревья с одним топологическим концом (более слабые утверждения для общего случая ранее были доказаны в работах Ж. Левитта и его учеников[18,19]). Следствием этого является теорема, утверждающая, что в наших примерах хаотических режимов почти каждое сечение поверхности плоскостями определенного направления состоит ровно из 1 связной компоненты.

Цель работы.

1. Изучение свойств орбит симметричных систем наложений отрезков порядка три. Построение ренормализации для случая симметричных систем наложений отрезков порядка 3.

2. Построение примера симметричной системы наложений отрезков тонкого типа и примера хаотического режима, обладающего дополнительной симметрией.

3. Исследование вопроса о числе связных компонент сечений в хаотическом случае.

[18]Gaboriau D., *Dynamique des systemes d'isometries: Sur les bouts des orbites*, Invent. math., Vol. 126 (1996), 297–318

[19]Gaboriau D.,Levitt G., Paulin F. *Pseudogroups of isometries of $\mathbb{R}$ and Rips' theorem on free actions on $\mathbb{R}$-trees*, Israel J. Math., Vol. 87, N. 1-3 (2001), 403–428

Основные методы исследования.
В диссертации используются методы:
теории слоений, теории динамических систем, геометрической теории групп и, в частности, теории $\mathbb{R}$-деревьев.

Научная новизна.
Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Изучено применение индукции Раузи к симметричным системам наложений отрезков порядка 3. В частности, построена эффективная ренормализация, - то есть доказан факт, что при применении индукции Раузи к симметричной системе порядка 3 за конечное число шагов получается либо система с конечными орбитами, либо снова симметричная система, причем описана связь между параметрами исходной и полученной системы, а также в явном виде получено выражение для необходимого для симметризации числа итераций.
2. Построен пример симметричной системы наложений отрезков порядка 3 тонкого типа и пример хаотического режима, обладающего дополнительной симметрией. Последнее означает, что в явном виде указана поверхность (являющаяся поверхностью уровня четной функции) и направление плоскости такие, что сечения поверхности плоскостями заданного направления являются хаотическими.
3. Для известных примеров систем наложений отрезков порядка три тонкого типа доказано, что почти все орбиты топологически представляют из себя бесконечные деревья с одним топологическим концом.
4. Доказано, что существует такие 3-периодическая поверхность и такой вектор, что сечения этой поверхности почти всеми плоскостями, ортогональными указанному вектору, состоят ровно из одной связной компоненты. Доказательство носит конструктивный характер: во всех известных примерах хаотических режимов, которые строятся с помошью систем наложений отрезков тонкого типа, доказывается, что почти все сечения состоят ровно из 1 связной компоненты.

Теоретическая и практическая ценность.
Диссертация имеет теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в трехмерной топологии, теории слоений, а также в теории динамических систем и геометрической теории групп.

Аппробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах:

- на научно-исследовательском семинаре «Алгебраическая геометрия и ее приложения» имени М. М. Постникова кафедры высшей геометрии и топологии МГУ под руководством руководители чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. А. В. Чернавского, проф. И. А. Дынникова, проф. Т. Е. Панова, доц. Л. А. Алании и доц. Д. В. Миллионщикова, - 2009;

- на научно-исследовательском семинаре «Геометрия, топология и математическая физика» кафедры высшей геометрии и топологии МГУ под руководством акад. РАН С. П. Новикова, чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. Б. А. Дубровина - неоднократно;

- на научно-исследовательском семинаре «Дискретная геометрия и геометрия чисел» кафедры теории чисел МГУ под руководством проф. Н. П. Долбилина, проф. Н. Г. Мощевитина, чл.-корр. РАН Е. В. Щепина, - 2012;

- на научно-исследовательском семинаре Teichmuller Theory Seminar Университета Прованса (г. Марсель, Франция), - 2010;

- на научно-исследовательском семинаре Dynamique, Arithmethique et Combinatoire Института математики Люмини (г. Марсель, Франция), - 2011;

- на научно-исследовательском семинаре Algebre, Dynamique et Topologie Лаборатории анализа, топологии и вероятности (г. Марсель, Франция), - 2011;

и на международных конференциях:

- на международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, апрель 2010;

- на международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, апрель 2011;

- на международной конференции «Geometric Group Theory», Хайфа, Израиль, июнь 2011;

- на международной конференции «Geometric Topology», Дубровник, Хорватия, июль 2011;

- на международной конференции «Александровские чтения», Москва, май 2012.

