

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

---

МЕХАНИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 539.3

**КАКУШЕВ ЭЛЬДАР РАМАЗАНОВИЧ**

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СВЯЗАННЫХ  
ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ**

Специальность: 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой  
степени кандидата физико – математических наук

МОСКВА 2013 г.

Работа выполнена на кафедре механики композитов механико – математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Научный руководитель:** доктор физико – математических наук,  
профессор Сергей Владимирович Шешенин

**Официальные оппоненты:** доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой прикладной математики и информатики МГСУ Владимир Николаевич Сидоров  
доктор физико – математических наук,  
старший научный сотрудник геофизического центра Российской академии наук  
Илья Юрьевич Колесников

**Ведущая организация:** мастерская №15 открытого акционерного общества Института по изысканиям и проектированию инженерных сооружений «МОСИНЖПРОЕКТ»

Защита диссертации состоится 22 февраля 2013 г. в 16 часов 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП – 1, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, Механико – математический факультет, аудитория 16 10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико – математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 17 января 2013 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 501.001.91

доктор физико – математических наук, профессор



С.В. Шешенин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность работы.**

Пористыми являются многие природные тела: грунты, горные породы, кожа, кость, а также многие искусственные материалы. Изучение теории фильтрации и механики насыщенных пористых сред необходимо для описания движения жидкостей через пористые материалы и описания напряженно-деформированного состояния насыщенных жидкостью твердых деформируемых тел. Например, теория фильтрации позволяет прогнозировать те изменения, которые могут произойти в естественных грунтовых потоках при строительстве зданий и сооружений. Расчеты по теории фильтрации необходимы также в нефтяной и газовой сфере не только для оптимизации процесса добычи, но и в связи с вопросами экологии. Были отмечены случаи оседания поверхности земли на значительных участках территории нефтяных промыслов. Один из широко известных примеров оседания поверхности земли в г. Лос-Анджелесе (Калифорния) после начала разработки одного из крупнейших нефтяных месторождений в США. Через 32 года после начала откачки воронка оседания поверхности земли простиралась на площадь 50 млн.  $m^2$ , причем в центре воронки ее глубина достигала 8,8 м. Оседание поверхности земли нанесло существенный вред и потребовало проведения дорогостоящих ремонтных работ. Проседание земли происходит не только при откачке нефти, но и при откачке грунтовых вод, при осушении почвы, при строительстве зданий на водонасыщенных грунтах и т.д.

Поэтому возникает необходимость развития и усовершенствование методов расчета фильтрационных явлений.

Возникновение и развитие теории фильтрации связано с именами таких ученых как М. Био, К. Терцаги, В. Н. Николаевский, Г. И. Баренблатт, Х. Азиз, В. Н. Щелкачев, G. Gambolati, Я. И. Френкель, Н. М. Герсеванов, В. А. Флорин, И. Н. Кочина, С. Бакли, М. Леверьет, С. Е. Джейкоб и т.д.

В настоящей диссертационной работе рассматривается связанная модель фильтрации в упругой пористой среде, основанная на теории Био (Biot М.А. 1955; Николаевский В. Н. 1970). Дано обобщение на случай геометрически нелинейного деформирования. Эффект связанности появляется из-за взаимного влияния пространственной деформации каркаса грунта и изменения давления жидкости в порах. В работе рассмотрены два класса задач: задачи фильтрации жидкости вследствие откачки из месторождения и задачи с внешним силовым воздействием. Задачи фильтрации жидкости из месторождения – это типичные задачи откачки/закачки жидкости из одного из слоев многослойного месторождения. Задачи с силовым внешним воздействием – это типичные задачи расчета проседания фундаментов в водонасыщенном грунте, например, грунте намытом в море.

Связанная модель позволяет определять одновременно фильтрационный поток жидкости и осадку деформируемой пористой среды, в которой происходит фильтрация (Киселев Ф. Б 1996; К. Lipnikov 2009; Р. Hsieh 1995).

В работе предложена, исследована и реализована надежная численная связанная модель фильтрации в упругой пористой среде. Разработанная численная модель позволяет рассчитывать величины изменения порового давления, горизонтальные и вертикальные перемещения, в том числе проседания земной поверхности в рассматриваемых задачах, а также напряжения и деформации. Также в работе реализована и несвязанная модель фильтрации в упругой пористой среде. Проведено сравнение моделей.

Для решения связанная модель сложнее, чем несвязанная. Поэтому исследован вопрос о том, когда связанная модель сводится к несвязанной. Именно, математически показано, что в случае откачки из скважины в однородном грунте и в слоистом грунте с неперетекающими несущими слоями, связанная задача сводится к несвязанной. Также численно исследована связь между решениями по связанной и несвязанной моделям. В сотрудничестве с кафедрой инженерной и экологической геологии геологического факультета МГУ решена практическая задача об откачке

нефти из скважины в 13-слойном грунте. Предложено обобщение связанной теории фильтрации в упругой пористой среде для геометрически нелинейного деформирования с использованием идеи Лагранжевого – Эйлера подхода (ALE - Arbitrary Lagrangian Eulerian. Hirt C. 1974, Benson D. 1989, Huerta A. 1994).

Численные алгоритмы реализованы в виде пакетов программ на языке FORTRAN.

### **Цель работы.**

1. Исследование и создание надежной численной реализации связанной трехмерной модели фильтрации в упругой пористой среде.
2. Исследование различия между решениями по связанной и несвязанной моделям.
3. Решение практических задач с помощью разработанных компьютерных программ.

