МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 512.643+512.555

СЕМЕНОВ ПАВЕЛ ПАВЛОВИЧ

Автоморфизмы, эндоморфизмы и элементарная эквивалентность полугрупп неотрицательных матриц

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, доцент Бунина Елена Игоревна
	доктор физико-математических наук, профессор Михалев Александр Васильевич
Официальные оппоненты:	Кожухов Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет МИЭТ, профессор.
	Ширшова Елена Евгеньевна, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО Московский педагогический государственный университет, профессор.
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого

Защита диссертации состоится "18" января 2013 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "18" декабря 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Работа посвящена автоморфизмам, эндоморфизмам и элементарной эквивалентности полугрупп неотрицательных обратимых матриц над кольцами с различными типами упорядочения.

Матричные группы — традиционный объект исследования математиков. Различные вопросы, связанные с их структурой, изучались К. Жорданом, Л. Диксоном, Б. ван дер Варденом, Г. Вейлем, Ж. Дьедонне, Ж. Титсом и их многочисленными последователями в огромном количестве работ. Ко второй половине XX века сложилось несколько крупных направлений исследования линейных групп, среди которых изучение нормальных подгрупп, описание линейных групп с помощью образующих и определяющих соотношений, описание подгрупп, порожденных некоторыми специальными элементами, а также описание автоморфизмов и изоморфизмов между линейными группами. Изучение автоморфизмов классических групп началось работой Шрайера и Ван-дер-Вардена[1] 1928 г., в которой были описаны автоморфизмы группы PSL_n $(n \geqslant 3)$ над произвольным полем. Затем Дьедонне[2] в 1951 г. и Рикарт[3] в 1950 г. ввели метод инволюций, с помощью которого были описаны автоморфизмы группы GL_n $(n \geqslant 3)$ над телом. Автоморфизмы линейных групп над кольцами были описаны Хуа Логеном и Райнером[4] в 1951 г. (GL_n $(n \geqslant 3)$ над кольцом целых чисел), Лэндином и Райнером[5] в 1957 г., а также Вань Чжесянем[6] (некоммутативные области главных идеалов), О'Мирой[7] в 1976 г. (области целостности). Также результаты по автоморфизмам и изоморфизмам линейных групп над различными типами колец получали Помфрэ и Макдональд[8] (1972 г.), Г.А. Носков[9] и В.Я. Блошицын[10] (1975 г.), В.С. Дроботенко

---

[1]Schreier O., van der Varden B.L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1928, 6, 303–322.

[2]Dieudonne J. On the automorphisms of the classical groups. Mem. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 1–95.

[3]Rickart C.E. Isomorphic group of linear transformations. Amer. J. Math, 1950, 72, 451–464.

[4]Hua L.K., Reiner I., Automorphisms of unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc., 71, 1951, 331–348.

[5]Landein I., Reiner I. Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain. Ann. Math., 1957, 65(3), 519–526.

[6]Wan C.A. The automorphism of linear group over a noncommutative principal ideal domain of characteristic $\neq 2$. Acta Math. Sinica, 1957, 7, 533–573.

[7]O'Meara O.T., The automorphisms of linear groups over any integral domain, J. reine angew. Math., 223, 1966, 56–100.

[8]Pomfret I., McDonald B.R. Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$, R a local ring. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 173, 379–388.

[9]Носков Г.А. Автоморфизмы группы $\mathrm{GL}_n(O)$ при $\dim Max(O) \leqslant n-2$. Мат. Заметки, 1975, 17(2), 285–291.

[10]Блошицын В.Я. Автоморфизмы общей линейной группы над коммутативным кольцом, не порождаемым делителями нуля. Алгебра и логика, 1978, 17(6), 639–642.

