Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.956.35

Чалкина Наталья Александровна

Достаточные условия существования инерциального многообразия для волнового уравнения с сильной диссипацией

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Горицкий Андрей Юрьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Ильин Алексей Андреевич, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша, ведущий научный сотрудник
	кандидат физико-математических наук Кудряшов Юрий Георгиевич, НИУ Высшая школа экономики, доцент
Ведущая организация:	Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН

Защита состоится 21 декабря 2012 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, ауд. 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 20 ноября 2012 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор ________________ В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертационной работе исследуется асимптотическое (при больших временах) поведение решений сильнодиссипативного волнового уравнения, а именно возможность построения инерциального многообразия. В диссертации рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$u_{tt} - 2\gamma_s \Delta u_t + 2\gamma_w u_t - \Delta u = f(u) + g(u_t), \tag{1}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с условиями Дирихле на границе и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x) \in H_0^1(\Omega), \qquad u_t\Big|_{t=0} = p_0(x) \in L_2(\Omega). \tag{2}$$

Уравнения такого типа возникают во многих важных физических приложениях: в квантовой механике, в теории соединения Джосефсона (возмущенное уравнение sin-Гордона для потока), в описании движения вязкоупругих тел типа Кельвина-Войта и теплопроводности некоторых типов.

Задача (1), (2) исследовалась многими авторами довольно широко, при этом особое внимание уделялось асимптотическому поведению решений.

При отсутствии нелинейной зависимости от u_t (то есть при $g \equiv 0$) глобальное существование и диссипативность сильных решений, лежащих в регулярном фазовом пространстве $[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$, были установлены В. К. Калантаровым[1] без какого-либо ограничения на рост нелинейной функции f. Кроме того, при дополнительном ограничении на рост функции f вида $|f'(u)| \leqslant c(1 + |u|^p)$ начально-краевая задача для уравнения (1) является корректно поставленной и в естественном энергетическом фазовом пространстве

[1] В. К. Калантаров, *Глобальное поведение решений нелинейных уравнений математической физики классических и неклассических типов.* Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Ленинград, 1988.

$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)^2$. Также установлено существование и единственность слабого решения задачи (1), (2) с $g \neq 0$ при некоторых условиях на рост нелинейных функций f и g[3,4].

Хорошо известно, что асимптотическое поведение при больших временах многих диссипативных систем, порождаемых уравнениями математической физики, может быть описано в терминах так называемых *глобальных аттракторов*, то есть таких компактных инвариантных множеств фазового пространства, которые притягивают образы всех ограниченных множеств при стремлении времени к бесконечности[5,6]. С одной стороны, глобальный аттрактор, если он существует, содержит все нетривиальные предельные динамики рассматриваемой системы, а с другой стороны, он существенно меньше, чем исходное фазовое пространство. В частности, в случае, когда уравнение рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, этот аттрактор часто имеет конечную фрактальную размерность. В силу этого, несмотря на изначальную бесконечномерность фазового пространства, предельная динамика оказывается конечномерной и эквивалентна подходящей динамической системе, определенной на компактном подмножестве $\mathbb{R}^n$. Этот факт называется принципом конечномерной редукции.

Существование аттракторов для волновых уравнений с сильной диссипацией при различных ограничениях на функции f и g было исследовано в работах В. К. Калантарова, В. Пата и многих других.

---

[2] V. Pata, S. Zelik, *Smooth attractors for strongly damped wave equations.* Nonlinearity. 2006, V. 19, P. 1495–1506.

[3] J. M. Ghidaglia, A. Marzocchi, *Longtime behavior of strongly damped wave equations, global attractors and their dimension.* SIAM J. Math. Anal. 1991, V. 22. no. 4, P. 879–895.

[4] F. Dell'Oro, V. Pata, *Long-term analysis of strongly damped nonlinear wave equations.* Nonlinearity. 2011, V. 24. P. 3413–3435.

[5] А. В. Бабин., М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений.* М: Наука, 1989.

[6] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Appl. Math. Sci. V. 68. New York: Springer, 1988, 2nd ed. 1997.

Однако, упомянутый принцип конечномерной редукции хоть и очень важен, но имеет существенные недостатки. Во-первых, этот принцип обеспечивает лишь гельдерову непрерывность редуцированной динамической системы. Этого недостаточно для того, чтобы представить ее как динамическую систему, порождаемую корректно поставленной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Более того, не известны разумные условия на глобальный аттрактор, которые гарантируют ее липшицевость. Второй недостаток заключается в том, что сложная геометрическая структура аттрактора затрудняет применение принципа конечномерной редукции в практических задачах при численных вычислениях: по сути, возможна только эвристическая оценка на число неизвестных, которые необходимы для описания всех динамических эффектов в предельном случае.

