МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Облаков Константин Игоревич

МИНИМАЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ГРАФОВ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2012

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Богатый Семеон Антонович
Официальные оппоненты:	Агеев Сергей Михайлович доктор физико-математических наук, профессор (Беларусский университет, кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики)
	Редкозубов Вадим Виталиевич кандидат физико-математических наук ассистент (Московский физико- технический институт)
Ведущая организация:	ГБОУ ВПО „Московский городской педагогический университет“.

Защита диссертации состоится 18 января 2013 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д. 501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 18 декабря 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Работа представляет собой исследование в области геометрии и топологии Евклидовых пространств и теории графов, вложениями графов в евклидово пространство.

Различные вложения графов рассматривались в математике в течение последнего полувека. Классическими стали теоремы о вложении произвольного графа в трехмерное пространство, о минимальности и полноте семейства графов Куратовского с точки зрения невложимости в плоскость.

В задаче суперпозиции возникают базисные вложения[1]. К. Борсуком было введено понятие k–регулярных вложений компактов[2]. Эти вложения возникают в задачах интерполяции и аппроксимации. Болтянский, Рышков и Шашкин исследовали k–регулярные вложения для случая полиэдров[3]. Также ими занимались С.А. Богатый и В.М. Вылов[4],[5].

Вложения, рассматриваемые в первой главе, являются обобщением k–регулярных вложений. Богатый[6] доказал, что всякое отображение $f\colon X \to \mathbb{R}^3$ одномерного компакта в $\mathbb{R}^3$ сколь угодно малым изменением может быть превращено в такое вложение $f_\varepsilon\colon X \to \mathbb{R}^3$, что на всякой прямой в $\mathbb{R}^3$ будет лежать не более четырех точек образа $f_\varepsilon(X)$ компакта X. Укажем, что существование таких „экономичных вложений“ доказал также Гудселл[7].

Оказывается, что число 4 не может быть уменьшено не только на уровне теоремы плотности „экономичных“ отображений, но и на уровне теоремы существования. Именно, Живалевич[8] доказал, что для всякого вложения $K_{6,6}$ в $\mathbb{R}^3$ существует прямая, пересекающая граф не менее чем по четырем точкам.

---

[1]P. Ostrand *Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13.* Bull. Amer. Math. Soc, 1965, v. 7, pp. 619–622.

[2]K. Borsuk *On the k–independent subsets of the Euclidean space and of the Hilbert space.* Bull. Acad. Sci. Pol., 1957, v. 5, №4, pp. 351–356

[3]В.Г. Болтянский, С.С. Рышков, Ю.А. Шашкин *О k-регулярных вложениях и их применении к теории приближения функций.* УМН 1960, т. 15, №6 стр. 125–132

[4]С.А. Богатый *Гипотеза Борсука, препятствие Рышкова, интерполяция, аппроксимация Чебышева, трансверсальная теорема Тверберга, задачи.* Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 2002, т. 239, стр. 63–82.

[5]С.А. Богатый, В.М. Вылов *Вложения Робертса и обращение трансверсальной теоремы Тверберга.* Матем. сб., 2005, т. 196, №11, стр. 33–52

[6]С.А. Богатый *Цветная теорема Тверберг.* Вестн. Моск. Ун-та, сер. 1, математика. механика, 1999, №3, стр. 14–19.

[7]T.H. Goodsell *Strong general position and Menger curses* Topol. Appl., 2002, v. 120, №1–2, pp. 47–55.

[8]R.T. Živaljević *The Tverberg-Vrecica problem and the combinatorial geometry on vector bundles.* Israel J. Math., 1999, v. 111, pp. 53–76.

В первой главе изучается проблема существования „экономичных“ вложений в $\mathbb{R}^3$, и, в частности, усилен результат Живалевича.

