МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.925

Парусникова Анастасия Владимировна

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2012

Работа выполнена на кафедре теории динамических систем Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Александр Дмитриевич Брюно
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Андрей Игоревич Шафаревич, кафедра дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор кандидат физико-математических наук Ренат Равилевич Гонцов, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Защита диссертации состоится 14 декабря 2012 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 14 ноября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Данная диссертация является исследованием в области аналитической теории дифференциальных уравнений. Рассматривается пятое уравнение Пенлеве. Методами двумерной и трёхмерной степенной геометрии отыскиваются асимптотические разложения и асимптотики его решений в окрестности особых и неособых точек уравнения.

Л. Фукс в работе 1884 года[1] и А. Пуанкаре в работах 1885-1886 годов[2,3,4] предложили искать в классе нелинейных дифференциальных уравнений те, решения которых не имеют критических подвижных особых точек, и при этом не выражаются через уже известные функции, в том числе и через спецфункции (особая точка функции называется *критической*, если при обходе этой точки значение функции меняется; особая точка решения уравнения называется *подвижной особой точкой*, если её положение зависит от начальных условий). Фукс показал, что уравнения вида

$$w' = \frac{P(w,z)}{Q(w,z)},$$

где $P(w,z), Q(w,z)$ по w — многочлены, а по z — аналитичны, будут уравнениями с неподвижными критическими точками, если и только если они являются уравнениями Риккати, т. е. имеют вид $w' = a_0(z)w^2/2 + a_1(z)w + a_0(z)$.

Дальнейшее развитие проблематики сузило поставленную задачу. В 1887 году Э. Пикар[5] предложил исследовать класс ОДУ второго порядка вида

$$w'' = F(z, w, w'), \tag{1}$$

где $F(z, w, w')$ — мероморфная по z и рациональная по w, w' функция, и уже из уравнений этого класса выделить те уравнения, решения которых не имеют подвижных критических особых точек.

---

[1] L. Fuchs, Uber differentiagleichung deren integrale feste verzweigung-spucte besitzen // Sitz. Acad. Wiss. Berlin. 1884.669-720.

[2] A. Poincare, Sur les integrales irregullieres des equations lineaires // C. r. Acad. sci. 1885. 101. 939-941. Oeuvres. IV. 611-613.

[3] A. Poincare, Sur les integrales irregullieres des equations lineaires// C. r. Acad. sci. 1885. 101. 990-991. Oeuvres. IV. 614-615.

[4] A. Poincare, Sur les integrales irregullieres des equations lineaires // Acta Math. 1886. 8. Oeuvres. I. 167-222.

[5] E. Picard, Demonstration d' un theoreme generale sur les fonctionsuniformes linees par une relation algebraique // Acta Math. 1887. 11. 1-12.

В такой постановке в начале двадцатого века задачу решил П. Пенлеве[6] со своими учениками Б. Гамбье[7] и Р. Гарнье[8]: они нашли 50 канонических уравнений. Среди этих уравнений были выделены 6, получившие название *уравнений Пенлеве*. Для остальных 44 уравнений все решения либо выражались через элементарные или известные тогда специальные функции, либо уравнения сводились к уравнениям Пенлеве.

Решения уравнений Пенлеве определяли новые функции, которые были названы *трансцендентами Пенлеве*. Отметим, что в форме, поставленной Фуксом и Пуанкаре, задача о поиске обыкновенных дифференциальных уравнений, все решения которых не имеют критических подвижных особых точек, на данный момент остаётся открытой.

В первые годы после обнаружения нового класса объектов были выделены случаи явной интегрируемости, найдены условия на параметры уравнений, при которых уравнения имели частные решения в виде специальных функций. П. Бутру[9] нашёл эллиптические асимптотики первого и второго трансцендентов Пенлеве.

Уравнения Пенлеве вновь привлекли внимание в конце 1970-х гг. в связи с исследованиями М. Абловица и Х. Сегура[10], показавшими, что уравнения Пенлеве возникают как точные редукции нелинейных уравнений в частных производных.

