МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.521

**Хахинов Илья Вячеславович**

# О взаимосвязи методов суммирования дискретными средними Рисса с другими классическими методами суммирования

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | кандидат физико-математических наук<br>доцент<br>Степанянц Сурен Арменович |
| **Официальные оппоненты:** | доктор физико-математических наук<br>профессор<br>Дьяченко Михаил Иванович<br>МГУ имени М.В. Ломоносова<br>профессор кафедры теории функции и<br>функционального анализа<br>кандидат физико-математических наук<br>Костин Валентин Викторович<br>ООО „СИДИКОМ НАВИГАЦИЯ"<br>программист-разработчик |
| **Ведущая организация:** | „Московский государственный технический<br>университет радиотехники, электроники и<br>автоматики"(МГТУ МИРЭА) |

Защита диссертации состоится 7 декабря 2012 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 6 ноября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

Теория суммирования рядов является классической областью математического анализа, сформировавшейся как самостоятельное направление в конце XIX — начале XX века. Особое место в теории суммирования занимает изучение свойств методов суммирования, установление соотношений между различными методами. Центральным при этом является вопрос включения методов.

Пусть $\Omega$ и $\Lambda$ два метода суммирования.

Будем говорить, что $\Omega \subset \Lambda$, если из того, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем методом $\Omega$ к числу $S$ следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем методом $\Lambda$ к тому же числу $S$.

Рассматриваются две основные задачи, называемые задачей абелева типа и задачей тауберова типа.

Задача 1 (Абель).

*Для двух данных методов $\Omega$ и $\Lambda$ выяснить имеет место включение $\Omega \subset \Lambda$ или нет.*

Задача 2 (Таубер).

*Пусть известно, что $\Omega \subset \Lambda$. Требуется найти условие $(\mathfrak{U})$ определенной формы такое, что на классе последовательностей, удовлетворяющих $(\mathfrak{U})$, справедливо обратное включение.*

Такие условия называются условиями тауберова типа или $T_{(\Omega)}(\Lambda)$-условиями.

Настоящая диссертация посвящена изучению класса методов суммирования дискретными средними Рисса. Рассматриваются обе указанные выше задачи в том случае, когда одним из методов является метод суммирования дискретными средними Рисса.

В 1890 году итальянский математик Эрнесто Чезаро[1] обобщил понятие сходимости числовых рядов, в результате чего, появился целый класс методов суммирования, названный в его честь. В литературе методы Чезаро обычно обозначаются $(C, \alpha)$, где $\alpha$ — порядок метода. В силу простоты определения и удобства свойств методы Чезаро получили широкое применение. Впоследствии их стали сравнивать с другими появляющимися методами суммирования.

В 1909 году венгерский математик Марсель Рисс[2] несколько видоизменил определение метода суммирования Чезаро для целого порядка $k$. Классическое $C_n^k$ он рассмотрел в следующем виде

$$C_n^k = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k}{k} a_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\nu}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\nu}{n+k}\right) a_\nu.$$

Далее, заменой всех знаменателей $n+1$, $n+2$, …, $n+k$ на $n$, было получено новое среднее

$$R_n^k = \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^k a_\nu.$$

Соответственно, новое определение суммируемости приняло вид

$$\sum a_n = S(Rd, k) \Leftrightarrow R_n^k \to S \text{ при } n \to +\infty.$$

Очевидно, что здесь параметр $k$ может принимать и любые действительные неотрицательные значения.

Рисс обнаружил, что свойства новых полученных средних $R_n^k$ для больших значений $k$ не совпадают со свойствами соответствующих чезаровских средних. Отсюда естественным образом встает вопрос о взаимосвязи данного нового метода суммирования не только с соответствующим методом Чезаро, но и с другими известными методами суммирования. Новые средние

[1] Cesaro E. Sur la multiplication des series // Bull. Sci. Math. 1890. **14**. № 2. 114–120.

[2] Riesz M. Sur la sommation des series de Dirichlet // C. r. Acad. sci. A. 1909. **149**. 18–21.

$R_n^k$ получили название дискретных средних Рисса, а соответствующий метод суммирования — метод суммирования дискретными средними Рисса.

Несмотря на то, что с момента определения методов $(Rd, \alpha)$ прошло более 100 лет, многие свойства методов Рисса остаются малоизучеными.