### **Научная новизна работы заключается в следующем:**

1. Разработан эффективный и надежный численный метод решения связанной трехмерной модели фильтрации в упругой пористой среде.
2. Теоретически и с помощью расчетов показано, что в случае откачки из скважин в однородной бесконечной упругой среде и в слоистой бесконечной среде с неперетекающими несущими слоями, связанная задача сводится к несвязанной.
3. Показано, что в задачах откачки жидкости из месторождения связанная и несвязанная модели дают близкие решения.
4. Показано, что в задачах с силовым внешним воздействием связанная и несвязанная модели дают различные решения.
5. Предложено обобщение связанной задачи фильтрации в виде геометрически нелинейной постановки.

### **Достоверность результатов.**

Обоснованность и достоверность теоретических результатов диссертации подтверждены строгими математическими выводами, основанными на положениях механики.

Достоверность полученных численных результатов подтверждается согласованностью расчетных данных предложенных моделей и существующих моделей других авторов. Построенные алгоритмы были отлажены на модельных задачах с известными аналитическими решениями.

Для задачи, которая была решена в сотрудничестве с кафедрой инженерной и экологической геологии геологического факультета МГУ, проводились сравнения полученных численных результатов с результатами геодезических измерений осадок поверхности земли.

### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение и могут быть использованы для решения многих практических задач, связанных с фильтрационными явлениями, например, возникающих в строительной практике.

### **На защиту выносятся:**

1. численные реализации связанной и несвязанной моделей фильтрации в упругой пористой среде;
2. теоретические и численные результаты сравнения моделей;
3. обобщение связанной задачи фильтрации в упругой пористой среде в виде геометрически нелинейной постановки с использованием идеи ALE.

### **Апробация работы.**

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались:

на научных конференциях «Ломоносовские чтения» секция механики, МГУ имени М.В. Ломоносова (2009, 2010 и 2012 гг.);

на второй международной научно-практической конференции «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы». Москва, 18 ноября 2009 года.

на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Победри (2010 - 2012 гг.);

на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН Е.В. Ломакина);

на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. И.А. Кийко (2012 г.);

#### **Публикация результатов.**

Основные результаты диссертации опубликованы в 7-х работах, список которых приведен в конце автореферата.

#### **Структура и объем работы.**

Диссертация состоит из содержания, введения, четырех глав, заключения и списка литературы. В работе содержится 18 таблиц, 31 рисунок, 98 библиографических ссылок. Общий объем диссертации 112 страниц.

#### **Личный вклад автора.**

Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. В совместных работах соавторам принадлежат постановки задач. Разработка алгоритмов предлагаемых методов, их программные реализации и тестирование, а также решение конкретных задач выполнены соискателем самостоятельно.

# ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

## Введение.

Во введении дается обзор литературы, обоснована актуальность научных исследований. Сформулированы: цель работы, ее научная новизна и практическая значимость.

## Глава 1. Связанная модель фильтрации в упругой пористой среде в геометрически и физически линейной постановке.

Глава 1 состоит из 4-х параграфов и посвящена постановке связанной модели фильтрации в упругой пористой среде и ее численной реализации.

В § 1 главы 1 выводятся уравнения связанной трехмерной модели фильтрации в упругой пористой среде (1). Считается, что в каждой точке объема существует вектор перемещения скелета  $\vec{u}$  и давление  $p$  в жидкости. Модель использует уравнение движения и неразрывности фаз, закон фильтрации Дарси, определяющие соотношения для пористого каркаса и условие баротропии насыщающей поры жидкости. Линеаризованная относительно начального состояния связанная система уравнений выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\underline{\underline{C}} : \nabla \vec{u}) = \nabla p \\ \nabla \cdot (\underline{\underline{k}} \cdot \nabla p) = \nabla \cdot \dot{\vec{u}} + n\beta_{ж}\dot{p} - Q(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (1)$$

В уравнениях (1)  $\underline{\underline{C}}$  – тензор эффективных модулей насыщенного грунта при нулевом давлении жидкости в порах,  $\beta_{ж}$  – коэффициент сжимаемости жидкости,  $n$  – объемная пористость грунта,  $\underline{\underline{k}}$  – тензор коэффициентов фильтрации ( $\underline{\underline{k}} = \frac{\underline{\underline{K}}}{\mu\gamma}$ , где  $\gamma$  – удельный вес жидкости,  $\underline{\underline{K}}$  – тензор коэффициентов проницаемости пористой среды,  $\mu$  – динамический



коэффициент вязкости жидкости),  $Q$  – интенсивность источников и стоков

( $Q = \frac{dm}{\rho_{ж} dt dV}$ , где  $dm$  – это масса жидкости, выделившаяся или

поглотившаяся в элементарном объеме  $dV$  за время  $dt$ ,  $\rho_{ж}$  – плотность жидкости).

Система уравнений (1) решается в приращениях  $\vec{u}$  и  $p$  относительно их статических значений, вызванных постоянными массовыми силами, поэтому начальные условия имеют следующий вид:  $\vec{u} = 0$ ,  $p = 0$  при  $t = 0$ .

Вся поверхность области  $\Sigma$  делится на 4 части:  $\Sigma_{\sigma}$ ,  $\Sigma_u$ ,  $\Sigma_w$  и  $\Sigma_p$  на которых задаются нагрузки, перемещения, поток жидкости и давление соответственно.

В первом параграфе главы 1 подробно описываются виды граничных условий, используемые в рассматриваемых в диссертации задачах. В задачах откачки жидкости из месторождения на границах рассматриваемой области задаются типичные условия для геологических задач Рис. 1:

1. На поверхности земли поверхностная нагрузка отсутствует и давление

не меняется:  $(\underline{C} : \nabla \vec{u} - p \underline{I}) \cdot \vec{n} = 0$ ,  $p = 0$ ;  $\vec{x} \in \Sigma_{\sigma}$ ,  $\Sigma_{\sigma} = \Sigma_p$ .