В те же годы уравнения Пенлеве обнаружены как описывающие физические явления: к ним сводятся трёхмерное нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнения Эрнста, Буссинеска, Кортевега-де-Фриза, Кадомцева — Петвиашвили и другие. Также к ним сводятся sin-Гордон и эллиптическое sin-Гордон уравнения. Уравнения Пенлеве используются в статистической физике, дискретные уравнения Пенлеве — в теории случайных матриц. Всё это объясняет актуальность изучения трансцендентов Пенлеве.

Результаты, касающиеся асимптотического поведения трансцендентов Пенлеве, получены Ф. В. Андреевым, А. П. Бассом, А. Д. Брюно, И. В. Горючкиной, Д. Гузетти, М. Джимбо, Б. Дубровиным, А. Итсом, Н. Йо-

---

[6] P. Painleve, Memoire sur les equations differentielles dont l'integrale generale est uniforme //Bull. Soc. Math. France. 1900. 28. 201-281.

[7] B. Gambier, Sur les equations differentielles du seconde ordre et du premier degre dont l'integrale generale est a points critiques fixes // Acta Math. 1910.33.1-55.

[8] R. Garnier, Sur des equations differentielles du troisieme ordre dont l'integrale generale est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes // Ann. Sci. de l'Ecole Normale Superieure. 1912. v. 29. p. 1-126, serie 3, 1917. v. 34. p. 239-353

[9] P. Boutroux, Recherches sur les transcendantes de M.Painleve et l'etude asymptotique des equations differentielle dusecond ordre// Ann. Sci. Ec. Norm. Super.

[10] M. J. Ablowitz, H. Segur, Asymptotic solutions of the Kortweg de Vries equation // Stud. Appl. Math., v. 57, №1, p. 13-44.

ши, А. Капаевым, К. Краскалом, А. Китаевым, П. А. Кларксоном, К. Ло, М. Мазокко, Дж. Мак Леодом, С. П. Новиковым, В. Новокшёновым, В. Сулеймановым, Ш. Тэнгом и другими[11].

Цель работы.

Целью настоящей диссертации является отыскание и исследование асимптотических разложений и асимтотик пятого трансцендента Пенлеве в окрестности точек расширенной комплексной плоскости.

Методы исследования.

В работе применяются методы аналитической теории дифферениальных уравнений, методы двумерной и трёхмерной степенной геометрии, методы теории расходящихся рядов.

Научная новизна работы.

В диссертации получены следующие новые результаты:

- найдены асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве в окрестности нуля;
- найдены все асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве в окрестности неособых точек уравнения, доказана сходимость разложений;
- получены и изучены асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве в окрестности бесконечности; они являются расходящимися рядами по целым и полуцелым степеням независимой переменной; доказана их суммируемость по Жевре порядка 1; вычислены экспоненциально малые добавки к расходящимся рядам;
- найдены периодические и эллиптические асимптотики решений вспомогательных к пятому уравнению Пенлеве уравнений в окрестности бесконечности.

---

[11] Подробная библиография, относящаяся к истории изучения уравнений Пенлеве, имеется в книге А. Р. Итса, А. А. Капаева, В. Ю. Новокшенова, А. С. Фокаса. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана // М., Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2005.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по уравнениям Пенлеве.

Апробация работы.

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

1. семинар «Качественная теория дифференциальных уравнений» кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ под рук. проф. И. В. Асташовой, проф. А. В. Боровских, проф. Н. Х. Розова, проф. И. Н. Сергеева (2012);
2. семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений МИАН им. В. А. Стеклова под рук. академика Д. В. Аносова (2012);
3. семинар «Математическая физика» ИПМ им. М.В. Келдыша РАН под рук. проф. В. В. Веденяпина, проф. В. А. Дородницина, проф. М. В. Масленникова, проф. Ю. Н. Орлова (2012);
4. семинар «Асимптотические методы математической физики и механики» лаборатории механики природных катастроф ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН под рук. академика В. П. Маслова, проф. С. Ю. Доброхотова (2012).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

