МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Голуб Сергей Петрович

Синтез оптимального по времени управления перемещением перевернутого стержня

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени

Кандидата физико-математических наук

Москва - 2013

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: Голубев Юрий Филиппович, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Лемак Степан Степанович, доктор физико-математических наук, профессор

Шматков Антон Михайлович, кандидат физико-математических наук

Ведущая организация: Московский энергетический институт (Национальный исследовательский университет)

Защита диссертации состоится 15 февраля 2013 года в 16 часов 30 минут на заседании совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991¸ Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций (Ломоносовский просп., 27, Фундаментальная библиотека, сектор А – 8 этаж, к.812)

Автореферат разослан _______________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Прошкин В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Задачу о стабилизации перевернутого физического маятника в различных постановках решили такие ученые как Стевенсон А., Капица П.Л., Охоцимский Д.Е., Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. и др. В одномерном варианте была решена так же задача транспортировки точки опоры перевернутого маятника в другое положение с сохранением вертикальной ориентации. Этому посвящены работы Александрова В.В., Колесникова А.А., Мартыненко Ю.Г., Медведева М.Ю., Формальского А.М. и других авторов.

В данной работе решается задача синтеза оптимального по быстродействию управления и оптимального программного управления для перемещения в горизонтальной плоскости точки опоры перевернутого стержня. Требование о сохранении вертикальной ориентации стержня в процессе движения не накладывается. Интерес к данной проблеме связан с необходимостью создания и совершенствования систем управления нетрадиционными транспортными средствами для мегаполисов. Поэтому тема диссертации является актуальной.

Научная новизна диссертации

Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми. Впервые найдена область существования решения, получено оптимальное по быстродействию программное управление и построен синтез оптимального по быстродействию управления в задаче, когда в качестве функции управления взята скорость точки опоры. Решена задача наискорейшего перевода точки опоры стержня на заданное расстояние при условии, что в начале маневра стержень был стабилизирован в верхнем положении равновесия, а в конце маневра стержень приводится тоже в верхнее положение равновесия с нулевой скоростью и ускорением в новом положении точки опоры, когда в качестве функции управления взято ускорение точки опоры. Решена задача перевода точки опоры стержня на заданное расстояние с использованием комбинированного управления, когда в качестве функции управления взято ограниченное ускорение платформы и считается, что скорость точки опоры ограничена по величине.

Достоверность результатов

Все результаты имеют строгие математические обоснования и получены на основе сформулированных в диссертации гипотез современными методами теории управления и теоретической механики.

Используемые методы

В работе используются методы теории управления, теоретической механики и компьютерной графики.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. В ней получено полное решение трудных задач оптимального управления. Полученные результаты могут найти применение в исследованиях, посвященных передвижению с помощью нетрадиционных транспортных средств типа «Сегвэй» для быстрейшего перемещения на заданное расстояние. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша, Московском энергетическом институте (Национальном исследовательском университете) и других научно-исследовательских центрах.

Апробация работы

Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Конференция-конкурс молодых ученых, НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова (2009 г.)
- Седьмой международный симпозиум по классической и небесной механике CCMECH 7 (Москва, 17-28 октября 2011 года)
- Семинар МГУ им. М.В. Ломоносова по прикладной механике и управлению (имени А.Ю. Ишлинского) под руководством проф. В.В. Александрова, проф. Н.А. Парусникова, проф. Ю.В. Болотина (2012 г.)
- Семинар Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН под руководством академика РАН Ф.Л. Черноусько (2012 г.)

– Семинар МГУ им. М.В. Ломоносова по аналитической механике и теории устойчивости (имени В.В. Румянцева) под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. А.В. Карапетяна (2012 г.)

– Семинар МГУ им. М.В. Ломоносова по динамике относительного движения под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В.Мелкумовой

– Семинар МЭИ кафедры теоретической механики и мехатроники под руководством проф. И.В. Меркурьева (2012 г.)

– Семинар МГУ им. М.В. Ломоносова по игровым задачам управления под руководством проф. М.С. Никольского (2012 г.)

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 4 публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 45 наименований и приложения с рисунками. Общий объем диссертации – 105 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель диссертации, дан обзор работ, посвященных исследованию перевернутого физического маятника, синтезу оптимального управления, а также приведено краткое описание содержания работы.

