Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Рахмонов Парвиз Заруллоевич

Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре математических и компьютерных методов анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Чубариков Владимир Николаевич
Официальные оппоненты:	Гриценко Сергей Александрович доктор физико–математических наук, профессор (НИУ «Белгородский государственный университет» заведующий кафедрой)
	Авдеев Иван Федрович кандидат физико–математических наук, доцент (ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»)
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»

Защита диссертации состоится 21 декабря 2012 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, дом 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 14 ноября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к аналитической теории чисел.
Основным предметом исследований, составляющих ее содержание, является изучение поведения коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа и вывод асимптотической формулы в обобщенной тернарной проблеме Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых и целой части нецелой степени натурального числа. Тригонометрические суммы впервые появились у Гаусса при доказательстве закона взаимности квадратичных вычетов. Он исчерпывающим образом исследовал важнейшие свойства носящей его имя “*суммы Гаусса*”. Тригонометрические суммы в дальнейшем стали мощным средством решения ряд важных проблем теории чисел. При этом, основной в отношении таких сумм стала проблема разыскания их возможно более точной оценки, то есть возможно более точной верхней границы их модуля.

Далее были исследованы полные рациональные тригонометрические суммы вида

$$S=\sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{f(x)}{q}\right), \tag{1}$$

где $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x$, $n>1$, $(a_n,\ldots,a_1,q)=1$. В случае простого $q=p$ наилучшая неулучшаемая оценка принадлежит А. Вейлю[1]. Он доказал, что $|S|<n\sqrt{p}$.

Первые оценки суммы (1) в случае составного q были даны Хуа[2]. Он установил неравенство вида

$$|S|\leq c(n)q^{1-\frac{1}{n}}.$$

Оно замечательно тем, что при постоянном n в смысле порядка роста правой части с возрастанием q оно, вообще говоря, уже не может быть заменено существенно лучшим. В.Н. Чубариков[3] получил оценки модуля кратной рациональной тригонометрической суммы.

[1] Weyl A. Foundations of algebraic geometry, Amer.Math.Soc.Colloquim Pub., 29 (1947).

[2] Хуа ло-Ген Метод тригонометрических сумм и его применения в теории в теории чисел. – М.: Мир, 1964.

[3] Чубариков В.Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Мат.заметки, 1976, Т.20, №1, с.61-68.

Рациональная тригонометрическая сумма, как частный случай, входит в еще более общий класс сумм вида

$$S = S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \sum_{m \le P} e(f(m)), \tag{2}$$

где $f(x) = \alpha_n m^n + \ldots + \alpha_1 m$ и $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ – любые вещественные числа. Первый общий метод нахождения нетривиальных оценок сумм (2) создал Г. Вейль[4], поэтому этим суммам дали название суммы Г. Вейля. Этот метод оценок сыграл заметную роль в развитии теории чисел: он позволил дать первые решения ряда важных проблем, в частности, найти закон распределения дробных частей многочлена $f(t)$, следствием которого является их равномерное распределение по модулю 1.

Оценки Г. Вейля, позволили дать другое решение *"проблемы Варинга"*, т.е. утверждения, что для каждого целого $n > 1$ существует $r = r(n)$ такое, что всякое натуральное число N может быть представлено в виде

$$N = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n \tag{3}$$

с целыми неотрицательными $x_1, \ldots, x_r$. Впервые это утверждение было доказано Гильбертом в 1909 г.

Харди и Литтлвуд[5] в 1919 г. разработали новый метод решения проблемы Варинга. Разработанный ими метод позволил рассматривать проблему Варинга в гораздо более полной постановке. Они рассмотрели функцию $G(n)$, представляющую собою наименьшее значение r, при котором все целые N, начиная с некоторого N_0, представляются в виде (3). Для этой функции они вывели неравенства

$$n < G(n) < n2^{n-1}h, \quad \lim_{N \to \infty} h = 1.$$

Харди и Литтлвуд при $r > (n-2)2^{n-1} + 5$ для числа $I(N)$ представлений числа N в виде (3) нашли асимптотическую формулу.