Публикации.
Результаты диссертации опубликованы в шести работах, список публикаций приведён в конце автореферата.

Структура диссертации.
Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Библиография включает 41 наименование. Общий объем диссертации 80 страниц.

Краткое содержание работы
Во **введении** изложена история вопроса, обоснована актуальность темы диссертации и сформулированы её основные результаты.

В **Главе 1** приведена формулировка задачи С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3 - периодических поверхностей и изложена физическая мотивировка этой проблемы. Кроме того, изложены основные результаты, полученные Дынниковым и Зоричем для тривиального и интегрируемого случая, в том числе сформулирована следующая теорема, описывающая поведение траекторий в тривиальном и интегрируемом случае[20,21]:

Теорема 2. *Пусть $\widehat{M}$ — 3-периодическая поверхность, являющаяся поверхностью уровня некоторой гладкой 3-периодической функции ϵ, H— вектор, задающий направление семейства плоскостей, сечения которыми поверхности мы рассматриваем. Тогда для ϵ и H, удовлетворяющим условиям общего положения, возможны только следующие две ситуации:*

1. *для любого правильного значения E функции ϵ и плоскости Π, ортогональной H и не касающейся $\widehat{M}$, незамкнутые траектории в $M \cap \Pi$, если таковые имеются, получаются конечной деформацией из периодического семейства параллельных прямых;*

2. *для почти всех E на соответствующих им $\widehat{M}$ вообще нет незамкнутых траекторий.*

Далее приводится определение хаотического сечения:

Определение 3. Сечение поверхности $\widehat{M}$ плоскостью α, ортогональной вектору H, называется *хаотическим*, если образ связной компоненты $\alpha \cap \widehat{M}$ при проекции π обматывает поверхность рода больше 1.

[20] Дынников И. А., *Задача С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона*, УМН., 48:2 (1993), 179–180.
[21] Дынников И. А., *Доказательство гипотезы С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона*, Мат. заметки, 53:5 (1993), 57–68.

Затем формулируется теорема, доказанная в 1997 году Дынниковым:

Теорема 4. *В пространстве пар (M, H), где M - гомологичная нулю поверхность в трехмерном торе $\mathbb{T}^3$, H - ковектор в $\mathbb{R}^3$, все пары, дающие хаотическое слоение F, сосредоточены на некотором подмножестве R коразмерности 1, причем образуют в нем нигде не плотное подмножество.*

Глава завершается формулировками 2 гипотез, которые в настоящее время в полной общности не доказаны. Первая из них была высказана Новиковым и Мальцевым и касается вопроса о мере множества хаотических режимов. Вторая гипотеза была сформулирована Дынниковым и утверждает, что в хаотическом случае почти каждое H-сечение состоит ровно из 1 связной компоненты, блуждающей по всей плоскости.

В первом разделе **Главы 2** вводится основной объект изучения - системы наложений отрезков, а также понятие орбиты такой системы. Формальные определения приведены ниже:

Определение 6. *Ориентированная система наложений отрезков* - это объект, включающий в себя следующий набор данных:

1. отрезок $[A, B]$ действительной оси (мы будем называть его отрезком-носителем);
2. натуральное число n (мы будем называть его порядком системы);
3. набор из n неупорядоченных пар $\{[a_i, b_i], [c_i, d_i]\}$ подотрезков отрезка $[A, B]$, в каждой из которых отрезки имеют одинаковую длину: $b_i - a_i = d_i - c_i > 0$.

