МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Голубцов Павел Евгеньевич

ПОЛИМОРФИЗМЫ И ЗАДАЧА О РАЗРУШЕНИИ АДИАБАТИЧЕСКОГО ИНВАРИАНТА

01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель:	Трещев Дмитрий Валерьевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор
Официальные оппоненты:	Сидоренко Владислав Викторович, доктор физико-математических наук, профессор
	Буфетов Александр Игоревич доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится 14 декабря 2012 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, 1, Главное здание МГУ, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций (Ломоносовский проспект, 27, Фундаментальная библиотека, сектор А – 8 этаж, к. 812).

Автореферат разослан ________________ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.22, доцент — В.А.Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Задача о разрушении адиабатического инварианта при прохождении фазовой точки через сепаратрису относится к области исследования возмущенных интегрируемых гамильтоновых систем. Адиабатическим инвариантом называется величина, асимптотически сохраняющаяся при достаточно медленном изменении параметров системы. Понятие было предложено П.Эренфестом. В современном понимании это явление изучалось в работах А.А.Андронова, М.А.Леонтовича, Л.И.Мандельштама. Адиабатические инварианты возникают во многих задачах механики. Например, в одномерных гамильтоновых системах с параметром при условии замкнутости фазовых траекторий и отличия частоты движения по ним от нуля адиабатическим инвариантом является переменная действия. То же можно сказать о системе с двумя степенями свободы, гамильтониан которой плавно зависит от всех координат, кроме одной. Адиабатический инвариант существует в системе, описывающей движение в потенциальном рве. К таким задачам относятся распространение коротковолнового излучения в волноводе или движение заряженной частицы в плавнонеоднородном поле. Адиабатические инварианты существуют и в системах с ударом, например, при движении упругого шарика между двумя медленно движущимися стенками или при распространении лучей в плоском плавнорегулярном световоде с зеркальными стенками. Если фазовое пространство системы разделено на области движения сепаратрисой, то при прохождении точки через нее значение адиабатического инварианта испытывает скачок. Оценкам величины скачка посвящены работы О.Ю.Шмидта, В.К.Мельникова, А.И.Нейштадта, В.В.Сидоренко, Д.В.Трещева и др. А.И.Нейштадтом было показано, что захват точки в ту или иную область фазового пространства асимптотически имеет случайный характер, причем вероятность захвата определяется скоростью изменения площади данной области. Согласно результатам А.И.Нейштадта и Д.В.Трещева, возникающее многозначное отображение множества значений адиабатического инварианта в себя сохраняет стандартную меру Лебега. Таким образом, задача о разрушении адиабатического инварианта может быть описана с помощью динамической системы особого вида, предложенной А.М.Вершиком, – полиморфизма.

Цель работы

Исследовать статистические свойства простейших полиморфизмов, возникающих в задаче о разрушении адиабатического инварианта. Получить теорему об эргодичности трехпараметрического семейства полиморфизмов, состоящих из двух возрастающих кусочно-линейных отображений с одной точкой излома. Построить классификацию типичных особенностей полиморфизмов, порождаемых задачей о разрушении адиабатического инварианта.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором и состоят в следующем: доказана эргодичность семейства кусочно-линейных полиморфизмов, состоящих из двух возрастающих отображений с одной точкой излома; построена классификация типичных особенностей полиморфизмов, порождаемых задачей о разрушении адиабатического инварианта.

Достоверность результатов

Все результаты диссертации имеют строгое математическое обоснование. Качественные результаты подтверждены с помощью численного моделирования.

Методы исследования

Результаты диссертации получены с помощью методов теории динамических систем, а также теории особенностей дифференцируемых отображений.

Теоретическая и практическая научная ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты позволяют сделать вывод о чрезвычайно хаотических свойствах полиморфизмов и описываемых ими систем. Классификация типичных особенностей может быть использована для дальнейшего изучения типичных эргодических и других свойств полиморфизмов, порождаемых задачей о разрушении адиабатического инварианта. Результаты диссертации, в частности, могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В.Ломоносова, Математическом институте имени В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В.А.Стеклова РАН, Институте прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на Московской конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», Математический институт имени В.А.Стеклова РАН, апрель 2012.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

1. Семинар по теоретической механике, МГУ имени М.В.Ломоносова, ноябрь 2010.
2. Семинар по динамическим системам, МГУ имени М.В.Ломоносова, март 2011.
3. Семинар по динамическим системам и теории представления, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, октябрь 2012.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 2 работах автора. Список публикаций приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, добавления, приложения, заключения и списка литературы, содержащего 29 наименований. Объем диссертации 56 страниц.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** описана предметная область диссертации, сформулирована цель исследования, дан обзор работ, посвященных изучению явления разрушения адиабатического инварианта при переходе фазовой точки через сепаратрису, приведено краткое содержание работы.