В этой связи весьма полезным оказывается понятие *инерциального многообразия* бесконечномерной динамической системы (в случае неавтономных уравнений вводится понятие интегральных многообразий). Это многообразие представляет собой конечномерную поверхность, которая содержит глобальный аттрактор и экспоненциально притягивает траектории. При этом появляется возможность свести исследование предельных режимов исходной бесконечномерной системы к решению аналогичной задачи для некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Инерциальные многообразия были введены и исследованы в работах Р. Темама, Дж. Селла, Э. Тити и других.

Было предложено несколько методов построения инерциальных многообразий, однако все известные к настоящему времени методы предполагают выполнение довольно жесткого условия, называемого условием *спектральной щели* и подразумевающего наличие произвольно больших зазоров в спектре линеаризованной исходной системы. В общем случае это свойство может быть выполнено только в одномерном пространстве. Тем не менее, существование инерциальных многообразий может быть доказано для большого числа уравнений, в основном в пространствах размерности один и два[7,8].

В упомянутых работах инерциальные многообразия, в основном, были построены для различных квазилинейных параболических уравнений и систем параболического вида с линейным самосопряженным операторным членом в правой части уравнения. В случае волновых уравнений соответствующий линейный оператор несамосопряжен, что создает значительные трудности при формулировке условия спектральной щели. Для более известного случая волновых уравнений со *слабой* диссипацией инерциальные многообразия были построены, например, в работе К. Мора[9]. Для неавтономного уравнения также были построены интегральные многообразия, при этом задачу можно свести к общей теореме для абстрактного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве[10].

Для слабодиссипативного волнового уравнения вида

$$u_{tt} + 2\gamma_w u_t - \Delta u = f(u) \tag{3}$$

имеет место теорема

Теорема. *Пусть функция f липшицева с константой l, а $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ — собственные числа оператора $-\Delta$ в Ω с условиями Дирихле на границе. Кроме того, пусть существует такое N, для которого выполнено*

[7] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Appl. Math. Sci. V. 68. New York: Springer, 1988, 2nd ed. 1997.

[8] C. Foias, G. Sell, R. Temam, *Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations.* J. Diff. Eq. 1988, V. 73, no. 2, P. 309–353.

[9] X. Mora, 1987 *Finite-dimensional attracting invariant manifolds for damped semilinear wave equations.* Res. Notes in Math. V. 155. P. 172–183.

[10] А. Ю. Горицкий, В. В. Чепыжов, 2005 *Свойство дихотомии решений квазилинейных уравнений в задачах об инерциальных многообразиях.* Мат. Сб. Т. 196, no. 4, С. 23–50.

$\lambda_N < \lambda_{N+1} < \gamma_w^2$ *и неравенство*

$$2l < (\sqrt{\gamma_w^2 - \lambda_N} - \sqrt{\gamma_w^2 - \lambda_{N+1}})\sqrt{\gamma_w^2 - \lambda_{N+1}}.$$

Тогда для задачи (3), (2) *в пространстве* $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ *существует* N*-мерное инерциальное многообразие.*

Эта теорема представляет собой переформулировку для автономного случая результата из упомянутой работы А. Ю. Горицкого и В. В. Чепыжова, где рассматривается неавтономная задача.

Однако спектральные свойства линейного оператора для волнового уравнения с сильной диссипацией принципиально отличаются от слабодиссипативного случая, а значит условие спектральной щели и вместе с ним достаточные условия существования инерциального многообразия принимают совершенно другой вид. Тем самым, вопрос о существовании инерциальных многообразий для волновых уравнений с *сильной* диссипацией, который до сих пор в литературе не рассматривался, представляется актуальным.

Цель работы и объект исследования. Целью работы является исследование задачи о существовании инерциального многообразия для волнового уравнения при наличии сильной диссипации. Объектом иследования являются начально-краевая задача (1), (2) и условия существования инерциальных многообразий для этой задачи.

Основные методы исследования. В диссертации применяются методы теории бесконечномерных динамических систем, теории дифференциальных уравнений и теории нелинейных уравнений с частными производными.

Научная новизна. Все результаты являются новыми и состоят в следующем.