В **первой главе** сформулирована постановка задачи и выводятся уравнения движения системы.

Рассматривается система, состоящая из весомого стержня, который нижней точкой опирается на подставку в точке A, задаваемой радиус-вектором $\overline{r_s}$ и имеет массу m. В качестве лагранжевых координат стержня выбираются координаты некоторой точки B стержня. Точка B отстоит от опоры на постоянное расстояние l и характеризуется радиус-вектором $\overline{r_b}$.

Предполагается, что силовой момент в точке контакта стержня с опорой отсутствует. Воздействие подставки на стержень сводится к реакции, сосредоточенной в точке опоры.

Берется подвижная система координат S, оси которой сохраняют постоянную ориентацию, а начало A совпадает с концом вектора $\overline{r_s}$. В системе S на стержень действуют сила тяжести mg и сила инерции $-m\ddot{\overline{r}}_s$ обе приложенные к центру масс стержня C. В системе S точка опоры A неподвижна. Относительные радиус-вектор и скорость точки B стержня выражаются формулами

$$\bar{\rho}_b = \bar{r}_b - \bar{r}_s, \qquad \dot{\bar{\rho}}_b = \dot{\bar{r}}_b - \dot{\bar{r}}_s.$$

Считается, что L - длина стержня, поперечный момент инерции стержня относительно точки A равен J, а центр масс стержня отстоит от точки A на расстояние l_c, так что его относительный радиус-вектор имеет вид $\bar{\rho}_c = l_c \bar{\rho}_b / l$.

Воспользовавшись теоремой об изменении кинетического момента

$$\bar{K} = \frac{J}{l^2}\bar{\rho}_b \times \dot{\bar{\rho}}_b$$

получили уравнение

$$\ddot{\bar{r}}_b = \frac{ml_c l}{J}\bar{g} + \left(1 - \frac{ml_c l}{J}\right)\ddot{\bar{r}}_s + \lambda\bar{\rho}_b.$$

где множитель λ отвечает за выполнение связи $\bar{\rho}_b^2 = l^2$. При $l = J/(ml_c)$ уравнение движения упрощается (точка B - центр удара) и записывается в виде

$$\ddot{\bar{r}}_b = \bar{g} + \lambda\bar{\rho}_b.$$

Множитель λ находится из продифференцированного дважды уравнения связи $\bar{\rho}_b^2 = l^2$ в предположении, что движение точки опоры таково, что стержень остается вблизи вертикали, а так же во все время движения квадрат относительной скорости $(\dot{\bar{r}}_b - \dot{\bar{r}}_s)^2$ остается малым.

Выбрав неподвижную правую ортогональную систему координат $O\xi\eta\zeta$, где ось $O\zeta$ направлена вертикально вверх, а оси $O\xi$ и $O\eta$ - произвольно в горизонтальной плоскости, получили, что проекция уравнения движения на выбранные оси примет вид

$$\ddot{\xi}_b = \lambda(\xi_b - \xi_s), \qquad \ddot{\eta}_b = \lambda(\eta_b - \eta_s), \qquad \ddot{\zeta}_b = -g + \lambda(\zeta_b - \zeta_s),$$

Эти уравнения дают возможность определить движение точки опоры, обеспечивающее требуемое движение точки B.

В дальнейших исследованиях предполагается, что точка опоры стержня двигается только в горизонтальной плоскости, то есть $\ddot{\zeta}_s = 0$, при этом имеем, что $\lambda \approx g/l$ и так как стержень близок к вертикали (то есть $\zeta_b - \zeta_s \approx l$), то $\ddot{\zeta}_b = 0$. Таким образом, третье уравнение системы уравнений движения становится тождеством.

Во **второй главе** рассматривается случай, когда в качестве функции управления взята ограниченная по величине скорость точки опоры стержня. В этом случае найдена область существования решения поставленной задачи, получено оптимальное по быстродействию программное управление и построен синтез соответствующего управления.

В 2.1 исследуется система уравнений, полученная из проекций уравнения движения на горизонтальные оси

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = \omega^2(q_1 - q_3), \\ \dot{q}_3 = Mu, \qquad |u| \le 1, \end{cases}$$

где $\omega^2 = \lambda$, q_1 - координата точки B, q_2 - скорость точки B, q_3 - координата точки опоры.