В **первой главе** вводятся основные понятия общей теории полиморфизмов и полиморфизмов, состоящих из гладких отображений. Вводятся понятия эргодического и перемешивающего полиморфизма.

Полиморфизмом пространства Лебега (X_1, m_1) в пространство Лебега (X_2, m_2) называется диаграмма Π:

$$(X_1, m_1) \xleftarrow{\pi_1} (X_1 \times X_2, \mu) \xrightarrow{\pi_2} (X_2, m_2)$$

где $(X_1 \times X_2, \mu)$ – пространство Лебега, π_1 и π_2 – координатные проекции $X_1 \times X_2$ на координатные сомножители X_1 и X_2, являющиеся гомоморфизмами пространств Лебега. С точки зрения динамики, точки множества X_1 случайно отображаются полиморфизмом Π в точки множества X_2 таким образом, что вероятность попадания точки из произвольного измеримого $A \subset X_1$ в произвольное измеримое $B \subset X_2$ равна $\mu(A \times B)$. Например, рассмотрим окружность с парой отражений относительно неколлинеарных прямых, проходящих через ее центр. В этом случае определен полиморфизм фактор-пространств исходной окружности по модулю первого и второго отражения.

В контексте нашей задачи мы рассмотрим полиморфизмы частного вида с мерой, сосредоточенной на конечном наборе гладких кривых. В этом случае каждая точка пространства X_1 имеет конечное число образов в X_2, вероятность каждого из которых определяется плотностью меры μ в соответствующих точках $X_1 \times X_2$.

Пусть отрезок $[0,1]$ представлен в виде объединения отрезков:

$$[0,1] = \bigcup_{k=1}^{K} I_k .$$

Для каждого k зададим функции

$$\varphi_k : I_k \to [0,1], \qquad p_k : I_k \to [0,1].$$

Мы предполагаем, что функции φ_k и p_k кусочно-гладкие внутри интервала $I_k, k = 1,...,K$. Предполагается также, что функции φ_k строго монотонны на I_k , и, следовательно, существуют обратные функции $\psi_k = \varphi_k^{-1}, k = 1,...,K$.

Обозначим $T = (\varphi; p; I)$.

Пусть

$$V(x) = \{k : x \in I_k\}, \qquad U(y) = \{k : y \in \varphi_k(I_k)\}.$$

Определим оператор Перрона-Фробениуса $W_T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ на пространстве функций с интегрируемым по стандартной мере Лебега квадратом по формуле

$$W_T \rho(y) = \sum_{k \in U(y)} p_k \circ \psi_k(y) \, |\psi_k'(y)| \, \rho \circ \psi_k(y) .$$

Определение. *Пусть выполнены условия:*

1) $\sum_{k\in V(x)} p_k(x)=1$ *для всех* $x\in[0,1]$;

2) *справедливо тождество* $W_T 1=1$.

Тогда T *называется полиморфизмом.*

На рис. 1 изображен пример полиморфизма.

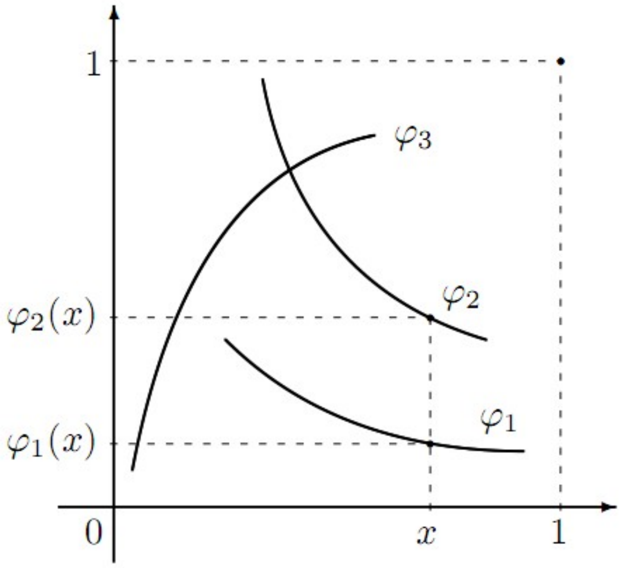

Рис. 1 Действие полиморфизма: точка x переходит в точки $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ с вероятностями $p_1(x)$ и $p_2(x)$, соответственно