Для каждой парой отрезков $\{[a_i, b_i], [c_i, d_i]\}$ из системы наложения отрезков мы рассмотрим сохраняющую ориентацию аффинную изометрию между ними и будем говорить, что точка $x \in [a_i, b_i]$ сопоставлена точке $y \in [c_i, d_i]$ (и писать $x \leftrightarrow_i y$), если x переходит в y или y переходит в x при этой изометрии, то есть существует такое $t \in [0, 1]$, что $\{x, y\} = \{a_i + t(b_i - a_i), c_i + t(d_i - c_i)\}$.

С каждой системой наложений отрезков

$$S = ([A, B]; [a_1, b_1] \leftrightarrow [c_1, d_1]; ...; [a_n, b_n] \leftrightarrow [c_n, d_n])$$

мы ассоциируем граф $\Gamma(S)$, вершинами которого являются все точки отрезка-носителя, а две вершины (точки отрезка-носителя) соединены ребром тогда и только тогда, когда эти точки сопоставлены друг другу с помощью одной из изометрий, описанных выше. Мы рассматриваем этот граф как одномерный комплекс и, говоря о его топологии, забываем о топологии отрезка $[A, B]$. Система S определяет отношение эквивалентности $\sim$ на отрезке-носителе $[A, B]$: точки, лежащие в одной и той же связной компоненте графа $\Gamma(S)$, называются эквивалентными. Множество точек, эквивалентных в этом смысле точке x, называется *орбитой* точки x. Связную компоненту этого графа, содержащую вершину x, обозначим через Γ_x.

Раздел 2.2 посвящен изложению основных фактов, которые известны о частном случае систем наложений отрезков, исторически бывшим первым примером объектов такого рода, - перекладываниях отрезков. В частности, подробно описывается алгоритм индукции Раузи для перекладываний; в дальнейшем обобщение этого алгоритма используется для изучения систем наложений отрезков. Кроме того, в этом разделе приводится следующая теорема, дающая, в частности, ответ на вопрос о типичном поведении орбит в случае перекладываний[22, 23]:

Теорема 8. *Для любой неприводимой перестановки σ и почти любого набора $\lambda_1, ..., \lambda_n$ положительных чисел соответствующее перекладывание отрезков имеет ровно одну инвариантную меру.*

В разделе 2.3 речь идет о другом частном случае систем наложений отрезков - об отображениях сдвигов отрезков и том, как решаются вопросы об устройстве орбит для таких систем. Раздел 2.4 содержит основные факты, касающиеся систем наложений отрезков: вводится понятие сбалансированной системы и формулируется результат, независимо доказанный Дынниковым и Д. Габорье, что в случае, если система не является сбалансированной, у нее обязательно есть конечные орбиты. Сбалансированность определяется следующим образом:

Определение 13. Ориентированная системы наложений отрезков S называется *сбалансированной*, если $A, B \in \bigcup_{i=1}^{n} ([a_i, b_i] \cup [c_i, d_i])$ и

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = B - A. \qquad (2)$$

Также в этом разделе вводятся важные понятия ленточного комплекса и обсуждаются известные результаты о количестве топологических концов у орбит систем. В разделе 2.4 кратко излагаются основные понятия из геометрической теории групп: $\mathbb{R}$ - дерево, ленточный комплекс (в данном

[22] Veech W.A., *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. Math. Ser. 2, Vol.115, N.2 (1982), 201–242

[23] Masur H., *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. Math. Ser. 2, Vol.115, N.1 (1982), 169–200

случае это обобщение объекта, описанного в предыдущем разделе), а также приводится подробное описание алгоритма машины Рипса, приводящего ленточные комплексы к нормальному виду.

В **Главе 3** исследуются симметричные системы наложений отрезков тонкого типа, то есть такие системы, все орбиты которых всюду плотны. В разделе 3.1 подробно описывается алгоритм индукции Раузи для систем наложений отрезков и приводится несколько эквивалентных определений принадлежности системы к тонкому типу (в частности, с точки зрения особенностей применения индукции Раузи к таким системам и машины Рипса к соотвутствующим ленточным комплексам). В этом же разделе вводится понятие *ускоренной индукции Раузи* для систем наложений отрезков по аналогии с ускоренной версией индукции Раузи для перекладываний, которая была построена А.Зоричем, и дается следующее определение *обобщенной итерации*:

Определение 28. Если на протяжении нескольких последовательных итераций индукции Раузи только одна пара отрезков подвергалась сокращению (а остальные участвовали только в переносах), то результат применения этой последовательности итераций рассматривается как разультат применения одной *обобщенной* итерации.