В качестве классических методов суммирования, с которыми сравниваются методы Рисса, например, можно рассматривать методы суммирования Чезаро $(C, \beta)$ с различными $\beta$, $\beta \geq 0$; метод суммирования Абеля $(A)$; методы суммирования Эйлера $(E, q)$ с различными $q$, $q > 0$; экспоненциальный и интегральный методы суммирования Бореля $(B)$ и $(B')$, соответственно; и некоторые методы суммирования Вороного $(W, p_n)$ с последовательностью $p_n$ специального вида. Определения и основные свойства методов Чезаро, Абеля, Эйлера, Бореля и Вороного подробно рассмотрены в монографии Харди[3] по теории расходящихся рядов.

Связям между методами Чезаро и Рисса одного порядка посвящено довольно много работ. Для наглядности приведем в хронологическом порядке основные результаты прямого (абелева) включения:

I. 1911 г. М.Рисс[4]: $(C, \alpha) \subset (Rd, \alpha)$ для $\alpha \geq 0$;

II. 1923 г. М.Рисс[5]: $(Rd, \alpha) \subset (C, \alpha)$ для $0 \leq \alpha \leq 1$; $(Rd, 2)$ сильнее, чем $(C, 2)$; $(Rd, 3)$ сильнее, чем $(C, 3)$;

III. 1956 г. А.Пейеримхофф[6]: $(Rd, k)$ сильнее, чем $(C, k)$, для любого нечетного $k \geq 5$;

IV. 1962 г. Б.Куттнер[7]: $(Rd, \alpha) \subset (C, \alpha)$ для $0 \leq \alpha < 2$; $(Rd, \alpha)$ сильнее, чем $(C, \alpha)$, для $\alpha \geq 2$.

---

[3]Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951 (М.: Комкнига, 2006; М.: Факториал Пресс, 2006).

[4]Riesz M. Une methode de sommation equivalente a la methode des moyennes arithmetiques // C. r. Acad. sci. A. 1911. **152**. 1651–1654.

[5]Riesz M. Sur l'equivalence de certaines methodes de sommation // Proc. London Math. Soc. 1924. **22**, N 2. 412–419.

[6]Peyerimhoff A. On convergence fields of Norlund means // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. **7**. 335–347.

[7]Kuttner B. On discontinuous Riesz means of type $n$ // J. London Math. Soc. 1962. **37**, N 1. 354–364.

Из приведенных результатов видно, что с момента получения М.Риссом первого результата о связи новых методов суммирования с методами Чезаро до полного решения вопроса о взаимосвязи методов одного порядка прошло более 50 лет. В расширение данного вопроса, мы можем заметить, что если $0 \le \alpha < 2$ и $\alpha < \beta$, то $(Rd, \alpha) \subset (C, \beta)$. Это очевидно следует из результата IV и того факта, что $(C, \alpha) \subset (C, \beta)$ при $\alpha < \beta$. Однако в ситуации, когда $\alpha \ge 2$ и $\alpha < \beta$, нет результатов, на которые можно было бы опереться. При данных условиях вопрос о включении методов $(Rd, \alpha)$ и $(C, \beta)$ сохранял свою актуальность. Этот вопрос решен в первой главе диссертации.

Изучение тауберовых условий, появившихся в конце позапрошлого века в работах Таубера[8], занимает значительное место в теории суммирования рядов и ее приложениях. Различные важные виды тауберовых условий, подходы к их исследованию и применению содержатся, например, в известных работах Харди[9], Инга[10], Саса[11], Давыдова[12], Ульянова[13], каждая из которых в свою очередь повлекла за собой серию работ, посвященных соответствующему виду условий. Интерес здесь вызывает не только „алгебраическое направление, ставящее своей целью получение наиболее общих результатов, ... восходящее к Винеру и связанное с работами Гельфанда, Райкова, Годемана, Сегала и Бейрлинга“ (цитата из работы Кореваара[14]), называемое в англоязычной литературе „general tauberian theorems“. В диссертации вопрос рассматривается в классической постановке, идущей от Таубера и Харди, при этом будут

[8] Tauber A. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen // Monatsh. Math. und Phys. 1897. **8**. 273–277.

[9] Hardy G.H., Littlewood J.E. Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficinet are positive // Proc. London Math. Soc. 1914. **13**. № 2. 174–191.

[10] Ingham A.E. Some tauberian theorems connected with the prime number theorem // J. London Math. Soc. 1945. **20**. 171–180.