В 1924 г. И.М. Виноградов[6] представил число $I(N)$ в виде :

$$I(N) = \int_0^1 S^r(\alpha) e(-\alpha N) d\alpha, \qquad S(\alpha) = \sum_{x=1}^{P} e(\alpha x^n), \qquad P = N^{\frac{1}{n}}$$

Из этого представления для $I(N)$, используя новые оценки сумм Г. Вейля, в дальнейшем И.М. Виноградов[7] доказал, что асимптотическая формула

[4] Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann, 1916, 77, s.313–352.

[5] Hardy G.H. Litilewood J.E. The trigonometrical series associated with the elliptic θ - function, Acta.math, 37 (1914), 193-239.

[6] Виноградов И.М. Об одной общей теореме Варинга // Матем.сб., 1924, т.31, №3-4, с.490-507.

[7] Виноградов И.М. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.

Харди и Литтлвуда имеет место при

$$r \geq 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)]. \tag{4}$$

В 1934 г. И. М. Виноградов[7] нашел принципиально новую верхнюю границу для функции $G(n)$:

$$G(n) < n(6\ln n + 10).$$

Новые оценки сумм Г. Вейля (1935 г.) были получены на основе теоремы И.М. Виноградова *"о среднем значении тригонометрической суммы Г. Вейля"*, т.е. суммы вида

$$S = S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}, \qquad f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x,$$

Теорема о среднем — это теорема об оценке сверху величины J, т.е. интеграла J вида

$$J = J_b = J_b(P) = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 |S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|^{2b} d(\alpha_n, \ldots, \alpha_1),$$

который представляет собой среднее значение модуля суммы S в степени $2b$.

В 1942 году Ю.В.Линником[8] было найдено новое доказательство теоремы о среднем значении, использующее свойства сравнений по модулю степеней простого числа p. Другое p – адическое доказательство, то есть использующее свойства сравнений по модулю простого числа p, теоремы о среднем значении было получено А.А.Карацубой[9], на основе разработанного им в шестидесятых годах двадцатого века p–адического метода в данной проблематике.

И.М.Виноградов поставил проблему оценки сверху кратных тригонометрических сумм . Данная задача была решена Г.И.Архиповым[10] в начале 70-х годов прошлого века. Г.И.Архипов получил первые оценки двукратных сумм Вейля для многочленов общего вида. В 1975г. Г.И.Архипов и В.Н.Чубариков[11] дали обобщение этих результатов на кратный случай.

[8]Линник Ю В. Оценки сумм Вейля // ДАН СССР, 1942, Т.34, №7, с. 201-203.

[9]Карацуба А.А. Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ, 1962, Сер.1, №1, с.28-38.

[10]Архипов Г.И.Оценки двойных тригонометрических сумм // Труды МИАН им. В.А. Стеклова АН СССР, 1976, Т. 142, с. 46-66.

[11]Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы // Изв.АН СССР.Сер.мат., 1976, Т.40, с.209-220.

В дальнейшем Г.И.Архипов, А.А.Карацуба и В.Н.Чубариков[12] получили оценки кратных тригонометрических сумм Вейля, равномерные по всем параметрам (по длинам интервалов изменения переменных суммирования, по степени осреднения и по степени многочлена). Результаты этих исследований по кратным тригонометрическим суммам Вейля составили содержание монографии *“Теория кратных тригонометрических сумм”* [14] . В середине 80-х годов прошлого века В.Н.Чубариков получил первые оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами с многочленом общего вида в экспоненте[15].

Тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа впервые рассматривал Дезуйе[16] и при $c > 12$ получил оценку вида

$$S_c(\alpha, x) = \sum_{n \le x} e(\alpha[n^c]) \ll x^{1-\rho}, \qquad \rho^{-1} = 6c^2(\ln c + 14). \tag{5}$$

Одним из обобщений проблемы Варинга является следующая задача, в которой вместо классического уравнения Варинга (3) рассматривается уравнение вида

$$N = x_1^{[c]} + x_2^{[c]} + \ldots + x_r^{[c]} \tag{6}$$

где x_1, $x_2, \ldots x_r$ – натуральные числа, а c – нецелое число, и изучаются вопросы, связанные с его разрешимостью. Пусть $G(c)$ есть наименьшее значение k, при котором все натуральные N, начиная с некоторого, представляются в виде (6). Функция $G(c)$ аналогична функции $G(n)$ в проблеме Варинга. Дезуйе[16], воспользовавшись своей оценкой (5) доказал, что при $c > 12$ справедливо неравенство

$$G(c) < 4c\left(\ln c + \frac{1}{2}\ln\ln c + \frac{7}{2}\right),$$

что по порядку величины совпадает с оценкой функции $G(n)$, данной ранее И.М. Виноградовым (см. [17]). Дезуйе также получил асимптотическую формулу для количества решений уравнения (6) при числе слагаемых порядка $c^3 \ln c$.