Определение. *Полиморфизм* T *называется эргодическим, если уравнение* $W_T\rho=\rho, \rho\in L^2([0,1])$, *не имеет решений, отличных от констант.*

Определение. *Полиморфизм* T *называется перемешивающим, если для каждой функции* $\rho\in L^2([0,1])$ *мы имеем:*

$$W_T^n\rho\to\langle 1,\rho\rangle \quad \text{в слабой } L^2\text{-топологии при } n\to\infty.$$

Следующие два предложения утверждают, что полиморфизм с двумя ветвями, выходящими из точки $(0,0)$ и заканчивающимися в точке $(1,1)$, может быть построен по заданному распределению вероятности или одной из ветвей отображения.

Предложение. *Предположим, что на отрезке* $[0,1]$ *заданы кусочно-гладкие отличные от констант функции* p_1 *и* p_2, *такие что* $p_1(x)+p_2(x)=1$ *и* $0<p_k(x)<1$, $k=1,2$, *для всех* $x\in[0,1]$. *Пусть*

$$P_k(x)=\int_0^x p_k(\lambda)d\lambda\,, \qquad x\in[0,1]\,,$$

и

$$\varphi_k(x)=\frac{P_k(x)}{P_k(1)}\,, \qquad x\in[0,1]\,,$$

где $k=1,2$. *Тогда* $T=(\varphi_1,\varphi_2;p_1,p_2;[0,1],[0,1])$ *– полиморфизм.*

Предложение. *Предположим, что на отрезке* $[0,1]$ *задана непрерывная кусочно-гладкая функция* h, *отвечающая условиям* $h(0)=0$ *и* $|h'(x)|<1/2-c$ *для некоторого* $c>0$ *в тех точках* $x\in[0,1]$, *где* h *имеет производную. Определим на отрезке* $[0,1]$ *функции* ψ_1 *и* ψ_2 *из условий*

$$\frac{\frac{1}{2}\psi_1(y)+h(\psi_1(y))}{\frac{1}{2}+h(1)}=y\,, \qquad y\in[0,1]\,,$$

$$\frac{\frac{1}{2}\psi_2(y)-h(\psi_2(y))}{\frac{1}{2}-h(1)}=y\,, \qquad y\in[0,1]\,.$$

Определим пару чисел q_1 *и* q_2

$$q_1=\frac{1}{2}+h(1) \qquad \text{и} \qquad q_2=\frac{1}{2}-h(1)\,.$$

Тогда $T=(\psi_1,\psi_2;q_1,q_2;[0,1],[0,1])$ *– полиморфизм.*

Предложения доказываются непосредственной проверкой определения полиморфизма.

Вторая глава посвящена хаотическим свойствам полиморфизмов. Рассматривается трехпараметрическое семейство полиморфизмов, состоящих из двух возрастающих кусочно-линейных отображений с одной точкой излома. Доказывается эргодичность полиморфизмов данного семейства.

Пусть $0<b<a<c<1$ и

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x\dfrac{a}{b}, & \text{если} \quad x \in [0,b] \\ 1-(1-x)\dfrac{1-a}{1-b}, & \text{если} \quad x \in [b,1]; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x\dfrac{a}{c}, & \text{если} \quad x \in [0,c] \\ 1-(1-x)\dfrac{1-a}{1-c}, & \text{если} \quad x \in [c,1]. \end{cases}$$

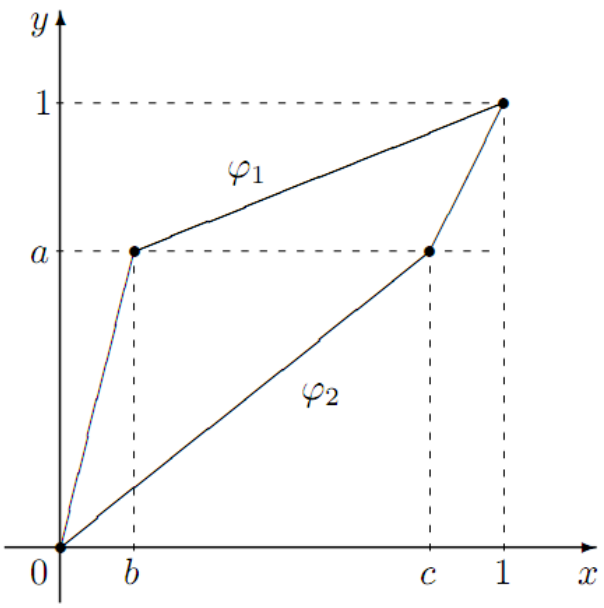

Рис. 2 Полиморфизм $T(a,b,c)$

Положим

$$p = \frac{c-a}{c-b}.$$

Не трудно убедиться в том, что $T(a,b,c) = (\varphi_1, \varphi_2; p, 1-p; [0,1],[0,1])$ – полиморфизм (см. рис. 2).