2. Боковая поверхность и дно месторождения неподвижны и

непроницаемы:  $\vec{u} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ;  $\vec{x} \in \Sigma_u$ ,  $\Sigma_u = \Sigma_w$ .

3. На границе между слоями предполагается идеальный контакт:

$\vec{u}^+ = \vec{u}^-$ ;  $\vec{S}^{n^+} = \vec{S}^{n^-}$ ;  $p^+ = p^-$ ;  $\underline{k}^{(+)} \cdot \nabla p^+ = \underline{k}^{(-)} \cdot \nabla p^-$ .

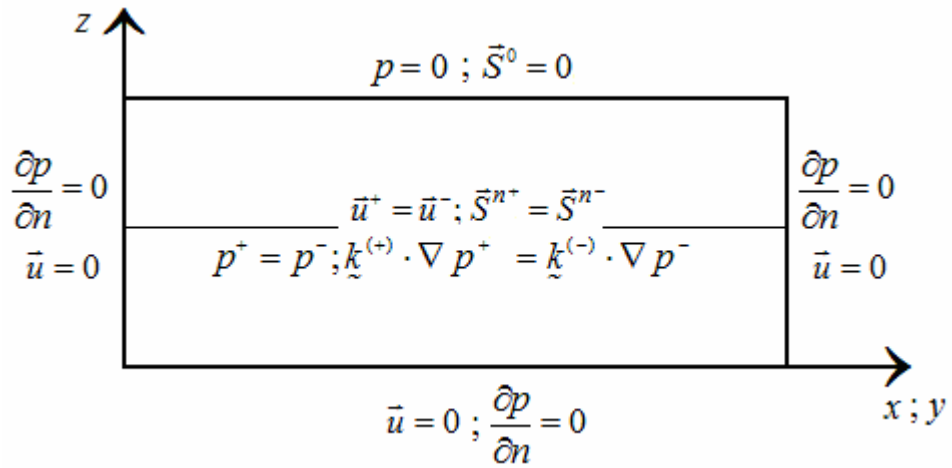


Рис. 1. Типичные граничные условия для геологических задач откачки жидкости из месторождения.

В задачах с силовым внешним воздействием, в отличие от задач откачки жидкости из месторождения, на поверхности земли, в зависимости от задачи могут быть заданы следующие граничные условия:

- действует ненулевая поверхностная нагрузка, как на скелет, так и на жидкость:  $(\underline{\underline{C}} : \nabla \vec{u} - p \underline{I}) \cdot \vec{n} = \vec{S}^0 \neq 0$
- действует ненулевая поверхностная нагрузка только на скелет:  $(\underline{\underline{C}} : \nabla \vec{u}) \cdot \vec{n} = \vec{S}^0 \neq 0$
- заданы ненулевые перемещения  $\vec{u} = \vec{U}^0 \neq 0$ .

Подобными видами граничных условий моделируется, например, влияние здания на водонасыщенный грунт. В остальном граничные условия, в рассматриваемых классах задач полностью совпадают.

В § 2 главы 1 дана вариационная постановка связанной модели фильтрации в упругой пористой среде.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \nabla \vec{w} : \underline{\underline{C}} : \nabla \vec{u} dV - \int_V p \nabla \cdot \vec{w} dV = \int_{\Sigma_\sigma} \vec{w} \cdot \vec{S}^0 d\Sigma \\ - \int_V \nabla q \cdot \underline{k} \cdot \nabla p dV = \int_V q \nabla \cdot \dot{\vec{u}} dV + \int_V q n \beta_{ж} \dot{p} dV - \int_V q Q(\vec{x}, t) dV \end{array} \right. \quad (2)$$

В уравнениях (2)  $\vec{u}$  и  $p$  - решение,  $\vec{w}$  и  $q$  - пробные функции, причем все 4 функции принадлежат пространству Соболева  $W_2^1$ .

В § 3 главы 1 проведена процедура дискретизации вариационных уравнений (2) и получена система алгебраических уравнений (3). Для дискретизации краевой задачи по пространственным переменным использовался метод конечных элементов (МКЭ), а по времени разностная схема. Система уравнений (3) является седловой системой и решается в каждый дискретный момент времени  $t_n$ .

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{t_{n-1}} \\ p^{t_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_u^{t_{n-1}} \\ F_p^{t_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Разработана численная реализация связанной задачи трехмерной фильтрации и программная реализация на сетках, топологически эквивалентных параллелепипедной сетке. В качестве конечных элементов использовались два вида элементов: элементы Q1-Q1 Рис. 2 с трилинейными функциями формы для  $\vec{u}$  и  $p$ , и элементы Q2-Q1 Рис. 3 с трикватратными функциями формы для  $\vec{u}$  и трилинейными функциями формы для  $p$ . Численные алгоритмы реализованы в виде пакетов программ на языке FORTRAN.

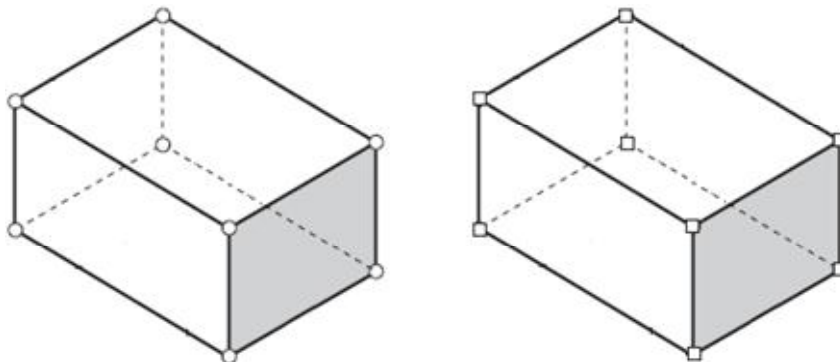


Рис. 2. Элемент Q1-Q1. Конечные элементы для  $\vec{u}$  и  $p$  содержат по 8 узловых точек, соответствующие функции формы являются трилинейными функциями.