и Э.Я. Погориляк[11] (1977 г.), Макдональд[12] (1978 г.), Уотерхауз[13] (1980 г.), В.М. Петечук[14] и[15] (1980–1982 гг.) Одними из самых больших результатов в теории автоморфизмов и изоморфизмов матричных групп были их описания для некоммутативных колец. Именно, в 1980-х годах в работе[16] И.З. Голубчиком и А.В. Михалевым было дано описание изоморфизмов групп $\mathrm{GL}_n(R)$ и $\mathrm{GL}_m(S)$ над ассоциативными кольцами R и S с $\frac{1}{2}$ при $n, m \geqslant 3$, и несколько иным способом в работе Е.И. Зельманова[17]. Затем, в 1997 году И.З. Голубчиком[18] описание изоморфизмов между общими линейными группами было продолжено на случай произвольных ассоциативных колец и $n, m \geqslant 4$. Параллельно с описаниями автоморфизмов и изоморфизмов общих линейных групп и их стандартных подгрупп рассматривалась структура полугрупп неотрицательных обратимых матриц над различными типами упорядоченных колец. В 1970 г. А.В. Михалевым и М.А. Шаталовой[19] были описаны изоморфизмы и антиизоморфизмы полугрупп неотрицательных обратимых матриц над линейно упорядоченными телами. В 2003 г. эта теория была продолжена Е.И. Буниной и А.В Михалевым[20], которые описали все изоморфизмы и автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц (размера $n \geqslant 3$) над произвольными линейно упорядоченными кольцами с обратимой двойкой. В данной диссертации описание автоморфизмов и изоморфизмов полугрупп неотрицательных обратимых матриц распространено на коммутативные частично упорядоченные кольца с некоторым обратимым натуральным числом, а также на кольцо целых чисел (результаты опубликованы в работах [2] и [3]). Более того, для коммутативных линейно упорядоченных колец с 1/2 описаны [5] не только автоморфизмы, но и все эндоморфизмы рассматриваемых полугрупп.

[11]Дроботенко В.С., Погориляк Е.Я. Автоморфизмы полной линейной группы над некоммутативным полулокальным кольцом. УМН, 1977, 32(2), 157–158.

[12]McDonald B.R., Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$., Trans. Amer. Math. Soc., 215, 1976, 145–159.

[13]Waterhouse W.C. Automorphisms of $GL_n(R)$. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, 79, 347–351.

[14]Петечук В.М. Автоморфизмы групп SL_n, GL_n над некоторыми локальными кольцами. Математические заметки, 28(2), 1980, 187–206.

[15]Петечук В.М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. Математический сборник, 1982, 117(4), 534–547.

[16]Голубчик И.З., Михалев А.В. Изоморфизмы общей линейной группы над ассоциативным кольцом. Вестник МГУ, серия математика, 1983, 3, 61–72.

[17]Зельманов Е.И. Изоморфизмы полных линейных групп над ассоциативными кольцами. Сибирский математический журнал, 1985, 26(4), 49–67.

[18]И.З. Голубчик. Линейные группы над ассоциативными кольцами. Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук. Уфа, 1997.

[19]А. В. Михалев, М. А. Шаталова. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами. Математический сборник, 1970, 81(4), 600–609.

[20]Е.И. Бунина, А.В. Михалев. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами. Фундаментальная и прикладная математика, 2005, 11(2), 3–23.

Для полугруппы неотрицательных обратимых матриц размера 2 верны не все результаты, доказанные в данной диссертации для $n > 2$. Если кольцо R — частично упорядоченное коммутативное (или не содержит делителей нуля), в нем обратим какой-то натуральный элемент n и конус положительных элементов порождается обратимыми положительными элементами кольца, то верно, что все автоморизмы полугруппы размера два стандартны (Е.И. Бунина, Л.В. Тупикина[21], 2010).

Если алгебра рассматривает различные модели (группы, кольца и т. п.) с точностью до изоморфизма, то теорию моделей интересует классификация структур с точностью до элементарной эквивалентности.

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ (например, две группы или два кольца) называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}'$. Любые две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны.