1. Международная конференция «Ломоносов -2009» (г. Москва, 2009);
2. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 2010);
3. Пятые Богдановские чтения по дифференциальным уравнениям (г. Минск, 2010);
4. Международная конференция «Тараповские чтения-2011» (г. Харьков, 2011);
5. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая памяти И.Г. Петровского (г. Москва, 2011);

6. Международная конференция «Уравнения Пенлеве и смежные вопросы» (г. Санкт-Петербург, 2011);
7. Международная конференция «Формальные и аналитические решения дифференциальных уравнений» (г. Познань, Бедлево, Польша, 2011);
8. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященная 90-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко (г. Москва, 2012);
9. Международный коллоквиум «Дифференциальные и разностные уравнения в комплексной области» (г. Варшава, Польша, 2012);
10. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 2012);

Тезисы всех докладов опубликованы в сборниках тезисов соответствующих конференций.

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в пяти работах, список которых приведён в конце автореферата [1] – [5], а также в сборниках тезисов перечисленных выше конференций.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Все три главы разделены на параграфы, каждая из глав состоит из четырёх параграфов. В списке литературы — 35 наименований. Объем диссертации — 96 страниц. В работе имеется 25 поясняющих иллюстраций.

Содержание диссертации.

Диссертация посвящена изучению актуальных вопросов аналитической теории дифференциальных уравнений, а именно, вычислению и анализу асимптотических разложений и асимптотик решений пятого уравнения Пенлеве.

В диссертации рассматривается пятое уравнение Пенлеве, которое имеет вид:

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — комплексные параметры. Уравнение имеет две особые точки: ноль и бесконечность. Методами степенной геометрии отыскиваются асимптотические разложения его решений в окрестности его особых и неособых точек.

Введение содержит описание проблематики, в нём сформулированы полученные в диссертации результаты.

Первые два параграфа первой главы — вводные. **В § 1.1** приводятся основные определения и понятия двумерной степенной геометрии. **В § 1.2** описан класс разложений, в котором мы ищем решения уравненения. При $z \to 0$ и при $z \to \infty$ отыскиваются разложения вида

$$w = c_r(z)z^r + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s(z)z^s, \tag{2}$$

где $c_r(z), c_s(z), r, s \in \mathbb{C}$. Множество $\mathbf{K}$ лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}\,(s-r) > 0$ для разложений при $z \to 0$ и в полуплоскости $\mathrm{Re}\,(s-r) < 0$ для разложений при $z \to \infty$; оно является “положительной“ частью некоторой дискретной решётки в $\mathbb{C}$.

Различаем четыре типа разложений (2):

1) $c_r(z)$ и $c_s(z)$ – постоянные (*степенные разложения*);

2) $c_r(z)$ – постоянный коэффициент, $c_s(z)$ – многочлены от $\ln z$ (*степенно-логарифмические разложения*);

3) $c_r(z)$ и $c_s(z)$ – ряды по убывающим степеням $\ln z$ (*сложные разложения*, в литературе их также называют пси-рядами);

4) r, $s \in \mathbb{R}$, $c_r(z)$ и $c_s(z)$ – ряды по степеням z^i, $i^2 = -1$; показатели степени z^i в каждом из коэффициентов $c_r(z)$, $c_s(z)$ ограничены либо сверху, либо снизу (*экзотические разложения*); если в каждой из сумм конечное число слагаемых, то разложения называем *полуэкзотическими*.

5) Также ищем *экспоненциальные разложения* решений

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z)C^k \exp(k\varphi(z)),$$

где $b_k(z)$, $\varphi'(z)$ — степенные разложения с рациональными показателями степени (т. е. для них множество $\mathbf{K} \subset \dfrac{\mathbb{Z}}{m}$, $m \in \mathbb{N}$).