Теорема. *Полиморфизм* $T(a,b,c)$ *эргодический при любых* $0 < b < a < c < 1$.

Идея доказательства основана на наблюдении за T-образами произвольного сколь угодно малого интервала, лежащего в $[0,1]$, и поиска среди них экспоненциально растущей по длине последовательности.

В **третьей главе** описан механизм перехода фазовой точки через сепаратрису при медленном изменении параметра системы, и определяется многозначное отображение адиабатического инварианта за период. Доказывается теорема о классификации типичных особенностей полиморфизмов, порождаемых задачей о разрушении адиабатического инварианта.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Гамильтона $\dot{x} = v(x, \lambda)$, где λ – параметр. Функция I от фазовой точки x и параметра λ называется адиабатическим инвариантом, если для любой гладкой функции $\lambda(\tau)$ медленного времени $\tau = \varepsilon t$ вдоль решения уравнения $\dot{x} = v(x, \lambda(\varepsilon t))$ изменение величины $I(x, \lambda(\varepsilon t))$ остается малым на интервале времени $0 \le t \le 1/\varepsilon$, если ε достаточно мало.

Пусть теперь наше уравнение описывает гамильтонову систему с одной степенью свободы. Предположим, что при всех значениях параметра фазовое пространство системы делится сепаратрисами на области движения D_+, D_- и D_0 (см. рис. 3). Предположим также, что траектории системы замкнуты. Тогда при медленном изменении параметра действие является адиабатическим инвариантом. Это означает, что для удаленных от сепаратрисы точек изменение площади области фазового пространства, ограниченного траекторией точки в «замороженной» системе, т.е. в автономной системе с зафиксированным параметром, мало. Для точек, пересекающих сепаратрису, адиабатическое приближение теряет смысл. Точка меняет область движения, и значение адиабатического инварианта испытывает скачок.

Возникает многозначное отображение, ставящее в соответствие значению адиабатического инварианта в начальный момент времени его значение в конечный момент времени с соответствующей вероятностью, определяемой скоростью роста площади той или иной области фазового пространства, ограниченной сепаратрисой, в момент попадания точки на сепаратрису.

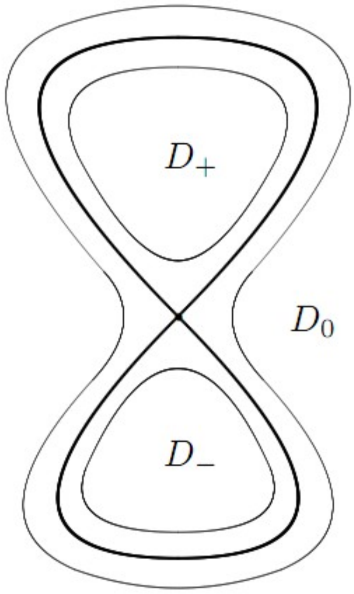

Рис. 3 Фазовый портрет "замороженной" системы

Пример полиморфизма, порожденного задачей о разрушении адиабатического инварианта, в которой площади областей D_+, D_- и дополнения области D_0 меняются по закону A_+, A_- и A_0 (см. рис. 4), показан на рис. 5 (без отображения вероятностей).