1. Исследован характер спектра линейного волнового уравнения со слабой и сильной диссипацией в зависимости от соотношения коэффициентов

диссипации.

2. Получены условия спектральной щели как в действительной, так и в комплексной части спектра несамосопряженного оператора, соответствующего рассматриваемому уравнению.

3. Найдены условия на константы Липшица нелинейных членов волнового уравнения с сильной диссипацией, при которых существует инерциальное многообразие.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты носят теоретический характер и могут быть использованы при исследовании асимптотического поведения решений волновых уравнений с диссипацией. Эти результаты могут применяться в различных математических моделях, описываемых такими уравнениями, например, в теории соединения Джосефсона или движения вязкоупругих тел типа Кельвина-Войта.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях.

1. Семинар «Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений» под руководством проф. И. В. Асташовой, проф. Н. Х. Розова, проф. И. Н. Сергеева (МГУ, Москва, 2011).

2. Семинар «Дифференциальные уравнения и приложения» под руководством М. И. Вишика (МГУ, Москва, 2012).

3. XXIII совместное заседание Московского математического общества и семинара имени И. Г. Петровского (МГУ, Москва, 2011).

4. Первый совместный научный семинар Киевского Политехнического института и механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, 2012).

5. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и приложения», посвященная 90летию М. И. Вишика (Москва, 2012).

6. XV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 2008).

7. Международный молодежный научный форум «Ломоносов-2012» (Москва, 2012).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ, в том числе 3 статьи в журналах, рекомендуемых ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и приложения. Общий объем диссертации составляет 79 страниц; библиография включает 38 наименований.

Краткое изложение содержания диссертации

Во **Введении** описана история вопроса и известные ранее факты, сформулирована поставленная задача.

В **Главе 1** в разделе 1.1 приводятся определение инерциального многообразия и теорема о существовании инерциального многообразия для абстрактного дифференциального уравнения.

В разделе 1.2 ставится начально-краевая задача для волнового уравнения с сильной диссипацией: в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается задача

$$u_{tt} - 2\gamma_s \Delta u_t + 2\gamma_w u_t - \Delta u = f(u) + g(u_t), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \in H_0^1(\Omega), \qquad u_t\big|_{t=0} = p_0(x) \in L_2(\Omega). \tag{5}$$

Здесь $\gamma_s > 0$, $\gamma_w \geqslant 0$ — коэффициенты соответственно сильной и слабой диссипации. Предполагается также, что нелинейные функции $f(s)$ и $g(s)$ непрерывно дифференцируемы ($f, g \in C^1(\mathbb{R})$), а их производные ограничены:

$$|f'(s)| < l_u, \quad |g'(s)| < l_p \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Кроме того, налагается дополнительное условие $f(0) = g(0) = 0$.

В разделе 1.3 исследуется спектр соответствующей линейной задачи.

Пусть λ_k, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \dots \to +\infty$, — собственные значения оператора $-\Delta$ в области Ω с условиями Дирихле на границе. Тогда собственные числа линейной части уравнения есть

$$\mu_k = \gamma_k - \sqrt{\gamma_k^2 - \lambda_k} \qquad \text{и} \qquad \nu_k = \gamma_k + \sqrt{\gamma_k^2 - \lambda_k},$$

где $\gamma_k = \gamma_w + \gamma_s \lambda_k$. На рисунках 1 и 2 показано их качественное расположение на комплексной плоскости в двух случаях: $4\gamma_w\gamma_s < 1$ и $4\gamma_w\gamma_s \geqslant 1$.