В третьем параграфе первой главы методы, описанные в § 1.1 и § 1.2, применяются для отыскания асимптотических разложений решений при $z \to 0$. Результаты, полученные в параграфе, сформулированы в виде теоремы.

Теорема 10. *В окрестности точки $z = 0$ пятое уравнение Пенлеве имеет следующие семейства асимптотических разложений решений:*

При $\gamma\delta \neq 0$, $\gamma/\sqrt{-2\delta} \notin \mathbb{Z} \cup i\mathbb{R}$ — однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{H}_1: \ w = 1 - \frac{2\delta}{\gamma} z + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\ell=0,\, s+\ell\neq 1}^{\infty} c_{s,\ell} z^{s+a\ell},$$

где $a = \operatorname{sgn}\operatorname{Re}(\gamma/\sqrt{-2\delta})(\gamma/\sqrt{-2\delta})$, $c_{1,1}$ — произвольная постоянная, остальные коэффициенты $c_{s,\ell}$ зависят от $c_{1,1}$.

При $\gamma\delta \neq 0$, $\gamma/\sqrt{-2\delta} \in \mathbb{Z}$ — серия однопараметрических семейств степенно-логарифмических разложений

$$\mathcal{H}_2: \ w = 1 - \frac{2\delta}{\gamma} z + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(z) z^s,$$

где $a = |\gamma/\sqrt{-2\delta}| \in \mathbb{N}$, c_s, $1 \leq s \leq a$, — постоянные, $c_s(z)$, c_{a+1} — многочлен от логарифма, который содержит одну произвольную постоянную, c_s, $s \geq a+2$ — многочлены от $\ln z$ с однозначно определёнными коэффициентами (зависящими от произвольной постоянной, входящей в c_{a+1}).

При $\gamma\delta \neq 0$, $\gamma^2/\delta \in \mathbb{R}_+$ — два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{H}_1^\tau: \ w = 1 + (-\frac{2\delta}{\gamma} + C z^{i\tau a}) z + \sum_{s=2}^{\infty} z^s \sum_{m=0}^{\infty} d_{s,m} z^{im\tau a}, \ \tau = \pm 1,$$

где $a = |\gamma/\sqrt{-2\delta}|$, C — произвольная постоянная, а остальные $c_{d,m}$ — однозначно определенные постоянные.

При $\gamma \neq 0$ — однопараметрическое семейство сложных разложений

$$\mathcal{H}_3: \ w = 1 + \left(-\frac{\gamma}{2} \ln^2 z + C_0 \ln z - \frac{{C_0}^2 + 2\delta}{2\gamma} \right) z + \sum_{s=2}^{\infty} \varphi_{s,3}(z) z^s,$$

где $\varphi_{s,3}(z)$ — ряды по убывающим степеням $\ln z$ с однозначно опеределёнными комплексными коэффициентами.

При $|\gamma| + |\delta| \neq 0$ — двухпараметрическое семейство полуэкзотических разложений

$$\mathcal{H}_4: \ w = 1 + \left(C z^{ir} - \frac{\gamma}{r^2} + \frac{\gamma^2 - 2\delta r^2}{4Cr^4} z^{-ir} \right) z + \sum_{s=2}^{\infty} z^s \sum_{m=0}^{s+1} c_{s,m} z^{i(m-s)r},$$

где $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C \in \mathbb{C}$ *— произвольные постоянные.*

При $\gamma = 0, \delta \neq 0$ *— два однопараметрических семейства сложных разложений*

$$\mathcal{H}_j^{(1)}: \ w = 1 + ((-1)^j \sqrt{-2\delta} \ln z + C_0)z + \sum_{s=2}^{\infty} \varphi_{s,j}(z) z^s, \ j = 5, 6,$$

где $\varphi_{s,j}(z)$ *— ряды по убывающим степеням* $\ln z$ *с однозначно определёнными комплексными коэффициентами (семейства* $\mathcal{H}_5$ *и* $\mathcal{H}_6$ *переходят друг в друга при смене ветви корня).*

Семейство разложений $\mathcal{H}_1$ имеется в книге В. И. Громака, И. Лэйне, С. Шимомуры[12], семейство $\mathcal{H}_2$ указано в работе А. Д. Брюно и Е. С. Карулиной[13]. Из найденных в диссертации разложений новыми являются 3 семейства сложных разложений, 2 семейства экзотических и семейство полуэкзотических разложений.