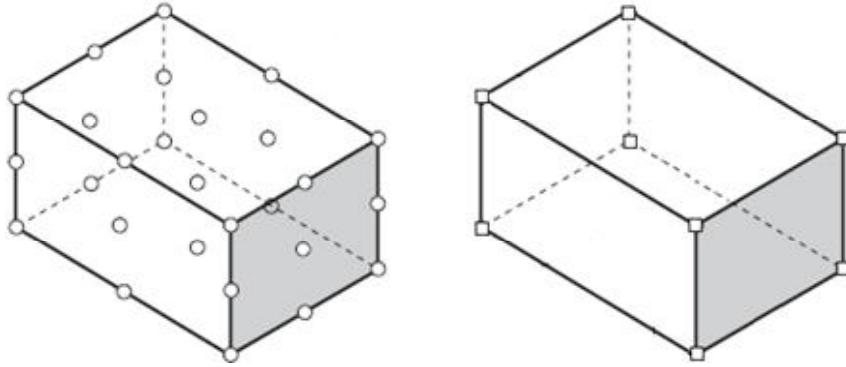


Рис. 3. Элемент Q2-Q1. Конечный элемент для  $\vec{u}$  содержит 27 узловых точек, функции формы являются триквадратными функциями. Конечный элемент для  $p$  содержит 8 узловых точек, функции формы являются трилинейными функциями.

§ 4 главы 1 посвящен устойчивости системы уравнений (3). Существование и единственность решения седловой системы (3) имеют место быть при выполнении условия положительной определенности для матриц  $A$  и  $C$ :  $(Au, u) > 0, \forall u \neq 0$ ;  $(Cp, p) > 0, \forall p \neq 0$ , и условия Ладыженской-Бабушки-Бреци (LBB) для матрицы  $B$ :

$$\inf_{p \in G_p^N / \text{Ker } B^T} \sup_{u \in G_u^N} \frac{(B^T p, u)}{\|p\| \|u\|} \geq \varepsilon > 0, \quad \text{где } G_p^N \text{ и } G_u^N \text{ это } N\text{-мерные}$$

подпространства пространства Соболева  $W_2^1$ . Для элементов Q2-Q1 условие LBB выполняется и система (3) имеет устойчивое решение. Для элементов Q1-Q1 выполнение LBB условия зависит от шага по времени  $\tau$ , который входит как множитель в матрицу  $C$ . При достаточно больших значениях данного параметра LBB условие выполняется и система (3) на элементах Q1-Q1 имеет устойчивое решение, но при уменьшении  $\tau$  условие нарушается и решение системы во времени ведет себя не устойчиво.

В четвертом параграфе главы 1 найдено условие устойчивости решения связанной модели фильтрации в упругой пористой среде, при использовании элементов Q1-Q1. Это условие выведено для класса задач откачки жидкости из месторождения, удовлетворяющих следующим условиям:

1. месторождение состоит из одного слоя и представляет собой куб;
2. в качестве граничных условий заданы типичные условия для геологических задач;
3. разбиение области по координатам равномерное, количество шагов по координатам вдоль  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  одинаковое;
4. тензор коэффициентов фильтрации  $\underline{k}$  диагональный и его диагональные элементы равны (в итоге остается одна скалярная величина  $k$ , которая называется коэффициентом фильтрации);
5. скважина расположена в центре месторождения и пронизывает его по всей высоте  $Z$ .

Условие устойчивости выглядит следующим образом:

$$\tau > \pi_{\tau} \frac{h^2}{E k}; \quad \pi_{\tau} \approx 2, \text{ где } h - \text{ шаг по координатам, } E - \text{ модуль Юнга, } k -$$

коэффициент фильтрации. Неравенство получено использованием методов теории размерностей и численных тестов на кубической сетке. На примере модельной задачи проиллюстрирована потеря устойчивости численного решения связанной модели при уменьшении шага по времени  $\tau$ .

Для сравнения конечных элементов Q1-Q1 и Q2-Q1 численно решена модельная задача откачки жидкости из месторождения. В Табл. 1 приведены результаты расчетов. При этом количество шагов по времени было одинаково, но менялось время процесса откачки жидкости. Условие устойчивости при использовании элементов Q1-Q1 выполнено при времени откачки большем 9-ти дней. Из таблицы видно, что при использовании элементов Q2-Q1, решение можно получить для любого момента времени, а при использовании элементов Q1-Q1, устойчивое решение можно получить только при времени откачки большем 9-ти дней.

Длительность процесса откачки	Давление (МПа)	
	Q1-Q1	Q2-Q1
1 мин.	-	- 0.0014
10 мин.	-	- 0.014
1 час	-	- 0.08
12 часов	-	- 0.56
1 день	-	- 0.79
3 дня	-	- 1.54
7 дней	-	- 2.23
10 дней	- 2.46	- 2.46
30 дней	- 2.5	- 2.5
100 дней	- 2.5	- 2.5

Табл. 1. Изменение давления в жидкости в окрестности скважины в зависимости от времени процесса и вида используемых конечных элементов.