Испытательным полигоном для большинства результатов теории моделей служат алгебра, теория чисел и анализ. Ряд интересных задач в теории групп возник в связи с применением в ней теоретико-модельных методов. К их числу относится проблема классификации групп (или полугрупп) с точностью до элементарной эквивалентности, или в другой формулировке — проблема классификации *полных теорий* групп. Весьма прозрачная и полезная в приложениях классификация абелевых групп по элементарным свойствам получена в 1954 г. польским математиком Шмелевой[22]. В настоящее время известны несколько доказательств ее результатов, полученных либо методом модельной полноты[23], либо переходом к насыщенным группам[24]. Проблема классификации (полу)групп по элементарным свойствам, как правило, является трудной задачей. Удовлетворительные результаты по ее решению получены для абелевых групп (как сказано выше), свободных групп[25],[26], для некоторых классов нильпотентных групп[27] и для различных классов матричных

[21] Е.И. Бунина, Л.В. Тупикина. Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над кольцами. Фундаментальная и прикладная математика, 2010, 16(7)б 49–60.

[22] Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups. — Fundamenta Mathematica, 1955, 41, 203–271.

[23] Каргаполов М. И. Об элементарной теории абелевых групп. — Алгебра и логика, 1963, 1(6), 26–36.

[24] Eklof P. C., Fisher E. R. The elementary theory of Abelian groups. Ann Math. Logic, 1972, 4(2), 115–171.

[25] Kharlampovich Olga, Myasnikov Alexei. Elementary theory of free non-abelian groups. Journal of Algebra, 2006, 302, 451–552

[26] Sela Z. Diophantine geometry over groups and the elementary theory of free and hyperbolic groups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), pp. 87 92, Higher Ed. Press, Beijing, 2002

[27] Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп. В кн. *Мат. логика и теория алгоритмов*, Новосибирск, Наука, 1982, 56–87.

групп и полугрупп (см. далее). Впервые вопросы связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были рассмотрены в 1961 г. А.И. Мальцевым в работе[28]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ ($G = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}$, $n, m \geqslant 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны. Продолжение эта теория получила в 1992 году, когда с помощью конструкции ультрапроизведения и теоремы Кейслера–Шелаха об изоморфизме К.И. Бейдар и А.В. Михалев в работе[29] нашли общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур и обобщили теорему Мальцева для случая, когда K и L являются телами и ассоциативными кольцами. Продолжением исследований в этой области явились работы Е.И. Буниной 1998–2010 гг.[30],[31], в которых результаты А.И. Мальцева была распространены на унитарные линейные группы над телами и ассоциативными кольцами с инволюцией, а также на группы Шевалле над полями и локальными кольцами. В 2003 г. Е.И. Бунина и А.В. Михалев[32] описали элементарные свойства полугрупп неотрицательных обратимых матриц над линейно упорядоченными кольцами. Элементарные свойства полугрупп неотрицательных обратимых матриц над частично упорядоченными коммутативными кольцами были изучены в данной диссертации и опубликованы в работе [4].

Цель работы и основные задачи. Цель данной работы состоит в развитии старых и создании новых универсальных методов исследования автоморфизмов, эндоморфизмов и элементарной эквивалентности полугрупп неотрицательных обратимых матриц над различными типами упорядоченных колец, в точном описании автоморфизмов и эндоморфизмов данных полугрупп. Основными задачами диссертации являются: описание (доказательство стандартности) автоморфизмов полугрупп неотрицательных обратимых матриц над частично упорядоченными коммутативными кольцами; нахождение необходимых и достаточных условий того, что данные полугруппы были элементарно эквивалентны; описание автоморфизмов полугрупп неотрицательных обратимых матриц над целыми числами; описание эндоморфизмов

[28]Мальцев А.И. Об элементарных свойствах линейных групп. Проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961, 110–132.

[29]Beidar C.I., Michalev A.V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups. Contemporary mathematics, 1992, 131, 29–35.

[30]Бунина Е.И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле. Успехи Мат. наук, 2001, 56(1), 157–158.