---

[12] Архипов Г.И.,Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы и их приложения // Изв.АН СССР.Сер.мат., 1980, Т.44, с.723-781.

[14] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. –М.: Наука, 1987, –368с.

[15] Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР, Сер. мат., 1985, Т.49, №5. с. 1031-1067.

[16] Deshouillers J. M. Probleme de Waring avec exposants non entiers // Bull.Soc. Math. France, tom 101(1973), p. 285–295.

[17] Виноградов И.М, Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР, 1984, т.168, с.4-30.

Г.И. Архипов и А.Н. Житков[18] для среднего значения суммы $S_c(\alpha, P)$, т.е. для интеграла

$$I(P) = \int\limits_0^1 |S_c(\alpha, P)|^{2k}\, d\alpha$$

получили равномерную оценку сверху при $c > 2$. Используя эту оценку, они доказали асимптотическую формулу для количества решений уравнения (6), где $c > 12$, при числе слагаемых $k > 22c^2(\ln c + 4)$, что в точности по порядку величины повторяет оценку (4), принадлежащую И.М.Виноградову.

Оценка (5) была существенно К. Буриевым[19]. Он получил оценку

$$S_c(\alpha, x) \ll x^{1-\rho}, \quad \rho^{-1} = \begin{cases} 2^{[c+2]}, & \text{при } c < 100; \\ 2\cdot 10^3 c^2, & \text{при } c > 100, \end{cases}$$

которая являются аналогом теоремы И.М.Виноградова[17] об оценке суммы Г.Вейля на множестве точек второго класса

$$T_k(\alpha, x) = \sum_{n\le x} e(\alpha n^k) \ll x^{1-\rho}, \quad \rho^{-1} = 8k^2(\ln k + 1{,}5k + 4{,}2).$$

Основным аппаратом при решении аддитивных задач с почти равными слагаемыми являются, тригонометрические суммы, переменные суммирования в которых принимают значения из коротких интервалов. И.М. Виноградов первым начал изучать подобные тригонометрические суммы. Он [7] нашел оценки для линейной тригонометрической суммы с простыми числами, переменная суммирования которой принимает значение из короткого интервала. Пусть

$$S(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le \tau.$$

Тогда, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал, что при

$$\exp(c(\ln\ln x)^2) \ll q \ll x^{1/3}, \qquad y > x^{2/3+\varepsilon}.$$

имеет место нетривиальная оценка такой суммы.

Далее, Хазелгров[20] получил нетривиальную оценку суммы $S(\alpha, x, y)$, $y \ge x^{\theta}$, $\theta = \frac{63}{64}$, q — произвольное, и решил тернарную проблему

[18] Архипов Г.И., Житков А.Н О проблеме Варинга с нецелым показателем // Изв. АН СССР, сер. матем., 1984, т.48, №6, с.1138–1150.

[19] Буриев К. Об исключительном множестве в проблеме Харди–Литлвуда для нецелых степеней // Математические заметки, 1989, т. 46, в.4, с.127–128.

[20] Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number // J.London Math.Soc.,26 (1951),273-277.

Гольдбаха с почти равными слагаемыми, то есть показал, что диофантово уравнение

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \quad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le N^{\theta}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3.

Затем в работах[21,22,23] эта задача была решена соответственно при

$$\theta = \frac{279}{308} + \varepsilon, \quad \frac{2}{3} + \varepsilon, \quad \frac{5}{8}.$$

С.Ю.Фаткина[24] доказала при $H \ge N^{\frac{5}{8}} \ln^c N$ асимптотическую формулу для числа решений диофантова уравнения

$$N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3], \quad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[\sqrt{2}p_3] - \frac{N}{3}\right| \le H.$$

Jianya Liu и Tao Zhan[25] доказали теорему Хуа Ло–гена об представимости достаточно большого натурального числа N, $N \equiv 5 \pmod{24}$ в виде суммы пяти квадратов простых чисел в случае, когда эти слагаемые почти равны. Они показали, что достаточно большое натуральное число N, $N \equiv 5 \pmod{24}$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{11}{23} + \varepsilon}$$

Jianya Liu и Tao Zhan[25] также доказали теорему, что достаточно большое натуральное число N, можно представить в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \quad \left|p_j - \frac{N}{3}\right| \le H, \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{27}{32} + \varepsilon}$$

Цель работы.