В главе были получены следующие результаты:

1. Разработана численная реализация связанной линеаризованной задачи упругой пористой среды и программная реализация на сетках, топологически эквивалентных параллелепипедной сетке.
2. Численно исследовано условие устойчивости решения связанной модели и показано отсутствие надежности элементов Q1-Q1.

## **Глава 2. Итерационные методы решения связанной модели фильтрации в упругой пористой среде.**

**Глава 2** состоит из 2-х параграфов и посвящена итерационным методам решения связанной задачи фильтрации в упругой пористой среде.

Распространенной особенностью рассматриваемых задач фильтрации в упругой пористой среде является то, что область состоит из нескольких слоев и их свойства (толщины слоев, модули Юнга, коэффициенты фильтрации) могут отличаться на несколько порядков. Размеры области доходят до 20 км по длине и ширине, и до 3-5 км по глубине. Чтобы учесть эти особенности задача численно должна решаться на большой сетке размера сотни тысяч

алгебраических уравнений. Параллелепипедо подобная форма области приводит к тому, что итерационные методы позволяют решать задачи, состоящие из более, чем 1 000 000 уравнений на обычном ПК, в то время как прямыми методами можно решать связанные задачи фильтрации в упругой пористой среде, состоящие максимум из 100 000 – 150 000 уравнений.

В § 1 главы 2 описывается итерационный метод, основанный на методе Удзавы, и используемая в итерационных методах матрица Шура  $S$ :

$$\underbrace{(-BA^{-1}B^T + C)}_S p^t = f^{t-1} \quad (4)$$

Для сравнения итерационных методов численно решена модельная задача откачки жидкости из месторождения. Для каждого метода найдена зависимость количества итераций от отношения текущей невязки к начальной  $\frac{\|r\|}{\|r^0\|}$ . Показано огромное преимущество метода сопряженных

градиентов. Результаты численных расчетов представлены в Табл. 2.

$\frac{\ r\ }{\ r^0\ }$	Количество итераций		
	Метод простой итерации	Метод минимальных невязок	Метод сопряженных градиентов
$10^{-2}$	26	16	7
$10^{-3}$	267	127	23
$10^{-4}$	627	299	40
$10^{-5}$	991	471	62
$10^{-6}$	1360	648	78

Табл. 2. Зависимость количества итераций в итерационных методах от отношения текущей невязки к начальной.

Матрицы  $A$  и  $C$  в системе уравнений (3) являются плохо обусловленными за счет разброса коэффициентов. Как следствие, матрица Шура  $S$  в (4) тоже плохо обусловлена. Поэтому, при увеличении количества неизвестных в алгебраической системе уравнений количество итераций в итерационных методах сильно возрастает. Чтобы избавиться от этого

явления был предложен оператор предобусловливания, позволяющий получать решение со скоростью сходимости, не зависящей от количества неизвестных в алгебраической системе. Оператор предобусловливания выглядит следующим образом:  $E + \tau \Delta$ , где  $E$  - это единичный оператор,  $\tau$  - шаг по времени,  $\Delta$  - оператор Лапласа.

Предложенный оператор предобусловливания существенно улучшает работу итерационных методов. Для демонстрации эффекта влияния предобусловливателя численно решена модельная задача откачки жидкости из месторождения. Для каждого итерационного метода найдена зависимость количества итераций от числа алгебраических уравнений и отношения

текущей невязки к начальной  $\frac{\|r\|}{\|r^0\|}$ . Результаты численных расчетов для

метода сопряженных градиентов представлены в Табл. 3.

$\frac{\ r\ }{\ r^0\ }$	Метод сопряженных градиентов без предобусловливателя			Метод сопряженных градиентов с предобусловливателем		
	количество точек по X, Y, Z и число решаемых уравнений			количество точек по X, Y, Z и число решаемых уравнений		
	31×31×31 <b>275 684</b>	41×41×41 <b>530 604</b>	51×51×51 <b>907 924</b>	31×31×31 <b>275 684</b>	41×41×41 <b>530 604</b>	51×51×51 <b>907 924</b>
$10^{-1}$	31	36	37	3	3	3
$10^{-2}$	115	141	169	6	6	6
$10^{-3}$	142	177	208	10	10	10
$10^{-4}$	159	197	236	18	18	18
$10^{-5}$	174	215	258	25	25	25
$10^{-6}$	196	240	288	33	33	34

Табл. 3. Зависимость количества итераций в итерационных методах сопряженных градиентов с преобусловливателем и без предобусловливателя от числа алгебраических уравнений и от отношения текущей невязки к начальной.

§ 2 главы 2 посвящен решению двух задач: задачи откачки жидкости из месторождения через одни скважины и закачки жидкости обратно в пласт через другие и задачи о притоке воды к подземным сооружениям. С



помощью реализованной связанной модели фильтрации в упругой пористой среде можно оценивать перемещения на поверхности земли в зависимости от расположения скважин. Также разработанную программу можно использовать для оценки необходимости проведения защитных мероприятий в подземных сооружениях.

В главе были получены следующие результаты:

1. Разработан итерационный метод на основе метода Удзавы с оператором предобусловливания для решения дискретной связанной задачи.
2. Показана работоспособность на сетках более 1 000 000 уравнений.

### **Глава 3. Модель упругого режима или несвязанная модель фильтрации в упругой пористой среде.**

**Глава 3** состоит из 3-х параграфов и посвящена несвязанной модели фильтрации в упругой пористой среде.

С момента появления связанной системы уравнений модели Био у исследователей возникло желание упростить ее, путем некоторых дополнительных предположений, «развязав» входящие в уравнения переменные. За системой, получаемых несвязанных уравнений модели Био, исторически закрепилось название упругого режима фильтрации.