[11] Szasz O. Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Satze Tauberscher Art // Munchner Sitzungsberichte. 1929. 325–340.

[12] Давыдов Н.А. (c)-свойство методов Чезаро и Абеля-Пуассона и теоремы тауберова типа // Матем. сб. 1963. **60**. № 2. 185–206.

[13] Ульянов П.Л. Сходимость и суммируемость // Труды Московского Мат. Общества. 1960. **9**. 373–399.

[14] Korevaar J. Tauberian theorems // Simon Stevin. 1954. **30**. № 3. 129–139.

изучаться не абстрактные классы методов суммирования, удовлетворяющие некоторым довольно общим условиям, но конкретные широко распространенные методы одного класса.

В 1897 году Таубер[15] доказал, что условие $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ является $T_{(C,0)}((A))$-условием, где $(A)$ — метод Абеля. Отсюда, в силу включения $(C, \alpha) \subset (A)$ при любом $\alpha > 0$, следует, что $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ является $T_{(C,0)}((C, \alpha))$-условием при любом $\alpha > 0$.

Следующий результат был получен Харди[16], который в 1910 году показал, что $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ является $T_{(C,0)}((C, \alpha))$-условием при любом $\alpha > 0$ (в случае, когда „верхний“ метод есть метод $(A)$), этот результат тоже верен[17]).

Вопрос о том, насколько можно улучшить результат Харди, оставался открытым до 1948 года, когда Лоренц в своей работе[18] наложил некоторое условие на последовательность $\{c_n\}$ и установил, что это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы соотношение $a_n = O(c_n)$ было $T_{(C,0)}(\Omega)$-условием, где $\Omega$ — один из методов $(C, \alpha)$ с $\alpha > 0$ или метод $(A)$ (замечательно, что для каждого из этих методов условие оказалось одним и тем же). Лоренц отмечал, что в плане достаточности его результат не является новым; его можно получить, используя некоторые тауберовы условия работы Питта[19]. В дальнейшем результаты Лоренца обобщал на случай

[15] Tauber A. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen // Monatsh. Math. und Phys. 1897. **8**. 273–277.

[16] Hardy G.H. Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series // Proc. London Math. Soc. 1910. **8**, № 2. 301–320.

[17] Littlewood J.E. The converse of Abel's theorem on power series // Proc. London Math. Soc. 1910. **9**. № 2. 434–448.

[18] Lorentz G.G. Tauberian theorems and tauberian conditions // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. **63**. № 2. 226–234.

[19] Pitt H.R. General Tauberian theorems // Proc. London Math. Soc. 1938. **44**. 243–288.

$T_{(C,\alpha)}(\Omega)$-условий при $\alpha > 0$ Степанянц[20,21,22].

В частности доказано[22], что никакое условие вида $a_n = O(\frac{w_n}{n})$, где $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = +\infty$, не является $T_{(C,\alpha)}(C,\beta)$-условием ни для каких $\alpha$ и $\beta$ ($0 < \alpha < \beta$). Утверждение будет только ослаблено, если в качестве верхнего метода мы возьмем методы дискретных средних Рисса $(Rd, \beta)$ или $(A)$.

Таким образом, условие Харди $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ является наилучшим с точки зрения порядка условием тауберова типа, связывающим методы $(C, \alpha)$ и $(C, \beta)$, а также $(C, \alpha)$ и $(Rd, \beta)$ при $\alpha < \beta$. Открытым оставался вопрос, возможно ли усилить условие Харди, если порядок верхнего метода Рисса $(Rd, \beta)$ будет такой же, как порядок нижнего метода $(C, \alpha)$, то есть $\alpha = \beta$. Этот вопрос решен в третьей главе диссертации.

**Цель работы.**

Целью настоящей диссертации является изучение связей между методами суммирования дискретными средними Рисса $(Rd, \alpha)$ и другими классическими методами суммирования. В работе будут рассмотрены как абелевы вопросы включения методов суммирования, так и тауберовы условия эквивалентности методов.

**Научная новизна.**

Основные результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные результаты:

1. Полностью решен вопрос абелева типа о включении методов дискретных средних Рисса произвольного порядка $\alpha > 2$ методами Чезаро порядка $\beta$, где $\beta > \alpha$, а также методом Абеля.

[20] Степанянц С.А. Теоремы тауберова типа для методов суммирования Чезаро // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 2. 40–44.