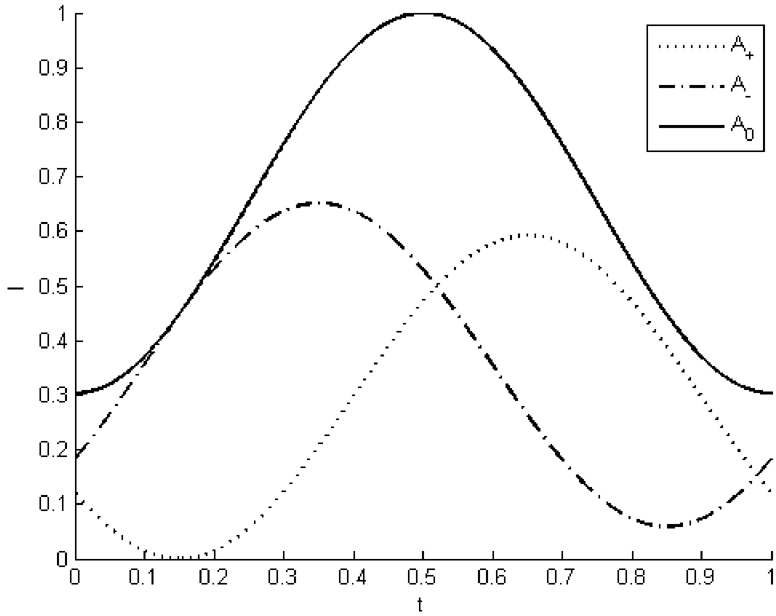

Рис. 4 Задача о разрушении адиабатического инварианта

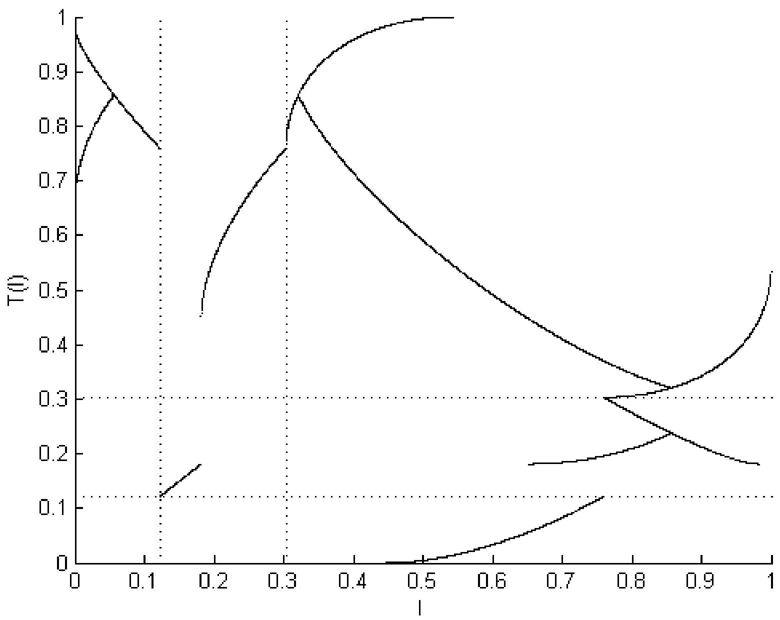

Рис. 5 Полиморфизм, порожденный задачей о разрушении адиабатического инварианта

Рассмотрим особенности полиморфизмов, порождаемых задачей о разрушении адиабатического инварианта. Особенностями полиморфизма мы называем концевые точки графиков ветвей отображения, если общее число ветвей не может быть уменьшено путем переобозначения. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Типичными особенностями полиморфизмов, порождаемых задачей о разрушении адиабатического инварианта класса гладкости* C^2*, являются:*

1. *Точка, одной из координат которой является площадь одной из областей, на которое делит фазовое пространство сепаратриса в начальный или конечный момент времени.*
2. *Точка, из которой выходит три луча (рис. 6, а). Два из них образуют гладкую кривую, трансверсальную третьему. Биссектрисами образующихся углов являются вертикальная и горизонтальная прямые. Вероятность на заканчивающемся луче при подходе к особой точке стремится к нулю.*
3. *Группа точек, образующих следующую структуру (рис. 6, б). В одной из точек выходящий луч имеет вертикальную касательную. Во второй – горизонтальную. (Таких точек может быть несколько, причем у всех точек с вертикальным лучом равны абсциссы, у точек с горизонтальным лучом равны ординаты). Третья точка группы имеет*

абсциссу, равную абсциссе первой точки, и ординату, равную ординате второй точки. Вероятность на луче, имеющем горизонтальную касательную, при подходе к особой точке стремится к нулю.