В этом разделе также вводится важное определение *системы наложений отрезков с дыркой*:

Определение 27. Будем говорить, что система наложений отрезков - это *система с дыркой*, если некоторые точки отрезка-носителя не покрыты никакими отрезками системы.

В частности, наличие дырки означает, что у системы есть конечные орбиты. Поэтому, так как индукция Раузи переводит системы в эквивалентные, нас будут интересовать только системы, для которых в процессе применения индукции Раузи не появляются системы с дырками; если мы получаем систему с дыркой, индукция Раузи останавливается.

Раздел 3.2 начинается с определения *симметричных систем наложений отрезков* и посвящен доказательству теоремы о ренормализации для симметричных систем наложений отрезков порядка 3.

Определение 29. Система наложений отрезков называется *симметричной*, если $a_i - A = B - d_i, i = 1...n$.

Очевидная трудность, которая возникает при применении индукции Раузи к таким системам, заключается в том, что одна итерация индукции

Раузи (например, перенос справа + сокращение справа) не сохраняет симметрию. Теорема о ренормализации[24] утверждает следующее:

Теорема 30. *Для всякой сбалансированной симметричной системы наложений отрезков порядка три без дырки требуется не более трех обобщенных итераций индукции Раузи, примененных с одной стороны (например, справа), для получения новой сбалансированной симметричной системы наложений отрезков или системы с дыркой.*

В разделе 3.3 строится пример симметричной системы наложений отрезков тонкого типа, а именно, доказывается[25]

Предложение 31. *Обозначим через* N_1 *следующую матрицу:* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, *а через* λ_1 *- ее единственное собственное число, удовлетворяющее условию* $\lambda_1 < 1$*. Пусть* (a, b, c, u) *- собственный вектор матрицы* N_1*, отвечающий собственному значению* λ_1 *и имеющий положительные координаты. Тогда соответствующая система наложений отрезков*

$$\begin{aligned} S_1 = ([0, a+b+c]\,; [0,a] \leftrightarrow & [b+c, a+b+c]\,, \\ & [0,b] \leftrightarrow [a+c, a+b+c]\,, \\ & [u, u+c] \leftrightarrow [a+b-u, a+b+c-u]) \end{aligned}$$

— тонкого типа.

Аналогичное утверждение было доказано Дынниковым при построении примера системы наложения отрезков тонкого типа без симметрии:

Предложение 32. *Обозначим через* N_2 *следующую матрицу:*
$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, *а через* λ_2 *— ее единственное собственное число, удовлетворяющее условию* $\lambda_2 < 1$*. Пусть* (a, b, c, d, e) *- это собственный вектор матрицы* N_2*, отвечающий собственному числу* λ_2*,*

[24] Skripchenko A., *Symmetric interval identification systems of order 3*, Discrete Contyn. Dyn. Syst., 32:2 (2012), 643–656.

[25] Skripchenko A., *Symmetric interval identification systems of order 3*, Discrete Contyn. Dyn. Syst., 32:2 (2012), 643–656.

с положительными координатами. Тогда соответствующая система наложений отрезков

$$S_2 = \left([0, a+b+c]\,; [0, a] \leftrightarrow [b+c, a+b+c]\,, \\ [0, b] \leftrightarrow [a+c, a+b+c]\,, \\ [d, d+c] \leftrightarrow [e, e+]\right)$$

тонкого типа.