---

[21] Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс, Ученые труды университета. сер. мат., физ. и хим. н., 3 (1955), 5–23.

[22] Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao, On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math., 2(1990), 138-147.

[23] Zhan Tao On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica, new ser., 7 (1991), No 3, 135-170.

[24] С.Ю.Фаткина Об одном обобщении тернарной проблемы Гольдбаха для почти равных слагаемых // Вестн. Моск. Ун-та. сер.1, математика. механика. 2001. №2, с. 22–28.

[25] J.Y.Liu, T Zhan. HuaЎs Theorem on Prime Squares in Short Intervals. Acta Mathematica Sinica, English Series Oct., 2000, Vol.16, No.4, pp. 669Ц690.

Изучение поведения коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа и вывод асимптотической формулы в обобщенной тернарной проблеме Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых и целой части нецелой степени натурального числа.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Получена оценка короткой тригонометрической суммы с нецелой степенью натурального числа в экспоненте.

2. Доказана асимптотическая формула для этой суммы при значениях параметра, принадлежащих малой окрестности нуля.

3. Доказана теорема, устанавливающая связь плотностных теорем для нулей дзета-функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы с поведением коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами;

4. Доказана асимптотическая формула в обобщенной тернарной проблеме Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых и целой части нецелой степени натурального числа.

Основные методы исследования

В работе используются методы аналитической теории чисел, в том числе метод оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута, метод снятия знака целой части в показателе тригонометрической суммы и формула ее остаточного члена, круговой метод Г.Харди, Д.Литтлвуда и С.Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова и методы L – рядов Дирихле, методы Ю.В. Линника и Н.Г.Чудакова, основанные на плотности нулей L – рядов Дирихле в критической полосе.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации и метод их получения представляют интерес для специалистов в области аналитической теории чисел.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно–исследовательских семинарах и научных конференциях.

1. Семинар «Аналитическая теория чисел» под руководством профессора Г.И. Архипова и профессора В.Н. Чубарикова, кафедра математических и компьютерных методов анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (неоднократно с 2009 года по 2012 год);

2. IX международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», г. Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 24-26 апреля, 2012 года;

3. Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа», Душанбе, Институт математики АН Республики Таджикистан, 29-30 июня 2012 года;

4. X международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», г.Волгоград, УКЦ ФМИФ ВГ-СПУ, 10-16 сентября 2012 года.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1–5].

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из оглавления, списка обозначений, введения, двух глав и списка литературы, включающего 28 наименований. Объём диссертации составляет 73 страницы компьютерной вёрстки в редакторе математических формул LaTeX.

Краткое содержание работы

Во введении излагается история вопроса и приводится краткий обзор результатов, связанных с темой диссертации. Также во введении формулируются основные результаты диссертации и кратко описывается ее содержание.

Первая глава диссертации состоит из четырех параграфов и посвящена исследованию поведения коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа вида

$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} e(\alpha[n^c]).$$

Первый параграф носит вспомогательный характер, в нем приведены известные результаты, которые используются в последующих параграфах. Леммы 1.1 и 1.2 содержат в себе новый метод снятия знака целой части в показателе экспоненты тригонометрической суммы, который изложен в учебнике Архипова Г.И., Садовничиго В.А., Чубарикова В.Н. *"Лекции по математическому анализу"* [26].

Во втором параграфе доказываются оригинальные леммы 1.6, 1.7 и 1.8. Они затем используются при доказательстве теорем 1.1 и 1.2.