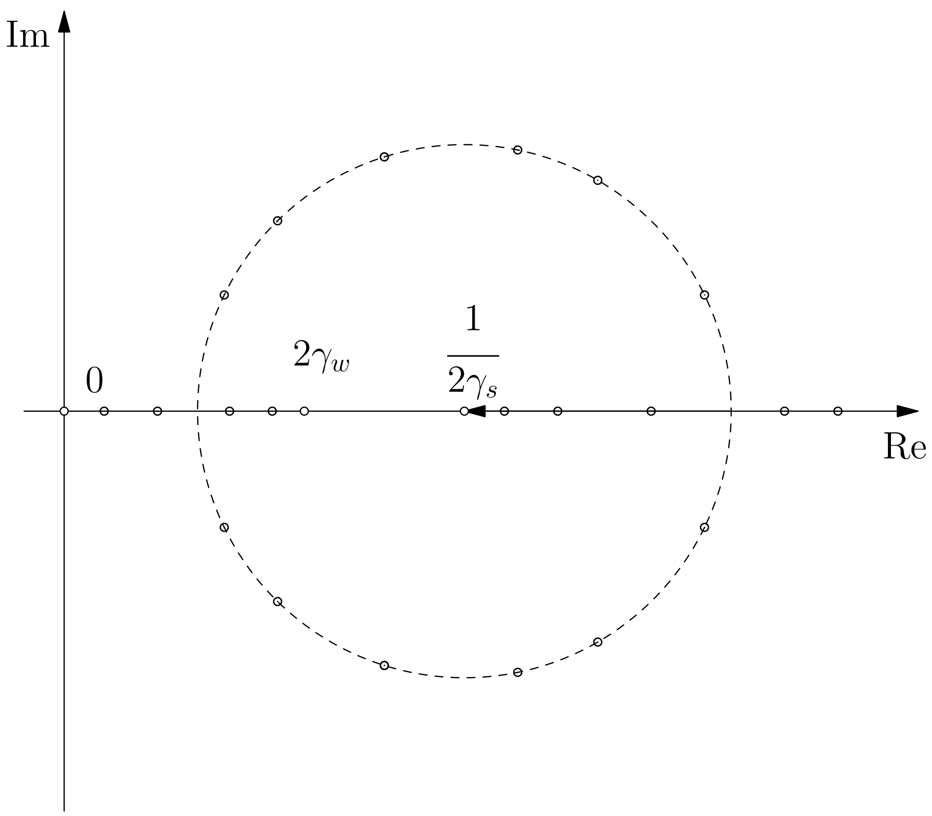

Рис. 1. Спектр линейного уравнения в случае $4\gamma_w\gamma_s < 1$

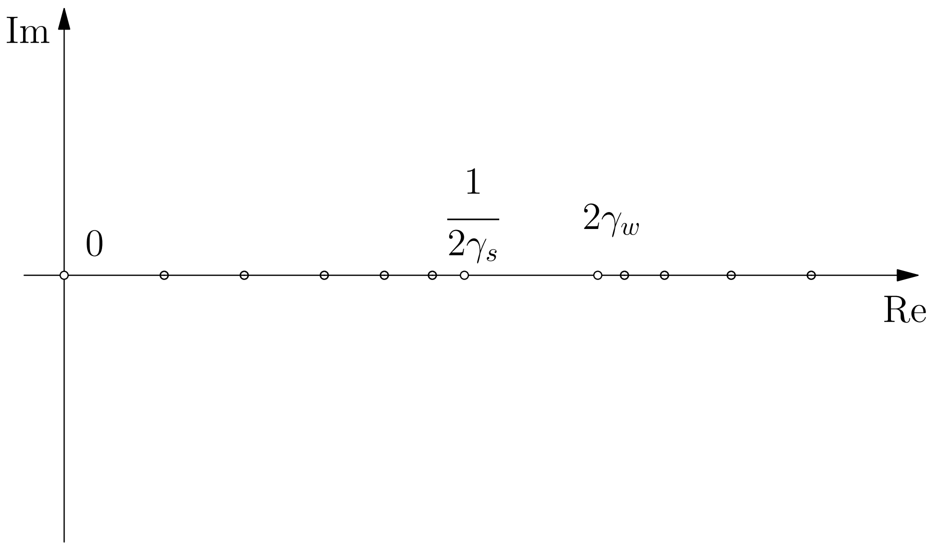

Рис. 2. Спектр линейного уравнения в случае $4\gamma_w\gamma_s \geqslant 1$

При $\lambda_k \to +\infty$ имеет место асимптотика $\mu_k = \frac{1}{2\gamma_s} + O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$, а значит в спектре также содержится число $\frac{1}{2\gamma_s}$.

В **Главе 2** сформулированы и доказаны основные результаты об условиях на константы Липшица нелинейных членов уравнения, позволяющих построить инерциальное многообразие. Раздел 2.1 касается случая щели в действительной части спектра, а в разделе 2.2 рассматривается спектральная щель в недействительной части спектра. Для каждого из этих двух случаев в фазовом пространстве вводится новая норма, эквивалентная исходной, в которой выполнены условия упомянутой общей теоремы для абстрактного дифференциального уравнения. Тем не менее, схемы построения этих норм существенно отличаются, и поэтому эти два случая рассматриваются отдельно.