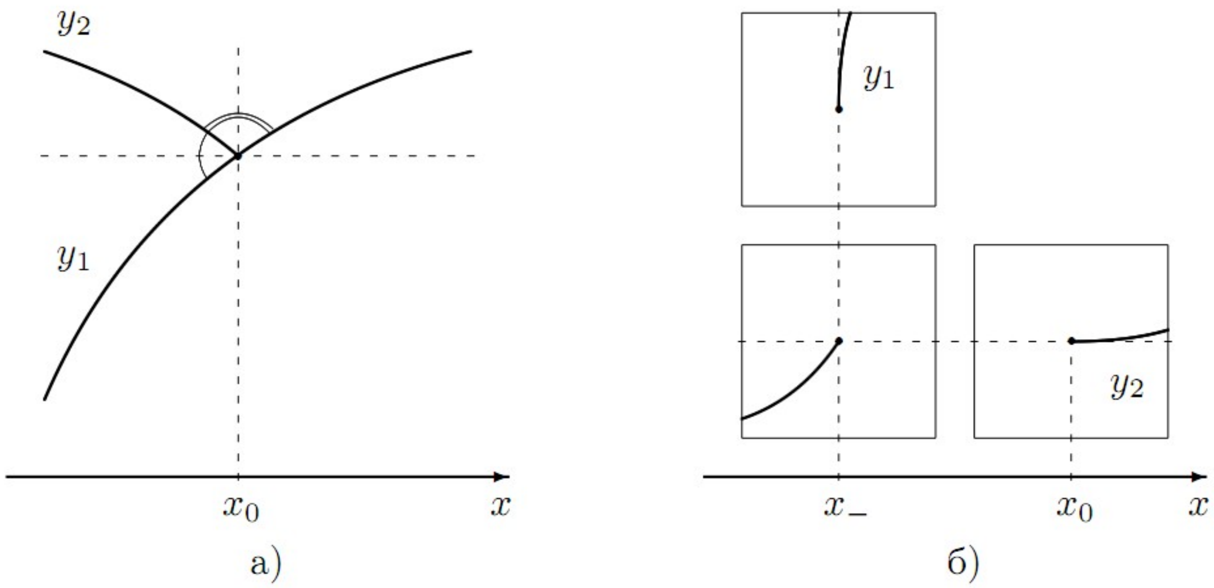

Рис. 6 Типичные особенности второго и третьего типа

Теорема доказывается с помощью анализа полиморфизма в окрестности экстремальных значений A_+, A_- и A_0.

В **добавлении** доказана теорема о признаке существования дополнительной инвариантной меры в специальном классе полиморфизмов.

Пусть имеется фиксированный набор из $n+1$ числа $0 = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = 1$. Предположим, что задан полиморфизм $T = (\varphi; p; I)$ следующего вида: каждая функция φ_k определена на одном из интервалов $[a_{j-1}, a_j], j = 1,...,n$, и отображает его взаимно-однозначно на некоторый интервал $[a_{i-1}, a_i], i = 1,...,n$, а величины $p_k \circ \psi_k(y) | \psi_k'(y) |$ постоянны, $k = 1,...,K$. Пусть Т – переходная матрица полиморфизма T, соответствующая разбиению $0 = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = 1$.

Теорема. *Предположим, что марковская цепь с матрицей перехода* Т *не эргодична. Тогда и полиморфизм* T *не эргодичен.*

В **приложении** к диссертации приведен текст программы MATLAB, строящей полиморфизм по данным задачи о разрушении адиабатического инварианта.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

В работе было исследовано поведение решений медленно возмущаемой одномерной интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности сепаратрисы с точки зрения динамики адиабатического инварианта. Сохранение меры позволяет нам использовать теорию полиморфизмов.

В классе простейших полиморфизмов, состоящих из двух гладких возрастающих отображений, естественно возникающих в задаче о разрушении адиабатического инварианта, доказаны утверждения, позволяющие построить полиморфизм по заданному распределению вероятности или одному из отображений.

Доказана эргодичность семейства кусочно-линейных полиморфизмов, состоящих из двух возрастающих отображений с одной точкой излома. Простая конструкция полиморфизма позволяет нам сделать вывод о сильных хаотических свойствах таких систем в общем случае.

Построена классификация типичных особенностей полиморфизмов, порождаемых задачей о разрушении адиабатического инварианта. Возникает вопрос о свойствах, в том числе и эргодических, характерных для полиморфизмов, порождаемых задачей о разрушении адиабатического инварианта.

Публикации по теме диссертации

1. Голубцов П.Е., Пример кусочно-линейного эргодического полиморфизма // Математические заметки, т.91, вып. 3, 2012
2. Golubtsov P.E., Typical singularities of polymorphisms generated by the problem of destruction of an adiabatic invariant // Regular and Chaotic Dynamics, 17(2), 2012, pp.122-130