Лемма 1.6. *Для величины*

$$\binom{c}{k} = \frac{c(c-1)\dots(c-k+1)}{k!},$$

при нецелом $c > 1$ *и натуральном* k *справедливы оценки*

$$1 < \binom{c}{k} < 2^c \qquad \text{при} \qquad k < c,$$

$$\frac{\{c\}}{k} < \binom{c}{k} < 1 \qquad \text{при} \qquad k = [c]+1.$$

При доказательстве этой лемме используется метод, с помощью которого доказывается лемма 2 в[27] (см. стр. 35).

Лемма 1.7. *Пусть* $x \ge x_0 > 0$, $10 \le y \le 10^{-9}x$, $M > 2$ *– натуральное число,* α *– вещественное число с условием* $0 < |\alpha| \le 0,5$, $c > 1$ *– нецелое число,* $k = [c]+1$,

$$W_1(h) = \sum_{x-y<n\le x} e((\alpha+h)n^c), \quad æ = \binom{c}{k}k!,$$

[26] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.:, Дрофа, 2003.

[27] Буриев К. Аддитивные задачи с простыми числами. Диссертация на соискании кандидата физ.–мат. наук. Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, 1989.

Тогда справедлива оценка

$$W_1 = \sum_{1\le|h|\le M} \frac{W_1(h))}{\alpha+h} \ll 2^k y \left(\left(æMx^{c-k}\right)^{\frac{1}{2^k-2}} + y^{-\frac{1}{2^{k-2}}} \left(æx^{c-k}\right)^{-\frac{1}{2^k-2}} \right).$$

Лемма 1.7 доказывается методом Ван – дер – Корпута.

Лемма 1.8. *Пусть* $x \ge x_0 > 0$, $10 \le y \le 10^{-9}x$, A *– фиксированное положительное число больше единицы,* $M > 2$ *– натуральное число,* $M_0 = \pi(M+0,5)$, $M_1 = M_0 \ln(\mathscr{L}^A \ln M)$, $c > 1$ *– нецелое число,* $k = [c]+1$,

$$W_2 = \sum_{x-y<n\le x} \frac{1}{\sqrt{1+M_0\sin^2\pi n^c}}, \qquad æ = \binom{c}{k} k!,$$

Тогда справедлива оценка

$$W_2 \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A} + \frac{yM_1\ln M}{M} \left(\left(æx^{c-k}M_1\right)^{\frac{1}{2K-2}} + y^{-\frac{2}{K}} \left(æx^{c-k}M_1\right)^{-\frac{1}{2K-2}} + M_1^{-1} \right).$$

Доказательство леммы 1.8 проводится на базе формулы для снятия знака целой части в экспоненте тригонометрической суммы (лемма 1.2) с последующим применением метода Ван – дер – Корпута.

Арифметическая особенность последовательности $[n^c]$ состоит, с одной стороны, в более сложном ее поведении, чем, допустим, последовательности n^k, где k – натуральное, а с другой стороны, ее значения равномерно распределены по модулю 1 в любой арифметической прогрессии.

В третьем параграфе первой главы, воспользовавшись, в частности, этой особенностью для суммы $S_c(\alpha; x, y)$, во всех точках $\alpha \in [-0,5,\ 0,5]$, за исключением только малой окрестности нуля, получена оценка, равномерная по параметру c, удовлетворяющему условиям (8), если только длина суммы – y является величиной, превосходящей квадратный корень от x.

Теорема 1.1. *Пусть* $x \ge x_0 > 0$, A *– фиксированное положительное число больше единицы,* c *– нецелое число с условиями*

$$\begin{aligned} 1 <& c \le \log_2 \mathscr{L} - \log_2 \ln \mathscr{L}^{6A}, \\ &\|c\| \ge \left(2^{[c]+1}-1\right)(A+1)\mathscr{L}^{-1}\ln\mathscr{L}. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда при $y \ge \sqrt{2cx}\,\mathscr{L}^{A+\theta}$ *и* $x^{1-c}y^{-1}\mathscr{L}^A \le |\alpha| \le 0,5$ *справедлива оценка*

$$S_c(\alpha; x, y) \ll y\mathscr{L}^{-A},$$

где $\theta = 0$ *при* $c \geq 1,1$ *и* $\theta = 0,5$ *при* $c < 1,1$.

В четвертом параграфе первой главы для числа α, принадлежащего малой окрестности нуля, доказана асимптотическая формула с остаточным членом, равномерным по параметру c, удовлетворяющему условиям (8), для еще более коротких суммы $S_c(\alpha; x, y)$.