Вторая и третья главы посвящены так называемой проблеме Штейнера — задаче нахождения минимальной по длине сети (одномерного связного континуума), затягивающей данное конечное множество точек на плоскости[9,10]. Эта задача имеет широкое практическое применение: транспортная задача, разводка микросхем, построение филогенетических деревьев. Оказалось, что удобно рассматривать не только кратчайшие (т.е. глобально минимальные), но и локально-минимальные сети. Локально-минимальных сетей для данного набора точек может быть несколько. Возможно даже существование нескольких глобально минимальных деревьев. Если они не сонаправлены в граничных вершинах, то малым шевелением граничных вершин можно добиться того, что только одно из деревьев останется глобально минимальным. А.О. Иванов и А.А. Тужилин доказали[11], что множество таких расположений точек, для которых не существует двух глобально минимальных деревьев открыто и всюду плотно в множестве всех расположений. Они опирались на утверждение, гласящее что не существует двух глобально минимальных деревьев, сонаправленных в вершинах. В данной работе получено обобщение этого утверждения на случай локально минимальных деревьев.

На вложения, рассматриваемые в четвертой главе, накладываются более слабые и в некотором смысле более общие условия чем k–регулярность — ограничивается количество точек, которые может содержать произвольная гиперплоскость. Практически единственным результатом, касающимся этого семейства вложений, является теорема Мэрхьюбера о том, что любое компактное множество в n–мерном пространстве, содержащее не более n точек на любой гиперплоскости, является гомеоморфным образом замкнутой части окружности[12].

Цель работы

Целью работы является нахождение минимальных графов, при любом вложении которых в трехмерное евклидово пространство найдется прямая, содержащая не менее четырех точек образа. Доказать, что на плоскости не существует двух локально минимальных сетей Штейнера, сонаправленных

[9] D. Cieslik *The Steiner Ratio of Metric Spaces.* Preprint, Inst. of Math. and CS, Ernst-Moritz-Arndt Univ., Greifswald, Germany.

[10] D. Cieslik *Steiner Minimal Trees.* London: Kluwer Academic Publishers, 1998

[11] Иванов А.О, Тужилин А.А. *Единственность минимального дерева Штейнера для границы общего положения* Матем. сб. 2006. **197**, №10, стр. 55–90.

[12] J.C. Mairhuber *On Haar's theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solutions* Proc. Amer. Math. Soc. 1956, **7**, №4, pp. 609–615

в вершинах. Изучить, на каких многообразиях верно подобное утверждение. Изучить вложения графов в евклидово пространство, при которых минимально возможное число точек образа принадлежит гиперплоскости. Найти верхнюю и нижнюю оценку минимального числа точек данного графа, принадлежащих гиперплоскости.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, за исключением открытого независимо с Р.Н. Карасевым результата о вложениях несвязных графов в трехмерное Евклидово пространство (глава 1). Укажем наиболее важные результаты:

- Описано семейство графов, каждое вложение которых в трехмерное Евклидово пространство содержит четыре точки образа, принадлежащие одной прямой, и доказана их минимальность.

- Доказано, что на плоскости не существует двух локально минимальных сетей Штейнера для данного множества точек, сонаправленных в вершинах;

- Доказано, что на цилиндре с плоской метрикой и конусе с углом развертки, кратным 60 градусам, также не существует двух сетей Штейнера, сонаправленных в вершинах.

- Получены нижняя и верхняя оценки числа точек образа графа, принадлежащих гиперплоскости, при вложении в Евклидово пространство, определяющиеся комбинаторными характеристиками графа и размерностью пространства.

Методы исследования

В работе применялись методы дифференциальной геометрии и топологии, общей теоретико-множественной топологии.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Результаты работы могут быть применены для решения задач теории графов и топологии евклидовых пространств.

Аппробация диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах.

1. научно-исследовательский семинар по общей топологии им. П. С. Александрова (семинар кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета МГУ) неоднократно (2007, 2008, 2009, 2011)

2. XV международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2008"

3. Семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений. (2011)

4. Специальный семинар "Теория экстремальных сетей". (кафедра дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ) (2007)

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 4 работы. Список приведен в конце автореферата [1-4].