В четвёртом параграфе первой главы получены 20 семейств разложений решений пятого уравнения Пенлеве: 9 степенных, 2 степенно-логарифмических, 3 сложных, 6 экзотических. Эти семейства аналогичны имеющимся в работе А. Д. Брюно и И. В. Горючкиной[14] разложениям решений шестого уравнения Пенлеве.

Во второй главе найдены все асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве в окрестности его неособой точки z_0, $z_0 \neq 0, \infty$, и получена

Теорема 13. *В окрестности неособой точки* z_0 *при всех значениях параметров получены все разложения решений пятого уравнение Пенлеве. Они образуют* 10 *семейств. Разложения трёх семейств — это ряды Лорана с конечной главной частью (сходятся в проколотой окрестности неособой точки), остальные — ряды Тейлора (сходятся в окрестности особой точки).*

Ранее не было известно полученное для $\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ семейство разложений

$$\mathcal{O}_8: \ w = 1 - \frac{\gamma}{2z_0}(z - z_0)^2 + \sum_{s=3}^{\infty} c_{s,8}(z - z_0)^s,$$

---

[12] V. I. Gromak, I. Laine, S. Shimomoura, Painleve Differential Equations in the Complex Plane// Walter de Gruter. Berlin, New York, 2002. 303 p.

[13] А. Д. Брюно, Е. С. Карулина. Разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН 2004 **395**, № 4, с. 439-444.

[14] А. Д. Брюно, И. В. Горючкина. Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Труды ММО, т. 71, 2010 г.

где $c_{3,8} = 0$, $c_{4,8}$ — произвольная постоянная, остальные коэффициенты постоянны и однозначно определены.

В третьей главе отыскиваются и исследуются асимптотические разложения и асимптотики решений пятого уравнения Пенлеве вблизи бесконечности.

В первом параграфе третьей главы методами двумерной степенной геометрии найдены асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве при $z \to \infty$ пяти типов, описанных во втором параграфе первой главы; получена

Теорема 14. *При $z \to \infty$ существуют следующие однопараметрические семейства экспоненциальных асимптотических разложений решений пятого уравнения Пенлеве, имеющие вид*

$$w = b_0(z) + C\ \exp(\varphi(z)) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(z) C^k \exp(k\varphi(z)).$$

При $\alpha\beta\delta \neq 0$:

1) *четыре семейства разложений $\mathcal{D}_{l,m}$ $(l, m = 1, 2)$, где*

$$b_{0,l}(z) = (-1)^l \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \frac{1}{z} + \left(-\frac{2\beta}{\delta} + (-1)^l \frac{\gamma}{2\delta} \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \right) \frac{1}{z^2} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-s,l}}{z^s}, \qquad (3)$$

$$\exp(\varphi_{l,m}(z)) = C z^{\rho_{l,m}} \exp\{(-1)^m \sqrt{-2\delta} z + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_{s,l,m}}{z^s}\},$$

$$\rho_{l,m} = -1 + (-1)^{m+l} 2\sqrt{-2\beta} + \frac{(-1)^{m+1}\gamma}{\sqrt{-2\delta}};$$

2) *два семейства разложений $\mathcal{E}_m$ $(m = 1, 2)$, где*

$$b_0(z) = -1 + \frac{2\gamma}{\delta z} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{c_{-s}}{z^s}, \qquad (4)$$

$$\exp(\varphi_m(z)) = \frac{C}{\sqrt{z}} \exp\{(-1)^m \sqrt{\frac{\delta}{2}} z + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_{-s,m}}{z^s}\};$$