[31]Бунина Е.И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами. Математический сборник, 2010, 201(3), 3–20.

[32]Е.И. Бунина, А.В. Михалев. Элементарная эквивалентность полугрупп обратимых матриц с неотрицательными элементами. Фундаментальная и прикладная математика, 2006, 12(2), 39-53.

полугрупп неотрицательных обратимых матриц над линейно упорядоченными коммутативными кольцами с обратимой двойкой.

Основные методы исследования. В работе используются классические методы структурной теории колец, линейной алгебры, теории автоморфизмов линейных групп, теории моделей и математической логики. Также разработаны некоторые новые исследования обратимых неотрицательных матриц.

Научная новизна.
Основные результаты работы являются новыми. Среди них:

- Полное описание (доказательство стандартности) автоморфизмов полугрупп неотрицательных обратимых матриц над частично упорядоченными коммутативными кольцами кольцами с обратимой двойкой.
- Описание элементарных свойств и элементарной эквивалентности полугрупп неотрицательных обратимых матриц над частично упорядоченными коммутативными кольцами.
- Описание автоморфизмов полугрупп неотрицательных обратимых матриц над целыми числами.
- Описание эндоморфизмов полугрупп неотрицательных обратимых матриц над линейно упорядоченными коммутативными кольцами с обратимой двойкой.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных задачах теории групп, теории колец, линейной алгебры, математической логики, теории моделей.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались

- На семинарах "Кольца и модули" и "Алгебра и теория моделей" кафедры высшей алгебры МГУ (неоднократно) в 2007-2012 гг.
- На Второй международной конференции "Матричные методы и операторные уравнения", 2007, Москва, Россия.
- На Международной алгебраической конференции, посвященной 75-летию профессора Шункова, 2007, Красноярск, Россия.
- На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, 2008, Москва, Россия.

- На Международной алгебраической конференции на Украине, 2009, Харьков, Украина.
- На Международном алгебраическом симпозиуме, посвященном 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалева, 2010, Москва, Россия.
- На 9-ой Международной летней школе "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры 2011, Эрлагол, Россия.

Большинство результатов диссертации вошло в тезисы этих конференций.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 5-ти работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, разбитых на параграфы (нумерация параграфов подчинена нумерации глав, нумерация теорем подчинена нумерации глав) и списка литературы. Полный объем диссертации — 103 страницы, библиография включает 61 наименование, из которых 5 — публикации автора по теме диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введем основные определения.

Определение 1. Пусть R — упорядоченное кольцо, $G_n(R)$ — подполугруппа линейной группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными элементами.

Определение 2. Пусть $E = E_n$, $\Gamma_n(R)$ — группа, состоящая из всех обратимых матриц из $G_n(R)$, $\mathbf{S}_n$ — симметрическая группа порядка n, S_σ — матрица перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_n$ (т. е. матрица $(\delta_{i\sigma(j)})$, где $\delta_{i\sigma(j)}$ — символ Кронекера), $\mathrm{diag}\,[d_1, \dots, d_n]$ — диагональная матрица с элементами $d_1, \dots, d_n$ на диагонали, $d_1, \dots, d_n \in R_+^*$ — неотрицательные обратимые элементы кольца. Через $D_n(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_n(R)$.

Определение 3. Через $B_{ij}(x)$ обозначим матрицу $E + xE_{ij}$. Пусть $\mathbf{P}$ обозначает подполугруппу в $G_n(R)$, порожденную всеми матрицами S_σ ($\sigma \in \mathbf{S}_n$), $B_{ij}(x)$ ($x \in R_+, i \neq j$) и $\mathrm{diag}\,[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in D_n(R)$.

Определение 4. Две матрицы $A, B \in G_n(R)$ называются $\mathcal{P}$-эквивалентными, если существуют матрицы $A_j \in G_n(R)$, $j = 0, \dots, k$, $A = A_0, B = A_k$, и матрицы $P_i, \widetilde{P}_i, Q_i, \widetilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \dots, k-1$ такие, что $P_i A_i \widetilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \widetilde{Q}_i$.