В главе 3 из уравнений связанной модели фильтрации в упругой пористой среде выведены уравнения несвязанной модели, проведено сравнение связанной и несвязанной моделей, приведены численные результаты решения задачи о проседании поверхности земли при откачке жидкости из месторождения.

В § 1 главы 3 показано, что для случая бесконечной однородной и изотропной среды с нулевыми возмущениями на бесконечности (на практике при достаточном удалении от месторождения возмущения малы) из уравнений связанной модели фильтрации в упругой пористой среде (1)

следует, что в любой точке рассматриваемой области выполнено соотношение

$$\nabla \cdot \dot{\vec{u}} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \dot{p}, \quad (5)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – это коэффициенты Ламе. Показано, что данный результат можно распространить на случай слоистого грунта, когда течение жидкости происходит в одном из пластов, ограниченном сверху и снизу непроницаемыми пластами. Такой случай вполне может осуществляться на практике.

После подстановки соотношения (5) в последнее уравнение системы (1), получаются уравнения несвязанной модели фильтрации в упругой пористой среде:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\underline{\underline{C}} : \nabla \vec{u}) = \nabla p \\ \nabla \cdot (\underline{\underline{k}} \cdot \nabla p) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \dot{p} + n\beta_{ж} \dot{p} - Q(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (6)$$

Упрощения в несвязанной постановке позволяют решать уравнения независимо. Для проводящего пласта решается отдельно последнее уравнение системы (6) и находятся  $p$ . Затем поле перемещений  $\vec{u}$  определяется из решения трехмерной краевой задачи для первого уравнения системы (6) при уже известном давлении жидкости. Несвязанная модель с успехом применяется в задачах откачки жидкости из месторождения.

В § 2 главы 3 рассматривается расчёт перемещений каркаса горных пород и изменения пластового давления при эксплуатации нефтяного месторождения, расположенного на востоке центральной части Западно-Сибирской низменности (на юге Томской области). Длительная откачка нефти приводит к возникновению различных неблагоприятных явлений: оседанию земли, образованию провалов. Оседание земной поверхности является одной из экологических проблем при добыче нефти и газа в Западной Сибири. Поверхность Западной Сибири характеризуется высокой

степенью заболоченности; именно этой территории принадлежит мировой рекорд по количеству болот на единицу площади. Дополнительное оседание земной поверхности даже на несколько сантиметров может привести к ещё большему заболачиванию, подтоплению территории, деформациям автомобильных трасс, трубопроводов, коммуникаций, промышленных и гражданских сооружений. В связи с этим прогнозирование оседания земной поверхности при эксплуатации нефтяного месторождения является важной практической задачей.

Решением подобных экологических проблем занимается кафедра инженерной и экологической геологии геологического факультета МГУ, данная задача решалась в сотрудничестве с этой кафедрой.

По описанию геологического строения западносибирского месторождения были выделены 13 слоев пород. Все слои разреза имеют субгоризонтальное простирание, что позволяет использовать для расчета горизонтально-слоистую модель. Характеристики их свойств, используемые для численного расчета, показаны в Табл. 4 и Табл. 5.

Номер слоя	Толщина слоя (м)	$E$ (МПа)	$\nu$
13	100	100	0.3
12	50	500	0.25
11	320	9000	0.35
10	100	5000	0.28
9	50	11000	0.35
8	800	13000	0.28
7	600	9000	0.3
6	300	6000	0.25
5	60	14000	0.35
<b>4</b>	<b>80</b>	<b>16000</b>	<b>0.28</b>
3	50	14000	0.35
2	270	17000	0.28
1	220	26000	0.2

Табл. 4. Толщины слоев и свойства пород (модуль Юнга, коэффициент Пуассона).

общее время откачки (сут)	1825
интенсивность откачки (м <sup>3</sup> /сут)	3000
сжимаемость жидкости (1/Па)	10 <sup>-10</sup>
коэффициент фильтрации (м <sup>2</sup> /Па/сут)	1.38·10 <sup>-5</sup>
пористость грунта	0.1
протяженность месторождения по X (м)	16 000
протяженность месторождения по Y (м)	16 000
протяженность месторождения по Z (м)	3 000

Табл. 5. Размеры месторождения, свойства и параметры откачки жидкости.

Нефтеносным является 4-й слой. Откачка нефти производится из единственной скважины, расположенной в центре модели и проходящей через весь 4-й слой. В скважине задан расход насоса, равный реальному суммарному расходу по месторождению. Нефтеносный слой перекрыт сверху и снизу водонепроницаемыми слоями, коэффициенты фильтрации которых в десятки тысяч раз ниже по сравнению с проводящим слоем.

Граничные условия на перемещения в задаче – это типичные граничные условия для геологических задач. Граничные условия на давление задаются только в нефтенасыщенном слое. Вся граница слоя непроницаема и жидкость

через нее не течет:  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ .

В параграфе 2 главы 3 приведены результаты расчетов: вертикальные и горизонтальные перемещения во всех слоях и давления в разные моменты времени. На Рис. 4 приведен график с результатами проседаний поверхности земли в разных точках.

В процессе эксплуатации месторождения проводились многолетние геодезические измерения деформаций поверхности земли, в ходе которых было установлено, что скорость вертикальных деформаций в среднем по месторождению составляет 0.5-2 см в год. Анализ результатов численных

расчетов показал, что они соответствуют результатам измерений, это видно из Рис. 4.