Теорема 1.2. *Пусть* $x \geq x_0 > 0$, A *– фиксированное положительное число больше единицы,* c *– нецелое число с условиями (8). Тогда при* $y \geq (x\mathscr{L})^{\frac{1}{4-2^{2-[c]}}}$ *и* $|\alpha| \leq x^{1-c}y^{-1}\mathscr{L}^A$ *справедлива асимптотическая формула*

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \int\limits_{x-y}^{x} e(\alpha(t^c - 0,5))dt + O\left(\frac{y|\sin \pi\alpha|}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Для единообразия с теоремой 1.1 в приложениях, имея в виду, что

$$(x\mathscr{L})^{\frac{1}{4-2^{2-[c]}}} \leq (x\mathscr{L})^{\frac{1}{2}} < \sqrt{2cx}\mathscr{L}^A,$$

теорему 1.2 сформулируем в следующем ослабленном форме.

Следствие 1.2.1. *Пусть* $x \geq x_0 > 0$, A *– фиксированное положительное число больше единицы,* c *– нецелое число с условиями (8). Тогда при* $y \geq \sqrt{2cx}\,\mathscr{L}^A$ *и* $|\alpha| \leq x^{1-c}y^{-1}\mathscr{L}^A$ *справедлива асимптотическая формула*

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \int\limits_{x-y}^{x} e(\alpha(t^c - 0,5))dt + O\left(\frac{y|\sin \pi\alpha|}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 проводится методом оценок тригонометрических сумм Ван – дер – Корпута. Одним из факторов, за счет которых удается получить нетривиальную оценку короткой суммы $S_c(\alpha; x, y)$, является новый метод снятия знака целой части в экспоненте тригонометрической суммы и формула ее остаточного члена. С помощью этого метода снятия знака целой части в экспоненте тригонометрической суммы в сочетании методом Ван – дер – Корпута, грубо говоря, оценка суммы $S_c(\alpha; x, y)$, фактически сводится к оценке суммы

$$W_1(0) = \sum_{x-y<n\leq x} e(\alpha n^c),$$

т.е. к оценке суммы где уже отсутствует знак целой части.

Вторая глава диссертации состоит из трех параграфов, первый параграф которого носит вспомогательный характер, в нем приведены известные результаты, которые используются в последующих параграфах.

Во втором параграфе доказана теорема 2.1, устанавливающая связь плотностных теорем для нулей дзета-функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы с поведением линейных тригонометрических сумм с простыми числами, переменная суммирования которых принимает значение из коротких интервалов, то есть с суммами вида:

$$S(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n),$$

для точек α, принадлежащих малой окрестностью нуля.

Определение. *Пусть* $c\ge 2$ *и* $B\ge 1$ *абсолютные постоянные,* $T\ge T_0>0$, $H<T$, *тогда оценка вида*

$$N(\alpha,T+H)-N(\alpha,T)\ll H^{c(1-\alpha)}(\ln T)^B \qquad (9)$$

называется плотностной теоремой в коротких прямоугольниках критической полосы для нулей дзета – функции Римана.

Теорема 2.1. *Пусть* $x\ge x_0$, $y\ge x^{\frac{c-1}{c}}\exp(\ln x)^{0,67}$ *и* $|\alpha|\le\dfrac{x}{y^2}$. *Тогда справедливо равенство:*

$$S(\alpha;x,y)=\frac{\sin\pi\alpha y}{\pi\alpha}e\left(\alpha\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)+O\left(y\exp(-\ln^4\ln x)\right).$$

В работе[28] доказано, что неравенство (9) справедливо при

$$H\ge T^{\frac{7}{22}+\varepsilon},\qquad c=\frac{8}{3},\qquad B=50.$$

Поэтому из теоремы 2.1 имеем следующий безусловный результат.

Следствие 2.1.1. *Пусть* $x\ge x_0$, $y\ge x^{\frac{5}{8}}\exp(\ln x)^{0,67}$ *и* $|\alpha|\le\dfrac{x}{y^2}$. *Тогда справедливо равенство:*

$$S(\alpha;x,y)=\frac{\sin\pi\alpha y}{\pi\alpha}e\left(\alpha\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)+O\left(y\exp(-\ln^4 lnx)\right).$$

Доказательство теоремы 2.1 основывается на дальнейшем развитии методов работы Ю.В.Линника[29] и Н.Г.Чудакова[30], в которых, соответственно,

[28] Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета – функции Римана // УМН, 1994, Т.49, Вып. 1, с.161-162.