Определение 5. Через $\mathrm{GE}_n^+(R)$ обозначим подполугруппу в $G_n(R)$, порожденную всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

Глава 1 посвящена изучению автоморфизмов полугрупп неотрицательныхобратимых матриц над частично упорядоченными, коммутативными кольцами с 1/2. В 1970 году в работе [**?**] А.В. Михалев и М.А. Шаталова описали все автоморфизмы (и антиизоморфизмы) полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geqslant 2$. В 1998 году в работе [**?**] Е.И. Бунина и А.В. Михалев описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, если R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с 1/2, $n \geqslant 3$. В главе 1 данной диссертации описываются автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является коммутативным частично упорядоченным кольцом, содержащим 1/2, $n \geqslant 3$. Основные сложности в работе возникают из-за того, что при частичном порядке не получается описать все обратимые элементы полугруппы, как в случае линейного порядка.

Основными объектами, рассматриваемыми в первой главе, являются полугруппа $G_n(R)$ над коммутативным частично упорядоченном кольцом R (с обратимой двойкой), ее подгруппа $\mathbf{P}$, порожденная матрицами подстановок, диагональными матрицами и матрицами $B_{i,j} = E + E_{i,j}$ и полугруппа $GE_n^+(R)$, являющаяся естественным расширением полугруппы $\mathbf{P}$.

В первом параграфе приводятся основные определения и обозначения, определяются три типа автоморфизмов полугруппы $G_n(R)$, называемые *стандартными*:

Центральные гомотетии. Если G — некоторая полугруппа, то гомоморфизм $\lambda : G \to G$ называется *центральным гомоморфизмом* G, если $\lambda(G) \subset \mathbf{Z}(G)$. Отображение $\Omega : G \to G$ такое, что $\forall X \in G$

$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X,$$

где λ — центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией.*

Кольцевые автоморфизмы. Пусть $\rho : R_+ \to R_+$ — автоморфизм полукольца неотрицательных элементов R. Отображение $(a_{i,j}) \mapsto (\rho(a_{i,j}))$ из $G_n(R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_n(R)$, который обозначается Φ^ρ и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G_n(R)$.

Внутренние автоморфизмы. Для каждой матрицы M, обратимой в полугруппе $G_n(R)$, определен автоморфизм Φ_M полугруппы $G_n(R)$ такой, что для всех $X \in G_n(R)$ $\Phi_M(X) = MXM^{-1}$.

Автоморфизм σ группы $G_n(R)$ называется *стандартным*, если он является композицией автоморфизмов введенных трех типов.

Далее в первом параграфе формулируется следующая основная теорема:

Теорема 1.1. *Пусть Φ — автоморфизм полугруппы $G_n(R)$, $n \geqslant 3$, $1/2 \in R_+$. Тогда на полугруппе $GE_n^+(R)$*

$$\Phi = \Phi_M \Phi^b \Omega,$$

где $M \in \Gamma_n(R)$, $b \in \operatorname{Aut}(R_+)$, Ω — центральная гомотетия полугруппы $GE_n^+(R)$.

Доказательство этой теоремы состоит из трех основных шагов:

Во втором параграфе ищется матрица M, такая что $\Phi'(S_\sigma) = \Phi_M \circ \Phi(S_\sigma) = \alpha^{sgn(\sigma)} S_\sigma$, где $\alpha^2 = 1$. Доказательство состоит из многих шагов, так сначала в себя переводятся подстановка вида $(12)(34)\ldots(2k-1,2k)\ldots$, далее — пошагово — другие "похожие"подстановки из $\mathbf{S}_n$, являющиеся произведениями непересекающихся транспозиций.

В третьем параграфе мы уже считаем, что данный нам автоморфизм Φ обладает свойством $\Phi(S_\sigma) = \alpha^{sgn(\sigma)} S_\sigma$ для всех $\sigma \in \mathbf{S}_n$. В этих предположениях показано, что существует кольцевой автоморфизм Φ^b, такой что $\Phi^b \circ \Phi(B_{i,j}(x)) = B_{i,j}(x)$ для всех $i \neq j$, $x \in R_+$.