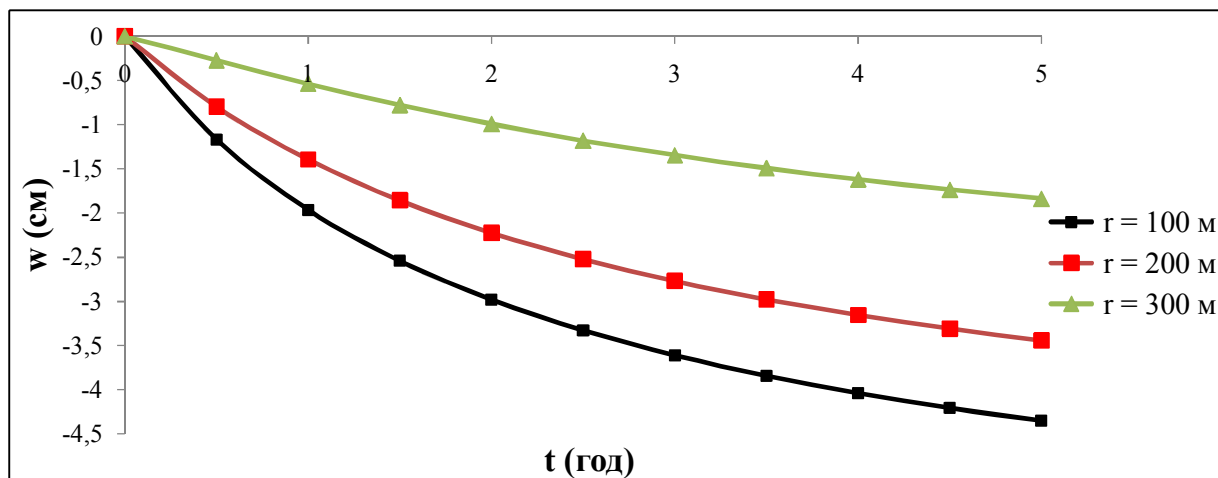


Рис. 4. Изменение вертикальных перемещений на поверхности земли, на расстоянии 100 м., 200 м. и 300 м. от скважины в зависимости от времени.

§ 3 главы 3 посвящен сравнению связанной и несвязанной моделей фильтрации в упругой пористой среде. Показано, что в задачах откачки жидкости из скважины результаты численных расчетов на больших временах откачки совпадают. При сравнении моделей на начальных временах откачки, выявлено, что в отличие от несвязанной модели, связанная модель фильтрации в упругой пористой среде позволяет описать эффект Мандела-Крайера (эффект выпучивания поверхности земли и увеличения давления в порах жидкости рядом со скважиной в первые часы откачки). В качестве задач с силовым внешним воздействием численно решены задача о проседании грунта при строительстве здания и задача о штампе.

Показано, что несвязанная модель в задачах с силовым внешним воздействием не учитывает изменения давления, и численные результаты перемещений в моделях существенно отличаются.

В главе были получены следующие результаты:

1. Разработана программная реализация несвязанной модели упругой пористой среды на основе неявной по времени схемы.
2. Подтверждено, что в задачах откачки из скважины связанная и несвязанная модели дают близкие решения.

3. Показано, что в задачах с силовым внешним воздействием, связанная и несвязанная модели дают существенно различные решения.

#### **Глава 4. Связанная модель фильтрации в упругой пористой среде в геометрически нелинейной постановке.**

**Глава 4** состоит из 2-х параграфов, уравнения связанной модели здесь выведены для общей геометрической и физической нелинейности. Для геометрически нелинейного случая предложен метод решения связанной задачи с использованием совместного Лагранжевого и Эйлера подходов.

В § 1 главы 4 выведены уравнения связанной модели фильтрации в упругой пористой среде для геометрически и физически нелинейного случая:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \langle \underline{\sigma} \rangle + \langle \rho \rangle \vec{f} = 0 \\ n \nabla \cdot \left( \frac{k}{n} \cdot \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + n\beta_{ж} \frac{dp}{dt} - Q(\vec{x}, t) \\ \frac{dn}{dt} = (1-n) \nabla \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \end{cases} \quad (7)$$

В уравнениях (7)  $\langle \underline{\sigma} \rangle$  - среднее напряжение в представительном объеме,  $\langle \rho \rangle$  - средняя плотность,  $\vec{f}$  - внешняя массовая сила (одинакова для каркаса и жидкости).

Система уравнений (7) сформулирована в текущей области. Третье уравнение – это следствие из уравнения неразрывности для твердой фазы. Граничные условия задаются так же, как и для геометрически и физически линейного случая.

В качестве определяющих соотношений рассмотрены определяющие соотношения гиперупругой среды:

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{F} \cdot \left( J^{-1} \frac{\partial W}{\partial \underline{E}} \right) \cdot \underline{F}^T, \quad J = \det \underline{F}, \quad \underline{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \underline{E}^2} \quad (8)$$

В уравнениях (8)  $\underline{F}$  - градиент деформации,  $\underline{E}$  - тензор деформации Лагранжа – Грина,  $W$  - упругий потенциал.