В <u>разделе 2.1</u> сформулирована и доказана теорема о существовании инерциального многообразия для волнового уравнения с сильной диссипацией при наличии щели в действительной части спектра.

Обозначим

$$\Gamma = \frac{l_u + 2\gamma_w l_p}{2\gamma_s l_u + l_p}, \qquad \gamma_1 = \gamma_w + \gamma_s\lambda_1, \qquad \gamma_{N+1} = \gamma_w + \gamma_s\lambda_{N+1},$$

$$\gamma_\star = \begin{cases} \gamma_1, \ \text{ если } \Gamma \leqslant \gamma_1; \\ \Gamma, \ \text{ если } \gamma_1 \leqslant \Gamma \leqslant \gamma_{N+1}; \\ \gamma_{N+1}, \ \text{ если } \gamma_{N+1} \leqslant \Gamma. \end{cases}$$

Кроме того, обозначим $\lambda_\star = \dfrac{\gamma_\star - \gamma_w}{\gamma_s}$ (тогда $\gamma_\star = \gamma_w + \gamma_s \lambda_\star$).

Теорема 2.1. *Пусть функции f и g липшицевы с константами l_u и l_p соответственно* (*см. условие* (6)). *Пусть, кроме того, существует такое N, для которого выполнено неравенство*

$$2\frac{l_u + \gamma_\star l_p}{\sqrt{\gamma_\star^2 - \lambda_\star}} < \mu_{N+1} - \mu_N, \tag{7}$$

а при $4\gamma_w\gamma_s < 1$ еще и неравенство

$$\lambda_{N+1} < \frac{1 - 2\gamma_w\gamma_s - \sqrt{1 - 4\gamma_w\gamma_s}}{2\gamma_s^2}.$$

Тогда для задачи (4), (5) *в пространстве $\mathcal{H}$ существует N-мерное инерциальное многообразие.*

В разделе 2.2 сформулирована и доказана теорема о существовании инерциального многообразия для волнового уравнения с сильной диссипацией при условии наличия щели в недействительной части спектра.

Зафиксируем такие числа m и M, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma_w\gamma_s}}{2\gamma_s} \leqslant m < M \leqslant \frac{1}{2\gamma_s},$$

что в полосе $\{m < \operatorname{Re}\zeta < M\}$ нет точек спектра линейной части уравнения, но в полуплоскости $\{\operatorname{Re}\zeta \leqslant m\}$ такие точки есть. Введем несколько обозначений.

Определим номера k_1 и k_2 так, чтобы числа ν_{k_1} и ν_{k_2+1} лежали в полуплоскости $\{\operatorname{Re}\zeta \geqslant M\}$, а числа ν_{k_1+1} и ν_{k_2} — в полуплоскости $\{\operatorname{Re}\zeta \leqslant m\}$ (см. рисунок 3).