В четвертом параграфе рассматриваемый автоморфизм Φ заменяется на композицию $\Phi^b \circ \Phi$, после чего показано, что этот автоморфизм является центральной гомотетией на полугруппе $GE_n^+(R)$. Этим и завершается доказательство основной теоремы.

Также доказано, что представление автоморфизма полугруппы $GE_n^+(R)$ в виде композиции трех стандартных (внутреннего, кольцевого и центрального) автоморфизмов единственно.

Глава 2 посвящена элементарной эквивалентности полугрупп неотрицательных обратимых матриц над частично упорядоченными коммутативными кольцами. Теоремы об элементарной эквивалентности линейных групп восходят к А.И. Мальцеву, доказавшему в 1961 году, что линейные (GL , SL)

и проективные линейные (PGL , PSL) группы над полями элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают, а поля элементарно эквивалентны.

Во второй главе доказывается аналогичный результат для полугрупп неотрицательных обратимых матриц. Для произвольных частично упорядоченных коммутативных колец с обратимой двойкой доказано, что из элементарной эквивалентности полугрупп обратимых неотрицательных матриц над ними (при размерностях, не меньших трех) следует совпадение размерностей и элементарная эквивалентность полуколец неотрицательных элементов соответствующих колец.

Теорема 2.1. *Если полугруппы $G_n(R)$ и $G_m(S)$ (R, S — коммутативные, частично упорядоченные кольца с $1/2$, $n \geqslant 3$) элементарно эквивалентны, то $m = n$ и полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны.*

По структуре полугруппы в данном случае никак не получается определить структуру кольца R, поэтому доказанная теорема не является критерием. Приводится пример, когда обратное утверждение неверно. Однако в случае, если положительный конус порождает все кольцо ($\forall r \in R\, \exists r_1, r_2 \in R_+(r = r_1 - r_2)$), доказано, что из элементарной эквивалентности полуколец следует элементарная эквивалентность соответствующих полугрупп, т.е. для коммутативных колец с обратимой двойкой, в которых положительные элементы порождают все кольцо, верен критерий элементарной экививалентности полугрупп неотрицательных обратимых матриц:

Теорема 2.2. *Пусть R, S — коммутативные частично упорядоченные кольца с $1/2$, каждое из которых порождается своими положительными элементами, $n \geqslant 3$. Тогда полугруппы $G_n(R)$ и $G_m(S)$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда $m = n$ и полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны.*

Для того, чтобы из элементарной эквивалентности полуколец неотрицательных элементов $R_+ \equiv S_+$ следовала элементарная эквивалентность полугрупп обратимых неотрицательных матриц над этими кольцами $G_n(R) \equiv G_n(S)$, достаточно только того, что кольца порождлись своими положительными элементами (не требуется ни коммутативность, ни обратимость двойки, ни условие $n \geqslant 3$).

Глава 3 диссертации посвящена автоморфизмам полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 2$. Несмотря на то, что автоморфизмы полугрупп неотрицательных матриц были описаны для достаточно широкого класса колец, везде требовалась обратимость двойки (или хотя бы какого-то другого натурального числа). Поэтому задача для целых чисел ранее не была решена. Методы, которые использовались в данной части работы, сильно ориентированы на целые числа и не переносятся автоматически на какой-либо другой класс колец. Основными результатами главы 3 являются две теоремы (для $n = 2$ и $n \geqslant 3$):

Теорема 3.1. *Полугруппа* $G_2(\mathbb{Z})$ *имеет четыре автоморфизма*:
1) *тождественный* (Φ_1);
2) *сопряжение матрицей* $S = S_{(1,2)}$ (Φ_2);
3) *автоморфизм* Φ_3, *при котором* $\Phi_3(S) = S$, $\Phi_3(B_{1,2}(1)) = SB_{1,2}(1)$;
4) *автоморфизм* $\Phi_4 = \Phi_2 \circ \Phi_3$.
Последние два автоморфизма не продолжаются на всю группу $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Теорема 3.2. *Любой автоморфизм полугруппы* $G_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$, *является сопряжением с помощью некоторой матрицы* S_σ, $\sigma \in S_n$.