[21] Степанянц С.А. Теоремы тауберова типа и лакунарные условия для методов суммирования Чезаро и Рисса // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1996. № 4. 41–45.

[22] Степанянц С.А. Необходимые условия тауберова типа для методов суммирования Чезаро // Изв. Высш. Учебн. Завед. Мат. 2005. № 10. 61–71.

2. Доказано, что методы суммирования дискретными средними Рисса $(Rd, \alpha)$ несоизмеримы с методами Эйлера $(E, q)$, экспоненциальными и интегральными методами Бореля $(B)$ и $(B')$, где $\alpha, q > 0$.

3. Определены новые методы Вороного специального вида, играющие важную роль в решении тауберова вопроса взаимосвязи методов дискретных средних Рисса и методы Чезаро. Изучены взаимосвязи новых методов Вороного с методами дискретных средних Рисса.

4. Найдены тауберовы условия роста общего члена ряда, связывающие методы суммирования дискретными средними Рисса и методы Чезаро. Найденные условия являются в определенном смысле наилучшими.

**Методы исследования.**

В работе используются различные методы теории суммирования расходящихся рядов, а также математического и комплексного анализов. Важную роль в первой главе играет теория бесконечных матриц и пространств последовательностей. Во второй главе используется теория специальных функций, свойства биномиальных коэффициентов. В третьей главе существенное значение имеет теорема о свертках, позволяющая найти ассимптотическое поведение произведения бесконечных рядов.

**Теоретическая и практическая ценность.**

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес в теории суммирования рядов, математическом анализе и теории чисел.

**Апробация результатов работы.**

Основные результаты докладывались:

- Неоднократно, 2010-2011гг. на научном семинаре „Теория ортогональных и тригонометрических рядов“ механико-математического факультета МГУ; рукодоводители — профессор М.К. Потапов, профессор В.А. Скворцов, профессор Т.П. Лукашенко, профессор М.И. Дьяченко.

- 2012г. на 16-й Саратовской зимней школе „Современные проблемы теории функций и их приложения“.

**Публикации.**

Результаты диссертации опубликованы в трех работах, список которых приведен в конце автореферата. Две работы опубликованы в журналах из списка ВАК. Работ в соавторстве нет.

**Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, списка методов суммирования, трех глав и списка литературы, насчитывающего 39 наименований. Общий объем диссертации составляет 98 страниц.

# Содержание диссертации.

**Общая структура.**

Диссертация состоит из списка методов суммирования, введения и трех глав, которые, в свою очередь, делятся на параграфы. Нумерация теорем двойная — первая цифра указывает номер главы, вторая — номер теоремы внутри главы. Нумерация формул и вспомогательных утверждений (лемм) аналогична.

**Список методов суммирования.**

В приводимом списке содержатся определения всех рассматриваемых в работе методов суммирования и некоторые их свойства, выраженные в типичных для теории рядов терминах (эти термины также определяются в списке). Также приведены основные известные взаимосвязи этих методов.

**Введение.**

Во введении описана история рассматриваемой проблемы, изложено общее содержание диссертационной работы, кратко указаны основные результаты и методы их получения.

**Глава 1 — Абелевы взаимосвязи методов дискретных средних Рисса и методов Чезаро разных порядков.**

В главе 1 устанавливаются важные взаимосвязи, которые полностью решат вопрос о связи методов Чезаро и дискретных средних Рисса различных порядков.

В первом параграфе главы 1 рассматривается метод суммирования дискретными средними Рисса порядка 2.

В данном параграфе будут доказаны следующие утверждения:

**Теорема 1.1.** *Пусть $\beta$ — фиксированное число, такое, что $\beta \geq 3$.*

*Тогда $(Rd, 2) \subset (C, \beta)$.*

**Теорема 1.2.** *Пусть $\beta$ — фиксированное число, такое, что $2 < \beta < 3$.*

*Тогда $(Rd, 2) \not\subset (C, \beta)$.*

При доказательстве данных утверждений будут существенно использоваться матричные методы суммирования и их свойства, в частности, известная теорема Кожима-Шура[23].

Во втором параграфе главы 1 рассматриваются методы суммирования дискретными средними Рисса порядка большего 2.