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 61 странице и состоит из введения, 4 глав и списка литературы,включающего 25 наименований.

Содержание работы

Введение содержит краткий обзор результатов в данной области, перечень условных обозначений, описание основных результатов работы.

Первая глава посвящена изучению следующего свойства графов:

Определение 1. *Граф называется k–вложимым, если существует такое вложение в $\mathbb{R}^3$, что на любой прямой находится не более k точек графа.*

Очевидно, что если граф k–вложим, то он l–вложим для каждого $l > k$.

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Несвязное объединение графов Куратовского–Понтрягина ($K_5 \sqcup \sqcup K_5$, $K_5 \sqcup K_{3,3}$ или $K_{3,3} \sqcup K_{3,3}$) является минимальным не 3–вложимым графом.*

Для доказательства минимальности несвязных объединений графов Куратовского, то есть 3–вложимости любого собственного подграфа, используется следующее

Утверждение 1 (Антонова). *Если граф вкладывается в плоскость с одним самопересечением типа ребро–ребро или ребро–вершина, то его можно 3–вложить в пространство.*

Доказательстве опирается также на следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес:

Утверждение 2. *Для двух непрерывных отображений g_1, g_2 замкнутых компактных ориентируемых n–мерных многообразий M_1, M_2 в касательное пространство сферы $L(S^n)$ имеет место равенство*

$$\mathrm{coin}(g_1, g_2) = \chi(S^n) \deg(pg_1) \deg(pg_2),$$

где $p\colon L(S^n) \to S^n$ — естественная проекция.

Вторая глава посвящена сетям Штейнера на плоскости.

Теорема 2. *На плоскости не существует двух локально-минимальных деревьев с одним и тем же граничным множеством и сонаправленных в граничных вершинах.*

Приведенное в этой главе доказательство по сути доказывает более сильную теорему:

Теорема 3. *На плоскости не существует двух локально-минимальных сетей без циклов, но возможно не связных, с одним и тем же граничным множеством, сонаправленных в граничных вершинах.*

В доказательстве используется конструкция графа с цветными ребрами — он получается применением симметрической разности к сетям Штейнера, сонаправленных в вершинах сети, и последующей раскраской ребер согласно принадлежности исходным графам. После некоторых упрощающих перестроений у такого цветного графа обнаруживается важный инвариант — сумма эйлеровых характеристик цветных подкомпонент графа, лежащих внутри некоторой границы, определяется пересечением ребер графа и этой границы. В качестве границы выбирается неособая прямая, параллельная ребру цветного графа — это позволяет упростить описание.

В третьей главе результат второй главы распространен на некоторые многообразия с плоской метрикой.

Определение 2. *Обозначим за K множество цилиндров или конусов с углом развертки кратным 60°, с заданной на них плоской метрикой. Будем говорить, что поверхность является K–поверхностью, если она принадлежит K.*

Теорема 4. *На K–поверхности не существует двух локально-минимальных деревьев с одним и тем же граничным множеством и сонаправленных в граничных вершинах.*

Доказательство использует аналогичную конструкцию цветного графа, но показывается, что использованный во второй главе инвариант может быть расширен на произвольную границу односвязной области.

Также в этой главе диссертации приведен пример двух локально минимальных сетей, доказывающий неверность аналогичного утверждения для случая плоского тора.

Четвертая глава посвящена верхней и нижней оценкам числа гиперпланарности графов.

Определение 7. *Числом n–гиперпланарности графа будем называть минимум по всем вложениям данного графа в n–мерное пространство максимума по всем гиперплоскостям π числа точек пересечения образа графа с плоскостью π. Если размерность пространства ясна из контекста, это число называется просто числом гиперпланарности графа.*

Для получения верхней оценки был описан механизм вложения произвольного графа в n–мерное пространство с малым числом гиперпланарности образа. Число гиперпланарности образа зависит от следующей комбинаторной характеристики графа.