[29] Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Математический сборник, 1946, т. 19, вып.1, с. 3-8.

[30] Chudakov N.G. On the difference between two neighboring prime numbers // Mat. Sb., 1, 1936, 799 – 814.

исследуются тригонометрические суммы с простыми числами и задача о попадании простых чисел в короткие интервалы.

Эстерман[31] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + n^2 = N, \tag{10}$$

где p_1, p_2 — простые числа, n — натуральное число.

В.Н.Чубариков поставил следующую задачу. *Рассмотрим уравнение (10), в котором слагаемое n^2 заменится на $[n^c]$, где c – нецелое фиксированное число. Исследовать его при более жестких условиях, а именно, когда слагаемые почты равны.* Эту задача мы называем *обобщенной тернарной проблемой Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми.*

Во третьем параграфе второй главы, прилагая теоремы 1.1 и 1.2 и следствие 2.1.1 теоремы 2.1, доказана теорема 2.2 об асимптотической формуле в обобщенной тернарной проблеме Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми.

Теорема 2.2. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, c – нецелое фиксированное число с условиями*

$$c > \frac{4}{3} + \mathscr{L}^{-0,3}, \qquad \|c\| \geq 3c\left(2^{[c]+1} - 1\right)\mathscr{L}^{-1}\ln\mathscr{L}.$$

Тогда при $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2$ для $I(N,H)$ — число решений уравнения

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N, \quad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[n^c] - \frac{N}{3}\right| \leq H \tag{11}$$

в простых чисел p_1, p_2 и натурального n справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{18}{3^{\frac{1}{c}}c} \cdot \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^3}\right)$$

Доказательство теоремы 2.2 проводится круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова и его основу составляют следующие результаты.

- Теорема 1.1 об оценке коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа $S_c(\alpha; x, y)$ для всех точках $\alpha \in [-0,5,\ 0,5]$, включая окрестности точек с малыми знаменателями, за исключением только малой окрестностью нуля.

[31] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc., 11(1937), pp. 501-516.

- Теорема 1.2 об асимптотической формуле с остаточным членом суммы $S_c(\alpha; x, y)$ для точек α, принадлежащих малой окрестностью нуля.

- Следствие 2.1.1 теоремы 2.1 о поведении коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами $S(\alpha; x, y)$ для точекα, принадлежащих малой окрестностью нуля.

Следствие 2.2.1. *Существует N_0 такое, что каждое натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммы двух простых чисел p_1, p_2 и целой части степени c натурального числа n с условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq N^{1-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2, \quad i = 1, 2,$$
$$\left|n - \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{c}}\right| \leq \frac{3}{3^{\frac{1}{c}}\, c}N^{\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2 - \frac{9(c-1)}{3^{\frac{1}{c}}\, 2c^2}\mathscr{L}^4 + 1$$

где c – нецелое фиксированное число с условиями

$$c > \frac{4}{3} + \mathscr{L}^{-0,3}, \qquad \|c\| \geq 3c\left(2^{[c]+1} - 1\right)\mathscr{L}^{-1}\ln\mathscr{L}.$$

В заключение автор приносит глубокую благодарность научному руководителю В.Н.Чубарикову за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе.

Публикации по теме диссертации

1. Рахмонов П.З. Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа // Вестн. Моск. Ун-та. сер.1, математика. механика, 2012. №6, 51–55.

2. Рахмонов П.З. Оценка коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа // Доклады АН Республики Таджикистан, 2012, том 55, №3, с. 185-191.

3. Рахмонов П.З. Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа // Тезисы докладов IX Международной конференции «Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения», Тула, 24-26 апреля 2012 года, с.

4. Рахмонов П.З. Тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа вида // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа», Душанбе, 29-30 июня 2012 года, с. 143–144.

5. Рахмонов П.З. Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа // Тезисы докладов X Международной конференции «Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения», Волгоград, 10–16 сентября 2012 года, с. 57-58.