В **Главе 4** изучаются хаотические режимы 3-периодических поверхностей. В разделе 4.1 на основе конструкции, аналогичной описанной Дынниковым в 2008 году, с помощью приведенного в предыдущей главе примера симметричной системы наложений отрезков порядка 3 тонкого типа доказывается **Предложение 33**[26]: строится в явном виде поверхность и задается направление плоскостей, такие что сечения поверхности плоскостями этого направления являются хаотическими. Построенная поверхность является поверхностью уровня четной функции. В разделе 4.2 доказывается следующая теорема[27]:

Теорема 34. *Существует 3-периодическая поверхность $\widehat{M}$ и вектор H такой, что сечения $\widehat{M}$ почти всеми плоскостями, ортогональными H, состоят из одной связной компоненты.*

Доказательство теоремы конструктивно: показывается, что утверждение теоремы выполняется для двух примеров хаотических режимов, построенных с помощью систем наложений отрезков порядка 3 тонкого типа. Доказательство опирается на 2 предложения, представляющих также самостоятельную ценность с точки зрения геометрической теории групп:

Предложение 35. *Пусть (a, b, c, u) - собственный вектор матрицы N_1, отвечающий собственному значению λ_1, имеющий положительные координаты. Тогда для соответствующей симметричной системы наложений отрезков*

$$S_1 = \left([0, a+b+c]\,; [0, a] \leftrightarrow [b+c, a+b+c]\,, \\ [0, b] \leftrightarrow [a+c, a+b+c]\,, \\ [u, u+c] \leftrightarrow [a+b-u, a+b+c-u]\right)$$

почти все графы Γ_x являются бесконечными деревьями с одним топологическим концом.

[26]Skripchenko A., *Symmetric interval identification systems of order 3*, Discrete Contyn. Dyn. Syst., 32:2 (2012), 643–656.

[27]Skripchenko A., *On connectedness of chaotic sections of some 3-periodic surfaces*, Ann. Glob. Anal. Geom, DOI 10.1007/s10455-012-9344-y (2012), 1–19.

Предложение 36. *Пусть* (a, b, c, d, e) *- собственный вектор матрицы* N_2*, отвечающий собственному значению* λ_2*, имеющий положительные координаты. Тогда для соответствующей системы наложений отрезков*

$$\begin{aligned} S_1 = ([0, a+b+c]\,; [0, a] &\leftrightarrow [b+c, a+b+c]\,, \\ [0, b] &\leftrightarrow [a+c, a+b+c]\,, \\ [d, d+c] &\leftrightarrow [e, e+c]) \end{aligned}$$

почти все графы Γ_x *являются бесконечными деревьями с одним топологическим концом.*

При доказательстве этих утверждений активно используется инструментарий теории $\mathbb{R}$-деревьев, в первую очередь машина Рипса. Таким образом, диссертация завершается доказательством гипотезы Дынникова для всех описанных в настоящий момент примеров хаотических режимов.

Благодарности.
Я благодарю своего научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора И. А. Дынникова за постановку задачи, внимание и интерес к работе. Я также хочу выразить благодарность своим французским коллегам, в первую очередь А. Зоричу, общение с которыми чрезвычайно расширило мой математический кругозор. Кроме того, я благодарю всех сотрудников кафедры высшей геометрии и топологии за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

1. Skripchenko A. Symmetric interval identification systems of order 3// Discrete Contin. Dyn. Sys., Vol. 32, no. 2 (2012), pp. 643–656

2. Skripchenko A. On connectedness of chaotic sections of some 3-periodic surfaces// Ann. Glob. Anal. Geom. (2012), DOI: 10.1007/s10455-012-9344-y, pp. 1–19 (to appear in the print version of Annals of Global Analysis and Geometry in 2012)

3. Скрипченко А. С. Системы наложений отрезков порядка 3// Материалы XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва (2011)

4. Skripchenko A., Symmetric interval identification systems of order 3// Материалы международной конференции Geometric Group Theory, Technion - Israel University of Technology, Хайфа, Израиль (2011), стр. 11

5. Skripchenko A., Symmetric interval identification system of order 3// Материалы международной конференции Dubrovnik VII - Geometric Topology, Загреб, Хорватия (2011), стр. 71

6. Скрипченко А. С., Interval identification systems of order 3 and plane sections of triply periodic surfaces// Тезисы международной конференции «Александровские чтения», Москва (2012), стр. 74