Для метода $(Rd, \alpha)$, где $\alpha > 2$ и метода Чезаро $(C, \beta)$, где $\beta > \alpha$ справедливо следующее утверждение:

**Теорема 1.4.** *Пусть $\alpha$ и $\beta$ — фиксированные числа, такие, что $2 < \alpha < \beta$.*

*Тогда $(Rd, \alpha) \not\subset (C, \beta)$.*

При доказательстве данного утверждения для любых фиксированных $\alpha$

[23]Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., 1960.

и $\beta$, таких, что $2 < \alpha < \beta$, будет построен пример ряда $\sum a_n$, который суммируется методом дискретных средних Рисса $(Rd, \alpha)$ и не суммируется методом Чезаро $(C, \beta)$.

Доказательство суммируемости ряда методом дискретных средних Рисса будет основано на свойствах функции $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\alpha}x^n$. Интересный факт, что сам Леонард Эйлер для целых $\alpha$ исследовал свойства данной функции в своей монографии[24], изданной в Санкт-Петербурге в 1755 году! Л.Эйлер доказал, что при домножении функции $P(x)$ на $(1-x)^{\alpha+1}$ в произведении получаются многочлены порядка $\alpha - 1$ с симметричными коэффициентами. Коэффициенты при различных степенях $x$ получили название эйлеровых чисел первого порядка, а сами полиномы — эйлеровых многочленов[25].

Более подробно свойства приведенной выше функции $P(x)$ описаны, например, в работе Лаудена[26]. В главе 1 при доказательствах нам понадобится только факт, что внутри единичного круга функция $P(x)$ при каждом фиксированном $\alpha > 2$ имеет по крайней мере один корень[27] и количество корней конечно[28].

Тем самым результаты главы 1 дают окончательный ответ на вопрос абелева типа о включении методов $(Rd, \alpha)$ произвольного порядка $\alpha$ методами $(C, \beta)$, где $\beta > \alpha$.

Точнее справедливы следующие взаимосвязи:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $(C, \alpha) \subset (Rd, \alpha)$ | при $\alpha \geq 0$; | Известный ранее факт |
| 2) $(Rd, \alpha) \sim (C, \alpha) \subset (C, \beta)$ | при $0 \leq \alpha < 2$ и $\alpha < \beta$; | Известный |

[24] Euler L. Institutiones calculi differentialis. Petrograd. 1755.

[25] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

[26] Lawden D.F. The function $\sum_{n=1}^{\infty} n^r z^n$ and associated polynomials. // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1951. **47**. № 2. 309–314

[27] Kuttner B. On discontinuous Riesz means of type $n$ // J. London Math. Soc. 1962. **37**, N 1. 354–364

[28] Miesner W., Wirsing E. On zeros of $\sum(n+1)^k z^n$ // J. London Math. Soc. 1965. **40**. 421–424

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | ранее факт |
| 3) | $(Rd, 2) \not\subset (C, \beta)$ | при $0 \leq \beta < 3$; | **Теорема 1.2.** |
| 4) | $(Rd, 2) \subset (C, \beta)$ | при $\beta \geq 3$ | **Теорема 1.1.** |
| 5) | $(Rd, \alpha) \not\subset (C, \beta)$ | при $\alpha > 2$ и $\beta \geq 0$ | **Теорема 1.4.** |

Таким образом метод суммирования дискретными средними Рисса порядка 2 является неким „переходным“ методом суммирования между методами Рисса и Чезаро.

А именно:

- При порядке меньшем двух методы суммирования дискретными средними Рисса ведут себя эквивалентно методам Чезаро такого же порядка.

- Метод суммирования дискретными средними Рисса порядка два не эквивалентен методу Чезаро этого же порядка. И более того, не включается в методы Чезаро большего порядка вплоть до порядка три. То есть метод $(Rd, 2)$ уже не эквивалентен методам Чезаро, однако все же отличается не критично и включается в методы Чезаро большего целого порядка.

- Начиная с порядка большего двух, методы суммирования дискретными средними Рисса не включаются ни в какие методы Чезаро, какого бы большого порядка мы их не брали.

**Глава 2 — Абелевы взаимосвязи методов дискретных средних Рисса и других классических методов суммирования (кроме методов Чезаро).**

Глава 2 будет посвящена взаимосвязям абелева типа методов суммирования дискретными средними Рисса с другими классическими методами суммирования. Этими методами будут метод Абеля $(A)$; методы Эйлера $(E, q)$, при $q > 0$; экспоненциальный и интегральные методы Бореля $(B)$ и $(B')$; и методы Вороного $(W, p_n)$ специального вида.