3) *четыре семейства разложений $\mathcal{F}_{l,m}$ $(l, m = 1, 2)$, где*

$$b_{0,l}(z) = (-1)^l \sqrt{-\frac{\delta}{\alpha}} z + 2 + (-1)^l \frac{\gamma}{2\sqrt{-\alpha\delta}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_{-s,l}}{z^s}, \qquad (5)$$

$$\exp(\varphi_{l,m}(z)) = Cz^{\rho_{l,m}} \exp\{(-1)^m\sqrt{-2\delta}z + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{d_{s,l,m}}{z^s}\},$$

$$\rho_{l,m} = 1 + (-1)^{l+m}2\sqrt{2\alpha} + (-1)^m\frac{2\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{-\delta}};$$

При $\alpha\beta\gamma \neq 0,\ \delta = 0$*:*

1) *четыре семейства разложений* $\mathcal{D}_{l,m}$ $(l = 3, 4,\ m = 1, 2)$*, где*

$$b_{0,l}(z) = (-1)^l\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma z}} + \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{z} + \sum_{s=3}^{\infty}\frac{c_{-s,l}}{z^{s/2}}, \tag{6}$$

$$\exp(\varphi_{l,m}(z)) = Cz^{\rho_{l,m}} \exp\{(-1)^m2\sqrt{2\gamma z} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{d_{-s,l,m}}{z^{s/2}}\},$$

$$\rho_{l,m} = -\frac{1}{2} + (-1)^{l+m+1}\frac{\sqrt{-2\beta}}{2};$$

2) *четыре семейства разложений* $\mathcal{F}_{l,m}$ $(l = 3, 4,\ m = 1, 2)$*, где*

$$b_{0,l}(z) = (-1)^l\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\sqrt{z} + 1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_{-s,l}}{z^{s/2}}, \tag{7}$$

$$\exp(\varphi_{l,m}(z)) = Cz^{\rho_{l,m}} \exp\{(-1)^l2\sqrt{-2\gamma z} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{d_{-s,l,m}}{z^{s/2}}\},$$

$$\rho_{l,m} = \frac{1}{2} + (-1)^{l+m+1}\frac{\sqrt{2\alpha}}{2}.$$

"Экспоненциальные добавки" $\exp\varphi_{l,m}(z)$ *для разложений* $\mathcal{D}_{l,m}$*,* $\mathcal{F}_{l,m}$ $(l, m = 1, 2)$ *экспоненциально малы в полуплоскостях* $(-1)^m\mathrm{Re}(\sqrt{-\delta}z) < 0$*, для разложений* $\mathcal{E}_m$ $(m = 1, 2)$ *— в полуплоскостях* $(-1)^m\mathrm{Re}\left(\sqrt{\delta}z\right) < 0$*, для разложений* $\mathcal{D}_{l,m}$ $(l = 3, 4,\ m = 1, 2)$ *— в областях* $(-1)^m\mathrm{Re}(\sqrt{\gamma z}) < 0$*, для разложений* $\mathcal{F}_{l,m}$ $(l = 3, 4,\ m = 1, 2)$ *— в областях* $(-1)^m\mathrm{Re}(\sqrt{-\gamma z}) < 0$*.*

Также получена

Теорема 15. *В случае* $\alpha = 0,\ \delta \neq 0$ *имеются два однопараметрических семейства экспоненциальных разложений* $\mathcal{G}_m$ $(m = 1, 2)$ *вида*

$$w_m = C\exp(\varphi_m(z)) + \sum_{k=0}^{\infty}b_{k,m}(z)C^{-k}\exp(-k\varphi(z)), \tag{8}$$

где $b_{k,m}(z)$ *— степенные ряды,*

$$\exp(\varphi_m(z)) = z^{1 - \dfrac{(-1)^m\gamma}{\sqrt{-2\delta}}} \exp\{(-1)^m\sqrt{-2\delta}z + \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,m}z^{-s}\},$$

определены в области $(-1)^m\mathrm{Re}(\sqrt{-\delta}z) > 0$.