Рассмотрим некоторую нумерацию вершин графа. Для данной нумерации вершин введем частичный порядок на ребрах: ребро, соединяющее вершины i_1 и i_2 „не больше“ ребра между вершинами j_1 и j_2, когда выполняются одновременно четыре неравенства: $i_1 \leqslant j_1$, $i_2 \leqslant j_1$, $i_1 \leqslant j_2$, $i_2 \leqslant j_2$. Каждой нумерации поставим в соответствие „число максимального сечения“ — максимальное число несравнимых ребер. Оптимальной нумерацией назовем такую нумерацию вершин графа, при которой „число максимального сечения“ минимально. Если таких нумераций несколько, будем считать оптимальной одну из них. Последовательность ребер в графе назовем „согласованным с нумерацией путем“, если каждое следующее (по порядку прохождения) ребро „не больше“ предыдущего. Такой „путь“ может быть несвязен.

Числом ветвистости графа назовем минимальное такое число l, что граф можно полностью покрыть l „путями“, согласованными с оптимальной нумерацией.

Теорема 8. *При $n > 2$ любой граф можно вложить в n–мерное пространство так, что число гиперпланарности образа будет не более чем nl, где l — число ветвистости.*

Доказано, что использованные для построения вложений моментные кривые не ограничивают общность:

Теорема 9. *Для любого вложения $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ графа G с конечным числом гиперпланарности образа существует вложение f' этого графа, такое что:*

- *образы вершин графа при вложениях f и f' — одни и те же точки;*
- *образ каждого ребра под действием f' представляет собой полиномиальную кривую;*
- *на каждой гиперплоскости точек образа графа под действием f' не больше, чем под действием f.*

Для получения нижней оценки также использовались комбинаторные свойства графа:

Определение 13. *Выберем на графе G n точек, которые далее будем называть „выделенными". Назовем отображение графа G в прямую корректным, если:*

- *все выделенные точки отобразились в начало координат;*
- *если образы концов ребра не совпали, ребро линейно отображается в отрезок, соединяющий образы концов;*
- *если образы концов ребра совпали, выделим на этом ребре дополнительную точку, называемую серединой. Середина обязана отобразиться в точку прямой, не совпадающую с образом ни одной из вершин. Половины ребра линейно отображаются в отрезок, соединяющий образ середины с образом концов.*

Кратностью одномерной проекции называется максимум по всем возможным выборам выделенных точек минимума по всем корректным отображениям графа на прямую максимума кратности покрытия точки. При подсчете максимума кратности покрытия каждая выделенная точка считается не за один образ, а за $\lceil \frac{i}{2} \rceil$, где i — число выходящих из нее ребер.

Теорема 10. *Кратность одномерной проекции оценивает число гиперпланарности снизу.*

Автор выражает глубокую искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Семеону Антоновичу Богатому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

1) Антонова Т.А., Облаков К.И. *Специальные вложения графов в трехмерное пространство* Вестн. Моск. Ун-та, сер. 1, математика. механика, 2008, №6, стр. 26–31.

   Автором диссертации получено доказательство 3-вложимости конфигураций г) и е) на "шапочке".

2) Облаков К.И. *Невозможность существования различных сонаправленных локально минимальных деревьев на плоскости.* Вестн. Моск. Ун-та, сер. 1, математика. механика, 2009, №2, стр. 21–25.

3) Облаков К.И., Облакова Т.А. *Специальные вложения некоторых несвязных графов в трехмерное пространство.* Вестн. Моск. Ун-та, сер. 1, математика. механика, 2011, №2, стр. 54–56.

   Все результаты, кроме утверждения 2, получены автором диссертации.

4) Облаков К.И., Облакова Т.А. *Вложения графов в евклидово пространство, при которых число точек, принадлежащих гиперплоскости, минимально.* Матем.сб., **201**:10 (2012), 145-160

   Автором получены верхняя и нижняя оценки числа гиперпланарности в общем случае.