В параграфе 1 рассматриваются методы дискретных средних Рисса в сравнении с методами Абеля, Эйлера и Бореля.

Ранее было известно, что

i) $(A) \not\subset (Rd, \alpha)$ для любого $\alpha > 0$;

ii) $(Rd, \alpha) \subset (A)$ при $0 \leq \alpha \leq 2$.

Для случая $\alpha > 2$ в работе установлена следующая теорема:

**Теорема 2.1.** *Пусть $\alpha > 2$ — фиксированное число.*

*Тогда $(Rd, \alpha) \not\subset (A)$.*

Далее, для методов Эйлера и Бореля хорошо известно, что $(E, q) \subset (B) \subset (B')$ при $q \geq 0$ и, более того, метод $(B)$ сильнее, чем метод $(E, q)$, а метод $(B')$ сильнее, чем $(B)$.

Кроме того, существуют ряды, которые для каждого фиксированного $\alpha > 0$ суммируются методами Чезаро $(C, \alpha)$, но не суммируются методами Бореля $(B)$ и $(B')$, а, соответственно, не суммируемые и методами Эйлера $(E, q)$ для любого $q > 0$[29]. А также, наоборот, существуют ряды, суммируемые методами Эйлера $(E, q)$ для каждого фиксированного $q > 0$, которые в свою очередь не суммируются методами Чезаро $(C, \alpha)$ для любого $\alpha > 0$.

Отсюда в силу $(C, \alpha) \subset (Rd, \alpha)$ сразу же получаем, что существуют ряды, суммируемые методами суммирования дискретными средними Рисса $(Rd, \alpha)$ для каждого фиксированного $\alpha > 0$ и не суммируемые экспоненциальным и интегральным методами Бореля $(B)$ и $(B')$, а также методами Эйлера $(E, q)$ для любого $q > 0$.

В главе 2 устанавливается обратный случай. А точнее:

**Теорема 2.2.** *Пусть $\alpha, q > 0$ — фиксированные числа.*

*Тогда существуют ряды, суммируемые $(E, q)$, но не суммируемые*

[29] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951 (М.: Комкнига, 2006; М.: Факториал Пресс, 2006)

$(Rd, \alpha)$.

При доказательстве теоремы 2.2. будет рассмотрен ряд специального вида и показано, что он суммируем методом Эйлера $(E, q)$ для любого $q > 0$.

При этом в доказательстве будут существенно использованы некоторые тауберовы условия взаимосвязи методов суммирования дискретными средними Рисса с методами Чезаро. Эти условия будут получены в главе 3 независимо от доказательства теоремы 2.2.

Таким образом, методы дискретных средних Рисса несоизмеримы с методами Эйлера и экспоненциальным и интегральным методами Бореля. То есть существуют ряды суммируемые методами Эйлера $(E, q)$ для каждого порядка $q > 0$, а, соответственно, суммируемые экспоненциальным и интегральным методами Бореля $(B)$ и $(B')$, но не суммируемые методами суммирования дискретными средними Рисса $(Rd, \alpha)$ ни для какого порядка $\alpha > 0$.

Во второй части главы 2 рассматриваются методы суммирования дискретными средними Рисса по отношению к методам Вороного (Нерлунда) специального вида.

Пусть $\alpha \geq 2$ фиксированное действительное число.

Функция

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{\alpha} x^n$$

может быть рассмотрена как функция комплексного переменного и аналитически продолжена за границы единичного круга на всю комплексную плоскость с разрезом по положительной части действительной оси от 1 до $+\infty$[30].

Представим $\alpha$ в виде $\alpha = 2m + r$, где $m$ — натуральное, а $0 \leq r < 2$. Тогда известно, что функция $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)^{\alpha} x^n$ в круге $|x| \leq 1$ имеет ровно $m$ корней[31]. Для определенности обозначим корни через $\gamma_1, \ldots \gamma_m$.

[30]Kuttner B. On discontinuous Riesz means of type $n$ // J. London Math. Soc. 1962. **37**, N 1. 354–364

[31]Miesner W., Wirsing E. On zeros of $\sum (n+1)^k z^n$ // J. London Math. Soc. 1965. **40**. 421–424

Определим функцию $\tilde{P}(x)$ следующим образом:

$$\tilde{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n x^n = (x-\gamma_1)\cdots(x-\gamma_m)\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(\alpha)} x_n,$$

где $Q_n^{(\alpha)}$ — коэффициенты разложения в степенной ряд производящей функции метода Чезаро $(C,\alpha)$, то есть

$$Q_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{\alpha}.$$

Мы покажем, что может быть корректно определен регулярный метод Вороного, который обозначим $(\widetilde{Rd},\alpha)$, производящей функцией которого будет $\tilde{P}(x)$.