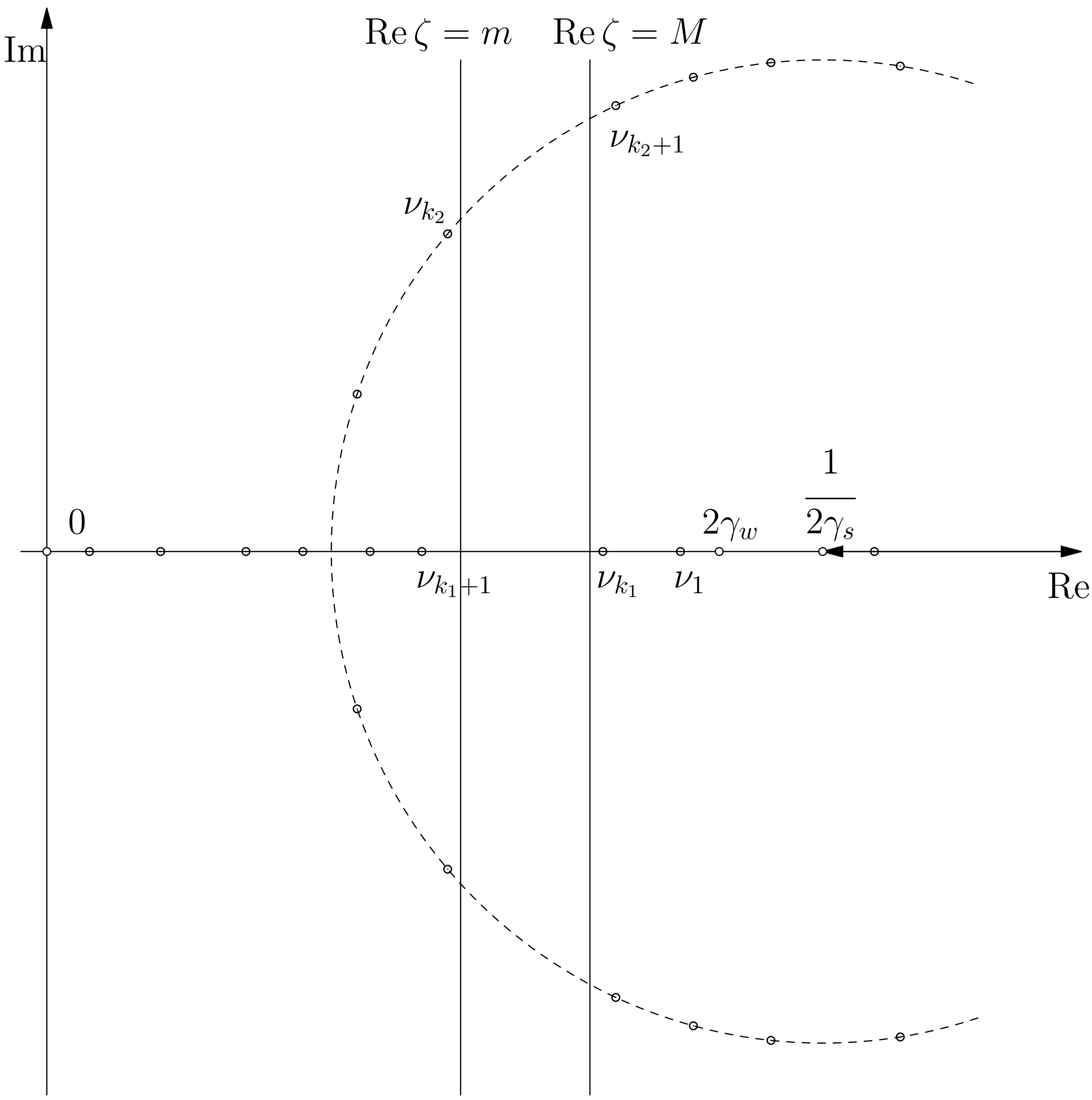

Рис. 3. Щель в недействительной части спектра

Обозначим $c_u = l_u\sqrt{1+\varepsilon}$, $c_p = l_p\sqrt{1/\varepsilon + 1}$, где $\varepsilon > 0$ — некоторый параметр, и введем числа $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$, $\varkappa_{III}$, $\varkappa_{IV}$.

Если $k_1 = 0$, то формально положим $\varkappa_I = +\infty$. Иначе

$$\varkappa_I = \frac{\sqrt{\gamma_{k_1}^2 - \lambda_{k_1}}}{c_u + \gamma_{k_1} c_p}.$$

Далее, если $k_2 = k_1$, то $\varkappa_{II} = \varkappa_{III} = +\infty$. Иначе положим

$$\varkappa_{II} = \frac{s_{k_1+1}}{\sqrt{(c_u + a_{k_1+1}c_p)^2 + s_{k_1+1}^2 c_p^2}}, \quad \varkappa_{III} = \frac{s_{k_2}}{\sqrt{(c_u + a_{k_2}c_p)^2 + s_{k_2}^2 c_p^2}},$$

где обозначено

$$\overline{m}_k = m - \gamma_k, \quad c_k = c_u + \gamma_k c_p, \quad r_k = \lambda_k - \gamma_k^2,$$
$$\overline{\alpha}_k = \overline{m}_k c_p \frac{\sqrt{c_k^2 + r_k c_p^2}\sqrt{\overline{m}_k^2 + r_k} + c_k \overline{m}_k}{c_k^2 + (\overline{m}_k + r_k) c_p^2}, \quad \alpha_k = \gamma_k - \overline{\alpha}_k,$$
$$a_k = \max\{0, \alpha_k\}, \quad s_k = \sqrt{\overline{m}_k^2 + r_k} + \sqrt{\overline{m}_k^2 - (\gamma_k - a_k)^2}.$$

Наконец, обозначим $\lambda_M = (M - \gamma_w)/\gamma_s$ и положим

$$\varkappa_{IV} = \sqrt{\frac{\lambda_M - M^2}{c_u^2 + 2Mc_u c_p + \lambda_M c_p^2}}.$$

Отметим, что все числа $\varkappa$ стремятся к бесконечности, когда константы Липшица l_u и l_p стремятся к нулю.