В 2.2 рассматривается проекция траекторий движения на фазовую плоскость. Находится область существования решения поставленной задачи, которая записывается в виде

$$-M < q_2 + \omega(q_1 - q_3) < M$$

В 2.3 аналитически решена задача нахождения оптимального по быстродействию программного управления при произвольных начальных условиях.

В 2.4 построен синтез оптимального по быстродействию управления, который записывается в следующем виде.

Введем функцию

$$\Theta(s) = \begin{cases} -1, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение кривой переключения записывается в виде

$$\begin{cases} q_1 = r + q_3, \\ \quad q_2 = \Theta(r)\left(M - \sqrt{M^2 + \omega^2 r^2}\right), \\ \quad q_3 = -\Theta(r)\dfrac{M}{\omega}\ln\left(\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2 r^2}{M^2}} + \dfrac{\omega r}{M}\right), \\ r \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$$

Если текущее положение системы соответствует этой системе уравнений, то движение происходит по кривой переключения, а знак управления выбирается как знак параметра r .

Поверхность переключения записывается в виде

где q_2^* - значение q_2 из уравнения кривой переключения для текущего значения r . Если текущее положение системы соответствует этой системе уравнений, то движение происходит по кривой переключения, а знак управления выбирается как знак параметра s

Если же текущее положение системы принадлежит области существования решения, но не удовлетворяет ни уравнению кривой переключения, ни уравнению поверхности переключения, то знак управления выбирается положительным, если текущее значение q_3 больше значения q_3, вычисленного из уравнений поверхности переключения (находимся выше поверхности переключения), и отрицательным в обратном случае.

На рис.1 изображена поверхность переключения

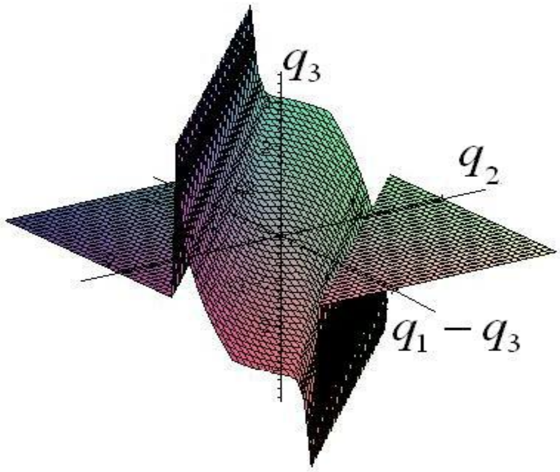

Рис.1 Поверхность переключения

В **третьей главе** в качестве функции управления взято ограниченное по величине ускорение точки опоры и решена задача наискорейшего перевода точки опоры стержня на заданное расстояние при условии, что в начале маневра стержень был стабилизирован в верхнем положении равновесия, а в конце маневра стержень следует привести тоже в верхнее положение равновесия с нулевой скоростью и ускорением в новом положении точки опоры. Найдено оптимальное по быстродействию программное управление поставленной задачи.

В 3.1 выписаны уравнения движения для рассматриваемого случая

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = \omega^2(q_1 - q_3), \\ \dot{q}_3 = q_4 \\ \dot{q}_4 = Du, \qquad |u| \le 1, \end{cases}$$

и доказано, что данная система вполне управляема.

В 3.2 найдены необходимые условия оптимальности из которых следует, что оптимальное управление кусочно-постоянно и имеет не более трех переключений с одного максимального значения на другое

В 3.3 аналитически находится оптимальное по быстродействию программное управление поставленной задачи. Показано, что оптимальное управление в этом случае имеет ровно три переключения с одного максимального значения на другое. Формулы для нахождения времени движения на каждом участке постоянства управления в зависимости от расстояния, которое должна пройти точка опоры, выписаны в явном виде. Из равенства

$$\ln^2 \frac{k_1 + (k_1 - 1)\sqrt{2k_1}}{k_1^2(2 - k_1)} - \ln^2 k_1 = \frac{|a|\omega^2}{D},$$

где $k_1 = e^{\omega\sigma_1}$ (σ_1 - время движения по первому участку постоянства управления), $|a|$ - расстояние, которое должна пройти точка опоры, находится время движения на первом участке движения с постоянным управлением (совпадает с σ_4 - временем движения на последнем участке постоянства управления). А из равенства

$$k_3 = \frac{k_1 + (k_1 - 1)\sqrt{2k_1}}{k_1(2 - k_1)},$$

где $k_3 = e^{\omega\sigma_3}$ (σ_3 - время движения по третьему участку постоянства управления), находится время движения на третьем участке движения с постоянным управлением (совпадает с σ_2 - временем движения на втором участке постоянства управления).