Сравнивая $(\widetilde{Rd},\alpha)$ и $(Rd,\alpha)$, установим теорему:

**Теорема 2.3.** *Пусть $\alpha > 2$ — фиксированное действительное число. Тогда $(\widetilde{Rd},\alpha) \sim (Rd,\alpha)$.*

Пусть теперь $\alpha \geq 2$ — четное натуральное число. То есть $\alpha = 2m$, где $m$ — натуральное. Тогда функция $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^\alpha x^n$ в круге $|x| \leq 1$ имеет ровно $m$ корней и при этом $-1$ является корнем данной функции. Пусть для определенности $\gamma_1,\dots\gamma_{m-1}$ — корни внутри единичного круга и $\gamma_m = -1$.

Определим функцию $\hat{P}(x)$ следующим образом:

$$\hat{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n x^n = (x-\gamma_1)\cdots(x-\gamma_{m-1})\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(\alpha+1)} x_n,$$

где $Q_n^{(\alpha+1)}$ — коэффициенты разложения в степенной ряд производящей функции метода Чезаро $(C,\alpha+1)$, то есть

$$Q_n^{(\alpha+1)} = \binom{n+\alpha+1}{\alpha+1}.$$

Мы покажем, что может быть корректно определен регулярный метод Вороного, который обозначим $(\widehat{Rd},\alpha)$, производящей функцией которого будет $\hat{P}(x)$.

Этот метод $(\widehat{Rd}, \alpha)$ будет включать в себя метод суммирования дискретными средними Рисса $(Rd, \alpha)$.

Иными словами, будет доказана теорема:

**Теорема 2.4.** *Пусть $\alpha \geq 2$ — фиксированное четное натуральное число. Тогда $(Rd, \alpha) \subset (\widehat{Rd}, \alpha)$.*

Таким образом, из теорем 2.3 и 2.4 мы получаем, что существенную роль в свойствах методов суммирования Вороного играют нули производящей функции, расположенные внутри единичного круга и на его границе.

По итогам главы 2 получаем следующую таблицу взаимосвязей:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6) | $(Rd, \alpha) \subset (A)$ | при | $0 \leq \alpha \leq 2$; |
| 7) | $(Rd, \alpha) \not\subset (A)$ | при | $\alpha > 2$; |
| 8) | $(Rd, \alpha) \not\subset (B')$ | при | $\alpha > 0$; |
| 9) | $(Rd, \alpha) \not\subset (B)$ | при | $\alpha > 0$; |
| 10) | $(Rd, \alpha) \not\subset (E, q)$ | при | $\alpha, q > 0$; |
| 11) | $(E, q) \not\subset (Rd, \alpha)$ | при | $q, \alpha > 0$; |
| 12) | $(B) \not\subset (Rd, \alpha)$ | при | $\alpha > 0$; |
| 13) | $(B') \not\subset (Rd, \alpha)$ | при | $\alpha > 0$; |
| 14) | $(Rd, \alpha) \sim (\widetilde{Rd}, \alpha)$ | при | $\alpha > 2$; |
| 15) | $(Rd, \alpha) \subset (\widehat{Rd}, \alpha)$ | при | $\alpha$ — четное натуральное число. |

**Глава 3 — Тауберовы взаимосвязи методов суммирования дискретными средними Рисса и методов суммирования Чезаро.**

В главе 3 рассматриваются задачи тауберова типа для методов Чезаро и методов суммирования дискретными средними Рисса.

В первой части главы 3 доказывается утверждение, которое позволит обратить известное включение методов дискретных средних Рисса и методов Чезаро $(C, \alpha) \subset (Rd, \alpha)$ для случая, когда $\alpha > 2$ — действительное число, не являющееся четным натуральным числом.