В случае $\alpha = 0$, $\delta = 0$ *— два однопараметрических семейства экспоненциальных разложений* $\mathcal{G}_m$ $(m = 3, 4)$ *вида* (8)*, где*

$$\exp(\varphi_m(z)) = \sqrt{z}\exp\{(-1)^m 2\sqrt{-2\gamma z} + \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,m}z^{-s/2}\},$$

определены в области $(-1)^m\mathrm{Re}(\sqrt{-2\gamma z}) > 0$.

В случае $\beta = 0$ *при* $\delta \neq 0$ *имеются два семейства экспоненциальных разложений* $\mathcal{G}_5$, $\mathcal{G}_6$*, а при* $\beta = 0$, $\delta = 0$ *— ещё два семейства экспоненциальных разложений* $\mathcal{G}_7$, $\mathcal{G}_8$*. Разложения могут быть получены из упомянутых выше* $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ *и* $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_4$ *при* $\alpha = 0$ *с помощью преобразования*

$$(w, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = (z, \frac{1}{\tilde{w}}, -\tilde{\beta}, -\tilde{\alpha}, -\tilde{\gamma}, \delta). \qquad (9)$$

Во втором параграфе третьей главы исследуется суммируемость по Жевре рядов (3) — (7).

Пусть $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$ — открытый сектор с вершиной в бесконечности на расширенной комплексной плоскости или римановой поверхности логарифма, т. е.

$$\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2) = \{z : |z| > R, \operatorname{Arg} z \in (\varphi_1, \varphi_2)\}.$$

w — голоморфная на $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$ функция и $\hat{w} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$ — некоторый формальный ряд, принадлежащий $\mathbb{C}[[1/z]]$. Говорят, что w *асимптотически приближается рядом* $\hat{w}$ *на* $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$, если для точек z любого замкнутого подсектора Y из $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют постоянные $M_{Y,n} > 0$:

$$|z^n||w(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^{-p}| < M_{Y,n}.$$

Если существуют постоянные A_Y, C такие, что $M_{Y,n} = C(n!)^{1/k}A_Y^n$, то говорят, что w *асимптотически приближается по Жевре порядка* $1/k$ *рядом* $\hat{w}$ *на* $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$.

В § 3.2 получена теорема, которая позволяет говорить о точности приближения решений пятого уравнения Пенлеве экспоненциальными разложениями.

Теорема 18. Типы Жевре рядов (4), (5) и регулярной части ряда (3) равны единице. Ряды (6), (7), рассмотренные как ряды по переменной $\sqrt{z}$, также имеют тип Жевре, равный единице.

Утверждение 3.1. *Существуют* $k' \geq 1$ *и* $R_0 \in \mathbb{R}_+$ *такие, что для любого открытого сектора* $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$, $R \geq R_0$, $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi/k' \leq \pi$ *существует решение пятого уравнения Пенлеве, асимптотически приближаемое рядом* (5) *по Жевре порядка 1. Для ряда* (4) *и регулярной части ряда* (3) *постоянные* R_0 *и* k' *— свои.*

Существуют $k' \geq 2$ *и* $R_0 \in \mathbb{R}_+$ *такие, что для любой области* $\{z : |\sqrt{z}| > R \geq R_0, \operatorname{Arg} z \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$, $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi/k' \leq 2\pi$ *на римановой поверхности* $\sqrt{z}$ *существует решение пятого уравнения Пенлеве (с параметром* $\delta = 0$*), асимптотически приближаемое рядом* (6) *по Жевре порядка 1. Такое же утверждение верно и для ряда* (7) *(со своими постоянными* R_0 *и* k'*).*

В третьем параграфе третьей главы описаны методы трёхмерной степенной геометрии.