Теорема 2.2. *Пусть f и g удовлетворяют условию* (6). *Пусть, кроме того, имеет место неравенство*

$$2 < (M - m) \sup_{\varepsilon > 0} \{\min\{\varkappa_I, \varkappa_{II}, \varkappa_{III}, \varkappa_{IV}\}\}. \tag{8}$$

Тогда для задачи (4), (5) *в пространстве $\mathcal{H}$ существует* $(2k_2 - k_1)$*–мерное инерциальное многообразие.*

В **Главе 3** приведены следствия из основных теорем и рассмотрены некоторые частные случаи уравнения (4).

В <u>разделе 3.1</u> рассмотрены следствия теоремы 2.1, касающиеся больших и малых коэффициентов диссипации. Показано, что теорема 2.1 применима для случая малого коэффициента сильной диссипации и фиксированного коэффициента слабой диссипации. В предельном случае $\gamma_s = 0$ условие (7) на константы Липшица l_u и l_p принимает вид

$$2\frac{l_u + \gamma_w l_p}{\sqrt{\gamma_w^2 - \lambda_{N+1}}} < \sqrt{\gamma_w^2 - \lambda_N} - \sqrt{\gamma_w^2 - \lambda_{N+1}}. \tag{9}$$

Если функции f и g таковы, что задача

$$u_{tt} + 2\gamma_w u_t - \Delta u = f(u) + g(u_t), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{10}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \in H_0^1(\Omega), \qquad u_t\big|_{t=0} = p_0(x) \in L_2(\Omega), \tag{11}$$

имеет единственное решение при всех начальных условиях (например, это выполнено для кусочно-линейной функции g), то верна теорема

Теорема 3.1. *Пусть функции f и g липшицевы с константами l_u и l_p соответственно. Кроме того, пусть существует такое N, для которого выполнено $\lambda_N < \lambda_{N+1} < \gamma_w^2$ и неравенство* (9). *Тогда для задачи* (10), (11) *в пространстве $\mathcal{H}$ существует N-мерное инерциальное многообразие.*

В разделе 3.1 также показано, что в общем случае увеличение коэффициентов диссипации не улучшает ситуацию с точки зрения существования инерциального многообразия. Однако в случае, когда нелинейная функция зависит только от u (то есть $g \equiv 0$ и $l_p = 0$), при фиксированном коэффициенте сильной диссипации γ_s теорема 2.1 доставляет условие существования инерциального многообразия для больших коэффициентов слабой диссипации.

Теорема 3.2. *Пусть $g \equiv 0$, а функция f липшицева с константой l_u. Кроме того, пусть существует такое N, для которого выполнено*

$$4l_u < \lambda_{N+1} - \lambda_N.$$

Тогда при достаточно большом γ_w у задачи (4), (5) *в пространстве $\mathcal{H}$ существует N-мерное инерциальное многообразие.*

В разделе 3.2 рассмотрены условия спектральной щели (8) для случаев зависимости нелинейного члена уравнения только от неизвестной функции или только от ее производной. В первом случае ($g \equiv 0$) условие (8) принимает вид

$$2l_u < (M-m)\min\left\{\sqrt{\gamma_{k_1}^2-\lambda_{k_1}}, s_{k_1+1}, s_{k_2}, \sqrt{\lambda_M - M^2}\right\},$$

а во втором случае ($f\equiv 0$) — вид

$$2l_p < (M-m)\min\left\{\frac{\sqrt{\lambda_{k_1}-\gamma_{k_1}^2}}{\gamma_{k_1}}, \frac{s_{k_1+1}}{\sqrt{a_{k_1+1}^2+s_{k_1+1}^2}}, \frac{s_{k_2}}{\sqrt{a_{k_2}^2+s_{k_2}^2}}, \sqrt{\frac{\lambda_M - M^2}{\lambda_M}}\right\}.$$

Также в указанных случаях рассмотрено дополнительное условие отсутствия слабой диссипации (то есть $\gamma_w = 0$). Имеют место следующие следствия теоремы 2.2.