**Теорема 3.2.** *Пусть*

*i)* $\alpha > 2$ *— фиксированное число, не являющееся четным натуральным числом;*

*ii)* $\gamma_{(\alpha)}$ *— минимальный корень функции* $P(x) = \sum (n+1)^\alpha x^n$, *такой, что* $-1 < \gamma_{(\alpha)} < 0$*;*

*iii)* $q_{(\alpha)} = \left|\frac{1}{\gamma_{(\alpha)}}\right|$*;*

*iiii)* $\xi$ *— фиксированное число, такое, что* $1 < \xi < q_{(\alpha)}$.

*Тогда условие* $a_n = O(\xi^n)$ *является* $T_{(C,\alpha)}(Rd, \alpha)$*-условием.*

Интересно, что при четных натуральных $\alpha$ результат теоремы 3.2 становится неверным. Это связано с тем, что производящая функция $P(x)$ имеет нуль на границе единичного круга, а именно $-1$ является корнем функции $P(x)$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha$ — четное натуральное число. Положим $r = \alpha + 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leq 1$.

Во второй части главы 3 рассматривается ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+r}{r}.$$

Данный ряд не суммируем методом $(C, r)$ и в тоже время суммируем методом $(Rd, \alpha)$.

Таким образом будет установлена теорема.

**Теорема 3.3.** *Пусть*

*i)* $\alpha$ *— фиксированное четное натуральное число;*

*ii)* $r$ *— фиксированное действительное число, такое, что* $\alpha \leq r < \alpha + 1$.

*Тогда существует ряд* $\sum a_n$, *члены которого удовлетворяют условию* $a_n = O(n^r)$, *суммируемый методом* $(Rd, \alpha)$ *и не суммируемый методом* $(C, r)$.

Отметим, что в условиях теоремы 3.2 при четных $\alpha$ можно утверждать суммируемость ряда методом $(C, \alpha + 1)$. В главе 3 мы докажем соответствующую теорему:

**Теорема 3.4.** *Пусть*

*i)* $\alpha > 2$ *— фиксированное число и* $\alpha = 2l$ *(*$l$ *— натуральное число);*

*ii)* $\gamma_{(\alpha)}$ *— минимальный корень функции* $P(x) = \sum (n+1)^{\alpha} x^n$*, такой, что* $-1 < \gamma_{(\alpha)} < 0$*;*

*iii)* $q_{(\alpha)} = \left| \frac{1}{\gamma_{(\alpha)}} \right|$*;*

*iiii)* $\xi$ *— фиксированное число, такое, что* $1 < \xi < q_{(\alpha)}$*;*

*Тогда условие* $a_n = O(\xi^n)$ *является* $T_{(C,\alpha+1)}(Rd, \alpha)$*-условием.*

Объединяя результаты второй части главы 3, мы получаем, что существуют последовательности со степенным ростом, суммируемые методом дискретных средних Рисса четного порядка $\alpha$ и не суммируемые методами Чезаро порядка $\beta$, где $\alpha \le \beta < \alpha + 1$. При значениях $\beta$, таких, что $\beta \ge \alpha + 1$ становится верным включение $(Rd, \alpha) \subset (C, \beta)$.

В условии теоремы 3.4 заменить условие $a_n = O(\xi^n)$ на условие $a_n = O\left(q_{(\alpha)}^n\right)$ нельзя. В качестве примера, мы можем взять ряд, рассматриваемый при доказательстве теоремы 3.1.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\alpha > 2$ *— фиксированное число.*

*Тогда существует ряд* $\sum a_n$*, суммируемый методом* $(Rd, \alpha)$*, такой, что* $a_n = O\left(q_{(\alpha)}^n\right)$ *и* $a_n \ne o\left(q_{(\alpha)}^n\right)$.

Очевидно, что ряд $\sum a_n$ из теоремы 3.1 не суммируем $(C, \beta)$ ни для какого $\beta$ в силу лимитирующей теоремы для методов Чезаро.

**Благодарности.**

Автор выражает глубокую благодарность кандидату физико-математических наук Сурену Арменовичу Степанянцу, под руководством которого проходила работа над диссертацией, за постановку задачи и постоянное внимание.

# Работы автора по теме диссертации.


1. Хахинов И.В. О взаимосвязи методов Чезаро и методов дискретных средних Рисса. // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2011. № 5. 51–55.

2. Хахинов И.В. Тауберовы условия взаимосвязи методов Чезаро и методов дискретных средних Рисса. // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. № 4. 50–55.

3. Хахинов И.В. Об эквивалентности методов Вороного. // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 16-й Сарат. зимней школы. Саратов: ООО „Издательство „Научная книга“. 2012. 186.