В четвёртом параграфе эти методы применяются к пятому уравнению Пенлеве: в окрестности бесконечности отыскиваются асимптотики решений вспомогательных к пятому уравнению Пенлеве уравнений. Ищем асимптотики вида $w = z^a\varphi(z^b)$, где a и $b = \text{const} \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Если $\varphi(u)$ — комплексно-периодическая функция (однопериодическая), будем называть асимптотику *периодической*; если $\varphi(u)$ — эллиптическая функция, будем называть асимптотику *эллиптической*.

Основным результатом § 3.4 является

Теорема 20. *Асимптотики решений вспомогательных к пятому уравнению Пенлеве уравнений при* $z \to \infty$ *образуют следующие семейства:*

два двухпараметрических семейства эллиптических асимптотик

$$\mathcal{E}ll_1: \ w = \frac{-2}{\delta C}\wp\left(z + C_0; \frac{\delta^2}{3}\left(C^2 - 4C + 1\right), \frac{\delta^3}{54}\left(C^2 + 8C - 2\right)\left(2C - 1\right)\right) + \\ + \frac{2C - 1}{3C}, \ C \neq 1/4;$$

$$\mathcal{E}ll_2: \ w = -\frac{1}{2\gamma C}\wp\big(\sqrt{z} + C_0; \frac{16\gamma^2}{3}(C^2 - C + 1),$$
$$\frac{32\gamma^3}{27}\,(C-1)\,(4C-1)(5C-2)\big) + \frac{2C-1}{3C},\ C \neq 1;$$

где $\wp(z; g_1, g_2)$ — функция Вейерштрасса, $C \neq 0, C_0 \in \mathbb{C}$ — произвольные постоянные,

четыре однопараметрических семейства периодических асимптотик

$$\mathcal{T}_1: \ w = z^{-1}(C_+ e^{\sqrt{-2\delta z}} + C_- e^{-\sqrt{-2\delta z}} - \frac{C}{2\delta}),\ \text{где } C_+C_- = \frac{C^2}{16\delta^2} - \frac{\beta}{4\delta},$$

$$\mathcal{T}_3: \ w = z^{-1/2}(C_+ e^{\sqrt{8\gamma z}} + C_- e^{-\sqrt{8\gamma z}} - \frac{C}{2\gamma}),\ \text{где } C_+C_- = \frac{C^2}{16\gamma^2} + \frac{\beta}{4\gamma},$$

семейства $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_4$, получаемые из $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_3$ при помощи замены (9).

Семейства $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{E}ll_1$ существуют при $\delta \neq 0$, а семейства $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_4$, $\mathcal{E}ll_2$ — при $\gamma \neq 0$, $\delta = 0$.

В заключение автор благодарит своего научного руководителя профессора Александра Дмитриевича Брюно за постановку задачи, внимание к ее решению и плодотворные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации.

1. А. Д. Брюно, А. В. Парусникова, *Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве* //ДАН, 2011, т. 438, №4, с. 439-443.
2. А. Д. Брюно, А. В. Парусникова, *Разложения решений пятого уравнения Пенлеве в окрестности его неособой точки* // ДАН, 2012, т. 442, №5, с. 583-588.
3. A. V. Parusnikova, *Asymptotic expansions of solutions to the fifth Painlevé equation* // Painlevé Equations and Related Topics (Eds. A. D. Bruno, A. B. Batkhin), De Gruyter, Berlin/Boston, 2012, p. 33-38.
4. A. D. Bruno, A. V. Parusnikova, *Elliptic and periodic asymptotic forms of solutions to* P_5 // Painlevé Equations and Related Topics (Eds. A. D. Bruno, A. B. Batkhin), De Gruyter, Berlin/Boston, 2012, p. 53-65.
5. А. Д. Брюно, А. В. Парусникова, *Разложения и асимптотики решений пятого уравнения Пенлеве вблизи бесконечности.* Препринт № 61. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012, с. 1-32.

В совместных работах [1, 2, 4, 5] А. Д. Брюно принадлежит выбор направлений научных исследований и общее научное руководство, а все доказательства теорем и основных результатов сделаны А. В. Парусниковой.