Теорема 3.3. *Пусть f липшецева с константой l_u, а $g\equiv 0$. Пусть существует такое N, для которого выполнено $\lambda_N < \lambda_{N+1} \leqslant \dfrac{1}{2\gamma_s^2}$ и имеет место неравенство*

$$2l_u < \sup_{\gamma_s\lambda_N \leqslant m < \gamma_s\lambda_{N+1}} \{(\gamma_s\lambda_{N+1}-m)\min\{\widetilde{\varkappa}_1(m), \widetilde{\varkappa}_N(m), \widetilde{\varkappa}_{N+1}(\gamma_s\lambda_{N+1})\}\},$$

где обозначено

$$\widetilde{\varkappa}_k(a) = |a-\gamma_s\lambda_k| + \sqrt{a^2 - 2\gamma_s\lambda_k a + \lambda_k}.$$

Тогда у задачи (4), (5) с $\gamma_w = 0$ в пространстве $\mathcal{H}$ существует $2N$-мерное инерциальное многообразие.

Теорема 3.4. *Пусть g липшецева с константой l_p, а $f\equiv 0$. Пусть существует такое N, для которого выполнено $\gamma_s\lambda_N \leqslant m < \gamma_s\lambda_{N+1} \leqslant \dfrac{1}{2\gamma_s}$, и имеет место неравенство*

$$2l_p < (\gamma_s\lambda_{N+1}-m)\min\left\{\frac{s_1}{\sqrt{a_1^2+s_1^2}}, \frac{s_N}{\sqrt{a_N^2+s_N^2}}, \sqrt{1-\gamma_s^2\lambda_{N+1}}\right\},$$

где

$$a_k = \max\{0, \alpha_k\}, \quad s_k = \sqrt{m^2 - 2\gamma_k m + \lambda_k} + \sqrt{(m-\gamma_k)^2 - (\gamma_k - a_k)^2},$$

$$\alpha_k = \gamma_k - (m-\gamma_k)\frac{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{m^2 - 2\gamma_k m + \lambda_k} + \gamma_k(m-\gamma_k)}{(m-\gamma_k)^2 + \lambda_k}.$$

Тогда у задачи (4), (5) *с* $\gamma_w = 0$ *в пространстве* $\mathcal{H}$ *существует* $2N$*-мерное инерциальное многообразие.*

В **Приложении А** стандартным методом Галеркина доказывается корректность рассматриваемой задачи (4), (5).

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук Горицкому Андрею Юрьевичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также доктору физико-математических наук Чепыжову Владимиру Викторовичу за плодотворные обсуждения и полезные книги и статьи.

Работы автора по теме диссертации

В научных журналах, находящихся в перечне ВАК

1. N. A. Chalkina, *Sufficient Condition for the Existence of an Inertial Manifold for a Hyperbolic Equation with Weak and Strong Dissipation.* Russ. J. Math. Phys. 2012, V. 19, no. 1, pp. 11–20.

2. Н. А. Чалкина, *Инерциальное многообразие для гиперболического уравнения с диссипацией.* Вестн. моск. ун-та сер. 1, Математика. Механика. 2011, no. 6, стр. 3–7.

3. Н. А. Чалкина, *Инерциальное многообразие и условие спектральной щели для сильнодиссипативного гиперболического уравнения.* Дифференциальные уравнения, 2011, Т. 47, №11, стр. 1658.

В прочих научных журналах и материалах научных коференций

4. Н. А. Чалкина, *Об экспоненциально притягивающем инерциальном многообразии для гиперболического уравнения с диссипацией.* Материалы докладов XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», М.: Издательство МГУ; СП МЫСЛЬ, 2008, стр. 60.

5. N. A. Chalkina, A. Yu. Goritsky, *Inertial manifolds and gap property for dissipative hyperbolic equations.* Сборник тезисов XXIII совместного заседания Московского математического общества и семинара им. И.Г. Петровского. Москва, 2011, стр. 23.

   В этой работе Горицкому А. Ю. принадлежит общий обзор ранее известных результатов об инерциальных многообразиях волнового уравнения со слабой диссипацией, Чалкиной Н. А. принадлежит формулировка теоремы о достаточных условиях существования инерциального многообразия для сильнодиссипативного волнового уравнения.

6. Н. А. Чалкина, *Инерциальное многообразие для гиперболического уравнения с сильной диссипацией.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2012», М.: МАКС Пресс, 2012, стр. 1.

7. N. A. Chalkina, *Inertial Manifolds for strongly damped wave equations.* Abstract of talks international conference in honour of Mark Vishik on occasion of his 90^{th} birthday. Moscow, 2012, P. 8.