Вид управления определяется расстоянием, которое нужно пройти точке опоры. Если $a < 0$, то выбирается управление вида (1,-1,1,-1), а если $a > 0$, то выбирается управление вида (-1,1,-1,1).

В 3.4 выписаны свойства полученного движения системы.

Свойство 1. Выполняется условие

$$q_1(T - t) - q_3(T - t) = -(q_1(t) - q_3(t)),$$

где T – все время движения.

Свойство 2. $q_1\left(\frac{T}{2}\right) - q_3\left(\frac{T}{2}\right) = 0.$

Свойство 3. Производная $\frac{d[q_1(t) - q_3(t)]}{dt}$ непрерывна во все время движения.

Свойство 4. Функция $(q_1(t) - q_3(t))$ достигает экстремумов только на интервале между первым и третьим переключениями управления.

Свойство 5. Справедлива оценка

$$\max_t |q_1(t) - q_3(t)| < \frac{DJ}{mgl_c}.$$

Свойство 6. Выполняется условие

$$q_2(T-t)-q_4(T-t)=q_2(t)-q_4(t).$$

Свойство 7. Функция $(q_2(t)-q_4(t))$ достигает экстремумов только при $t=\sigma_1$, $t=\sigma_1+\sigma_2$ и $t=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$. В этих точках производная $\frac{d[q_2(t)-q_4(t)]}{dt}$ терпит скачок и меняет знак. Во всех других точках диапазонов

производная остается непрерывной и нигде не обращается в нуль.

Свойство 8. Справедлива оценка

$$\max_t |q_2(t)-q_4(t)| < D\sqrt{\frac{J}{mgl_c}}$$

В **четвертой главе** на основе анализа законов управления, полученных во второй и третьей главах, решена задача перевода точки опоры стержня на заданное расстояние с использованием комбинированного управления, когда в качестве функции управления взято ограниченное ускорение платформы и считается, что скорость точки опоры ограничена по величине. Как и в третьей главе, принимается, что в начале маневра стержень был стабилизирован в верхнем положении равновесия, а в конце маневра требуется привести стержень тоже в верхнее положение равновесия с нулевой скоростью и ускорением в новом положении точки опоры.

В 4.1 выписаны рассматриваемые уравнения движения.

В 4.2 рассматриваются все возможные случаи решения поставленной задачи, и находится аналитически программное управление. Показано, что независимо от расстояния, на которое нужно перевести стержень, комбинированное управление будет иметь четыре участка движения с постоянным ускорением. А количество участков движения с постоянной скоростью зависит от параметров системы и их может быть три, один или не быть совсем.

В 4.3 выписаны свойства программного управления поставленной задачи.

Свойство 1. Выполняется условие

$$q_1(T-t) - q_3(T-t) = -(q_1(t) - q_3(t)).$$

Свойство 2. $q_1\left(\frac{T}{2}\right) - q_3\left(\frac{T}{2}\right) = 0.$

Свойство 3. Выполняется условие

$$q_2(T-t) - q_4(T-t) = q_2(t) - q_4(t).$$

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

В **приложении** собраны рисунки ко всем главам диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

1. Голуб С.П. Голубев Ю.Ф. Синтез оптимального по времени управления перемещением перевернутого стержня // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. №6. С. 38-51.

2. Голуб С.П. Синтез оптимального по времени управления перемещением перевернутого стержня // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. I. Казань, 12-16 июня 2012 г. - Казань: Изд-во Казан. гос. техн. Ун-та, 2012. С. 310-320.

3. Голуб С.П. Синтез управления переносом стержня, стоящего на подвижной опоре. // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 13-15 октября 2012 г. / Под редакцией академика РАН Г.Г. Черного, профессора В.А. Самсонова. - М.: Издательство Московского университета, 2011. С. 100-107.

4. Golub S.P. Synthesis of Optimal Time Control of the Inverted Rod // 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics (CCMECH`2011). Book of Abstracts, Wydawnictwo Collegium Mazovia, Siedlce, 2011. P. 30-32.