Для доказательства теоремы 3.2 отдельно рассматриваются случаи $n = 3$ и $n \geqslant 4$. Основными в третьей главе являются вычисления в целых числах.

В четвертой главе диссертации рассматриваются эндоморфизмы полугрупп неотрицательных обратимых матриц над линейно упорядоченными коммутативными кольцами с $1/2$. Так же как и в случае автоморфизмов, хочется описать все эндоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ — доказать, что они раскладываются в композицию каких-то стандартных. Это получается, если эндоморфизмы имеют достаточно большой образ.

Основная теорема главы 4 формулируется следующим образом:

Теорема 4.1. *Пусть эндоморфизм* Φ *таков, что* $\Phi(B_{i,j}(1)) \neq E_n$. *Тогда существуют* $M \in \Gamma_n(R)$, $b \in \mathrm{End}\,(R_+)$, *центральная гомотетия* Ω, *такие что* Φ *совпадает с* $\Phi_M \circ \Phi^b \circ \Omega$ *на полугруппе* $GE_n^+(R)$.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1. Доказано, что любой автоморфизм полугруппы $G_n(R)$, где R — частично упорядоченное коммутативное кольцо с $1/2$, совпадает со стандартным автоморфизмом на полугруппе $GE_n^+(R)$ (т.е. является композицией внутреннего, полукольцевого и центрального автоморфизмов).

2. Доказано, что если полугруппы $G_m(R)$ и $G_n(S)$ (R, S — коммутативные частично упорядоченные кольца с $1/2$, $n \geqslant 3$) элементарно эквивалентны, то

$m = n$ и полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны. Если дополнительно каждое из колец R и S порождается полукольцами неотрицательных элементов R_+ и S_+ соответственно, то полугруппы $G_m(R)$ и $G_n(S)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалетны.

3. Доказано, что у полугруппы $G_2(\mathbb{Z})$ ровно четыре автоморфизма, два из которых не являются стандартными. Все эти четыре автоморфизма перечислены явно.

4. Доказано, что у полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$, при $n \geqslant 3$, любой автоморфизм является сопряжением матрицей подстановки.

5. Описаны эндоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, где R — линейно упорядоченное коммутативное кольцо с обратимой двойкой. Эндоморфизм либо является стандартным (на полугруппе $GE_n^+(R)$ совпадает с композицией внутреннего автоморфизма, эндоморфизма полукольца R_+ и центральной гомотетии), либо эндоморфизм переводит все элементарные матрицы $B_{i,j}(x) = E + xE_{ij}$ в единичную матрицу.

Автор выражает благодарность своим научным руководитлям д. ф.-м. н., профессору Михалеву Александру Васильевичу и д. ф.-м. н. Буниной Елене Игоревне за постановку задач и постоянный интерес к работе.

Список литературы

[1] Е.И. Бунина, П.П. Семенов. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцами. Тез. док. межд. конф. Алгебра и ее приложения, Красноярск, 2007, с. 23-24.

[2] Е.И. Бунина, П.П. Семенов. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами. Фундаментальная и прикладная математика, 2008, 14(2), 69–100.

[3] Семенов П.П. Автоморфизмы полугруппы неотрицательных целочисленных матриц. Математический сборник, 2012, 203 (9), 117–132.

[4] Бунина Е.И., Семенов П.П. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами. Фундаментальная и прикладная математика, 2008, 14(4), 75–85.

[5] Семенов П.П. Эндоморфизмы полугруппы неотрицательных матриц над линейно 2011-2012, 17(5), 165-178.