Вариационные уравнения в скоростях, линеаризованные относительно текущего состояния выглядят следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_V \nabla \vec{w} : \underline{C}^d : \nabla \vec{v} \, dV + \int_V \langle \underline{\sigma} \rangle^T : [\nabla \vec{w}^T \cdot \nabla \vec{v}] \, dV - \int_V \dot{p} (\nabla \cdot \vec{w}) \, dV = \\ & = \int_{\Sigma_\sigma} \vec{w} \cdot \left( \frac{\partial \vec{S}^0}{\partial t} + \dot{p} \vec{n} \right) \, d\Sigma \\ & - \int_V \nabla q \cdot \underline{k} \cdot \nabla p \, dV = \int_V q (\nabla \cdot \vec{v}) \, dV + \int_V q n \beta_{ж} \frac{dp}{dt} \, dV - \int_V q Q \, dV \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Первое уравнение системы (9) продифференцировано по времени, поэтому оно сформулировано относительно  $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ ,  $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t}$  (производные,

вычисленные при фиксированных Лагранжевых координатах). В уравнениях (9)  $\vec{u}$  и  $p$  - решение,  $\vec{w}$  и  $q$  - пробные функции,

$$C_{ijkl}^d = J^{-1} F_{i_1} F_{j_1} F_{k_1} F_{l_1} C_{i_1 j_1 k_1 l_1}.$$

При численном решении задачи упругой пористой среды (9), когда движение жидкости описывается Эйлеровым подходом, а движение скелета – Лагранжевым, возникают определенные трудности. Чтобы объединить преимущества и избежать ограничений любого из этих подходов, был предложен метод решения системы с использованием идеи ALE (Arbitrary Lagrange Euler).

Схема численной реализации системы (9) с помощью итерационного процесса выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_V \nabla \bar{w} : (\underline{\underline{C}}^d)^{m+1, s} : \nabla \bar{v}^{m+1, s+1} dV + \int_V \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle^T : [\nabla \bar{w}^T \cdot \nabla \bar{v}^{m+1, s+1}] dV - \\
-\int_V \dot{p}^{m+1, s} (\nabla \cdot \bar{w}) dV = \int_{\Sigma_\sigma} \bar{w} \cdot \left( \frac{\partial \bar{S}^0}{\partial t} + \dot{p} \bar{n} \right) d\Sigma \quad (*) \\
-\int_V \nabla q \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \nabla p^{m+1, s+1} dV = \int_V q (\nabla \cdot \bar{v}^{m+1, s+1}) dV + \\
+\int_V q n^{m+1, s+1} \beta_{\mathcal{K}} \left( \frac{\partial p^{m+1, s+1}}{\partial t} + \bar{v}_{\mathcal{K}}^{m+1, s+1} \cdot \nabla p^{m+1, s} \right) dV - \int_V q Q dV \quad (**)
\end{array} \right. \quad (10)$$

где  $\dot{p}^{m+1, s} = \frac{p^{m+1, s} - p^m}{\tau}$ ,  $\dot{p}^{m+1, 0} = \frac{p^m - p^{m-1}}{\tau}$ ,  $\bar{v}_{\mathcal{K}} = \bar{v} + \underline{\underline{k}} \cdot \nabla p^{m+1, s}$ ,

$n^{m+1, s+1} = n^m + \tau \nabla \bar{v}^{m+1, s+1}$ ,  $m$  - номер шага по времени,  $s$  - номер внутренней итерации на шаге  $m$ .

Идея метода (10) заключается в следующем:

1. Решение (\*) относительно  $\bar{v}^{m+1, s+1}$  на общей лагранжевой - эйлеровой сетке  $\theta_{m+1, s}$  в текущей области  $V_{m+1, s}$ . Вычисление  $\bar{u}^{m+1, s+1}$ ,  $\bar{x}^{m+1, s+1}$ ,  $n^{m+1, s+1} \Rightarrow \theta_{m+1, s+1}$   
 $\theta_{m+1, s+1}$  - лагранжева сетка на итерации s+1
2. Решение (\*\*) относительно  $p^{m+1, s+1}$  на эйлеровой сетке  $\theta_{m+1, s}$
3. Интерполяция давления  $p^{m+1, s+1}$  на сетку  $\theta_{m+1, s+1}$ .

Данный алгоритм можно рассматривать как теоретическое обобщение соответствующего итерационного метода в линейном случае.

В главе были получены следующие результаты:

1. Выведены уравнения связанной модели фильтрации в упругой пористой среде для геометрически и физически нелинейного случая.



2. Предложен алгоритм решения связанной задачи фильтрации в упругой пористой среде в геометрически нелинейной постановке.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ**

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы, которые сводятся к следующему:

1. Разработана, исследована и реализована надежная численная связанная модель фильтрации в упругой пористой среде;
2. Математически и на основе численных тестов исследована связь между решениями по связанной и несвязанной моделям фильтрации в упругой пористой среде;
3. Решены две практические задачи: задача об откачке из скважины в 13-слойном грунте для кафедры инженерной и экологической геологии геологического факультета МГУ, и задача о притоке воды к подземным сооружениям в сотрудничестве с ОАО «Мосинжпроект».

## **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Статьи в научных изданиях, рекомендованных в перечне ВАК**

1. *Шешенин С. В., Какушев Э. Р., Артамонова Н. Б.* Моделирование нестационарной фильтрации, вызванной разработкой месторождений. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2011. № 5. с. 66-68.
2. *Какушев Э. Р., Шешенин С. В.* Связанная и несвязанная модели нестационарной фильтрации. // Вестник ЦКР Роснедра. 2012. № 2. с. 27-35.

3. *Какушев Э. Р., Шешенин С. В., Закалюкина И. М.* Итерационные методы решения связанной задачи фильтрации. // Вестник МГСУ. 2012. № 9. с. 129-136.

#### **Остальные публикации по теме диссертации**

4. *Шешенин С. В., Какушев Э. Р., Артамонова Н. Б., Киселев Ф. Б., Антонов В. И.* Моделирование нестационарной фильтрации, вызванной разработкой нефтяного месторождения. // Вторая международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. (Филипповские чтения)». Сборник трудов МГСУ, 2009. с. 370 - 376.
5. *Какушев Э. Р., Киселев Ф. Б., Шешенин С. В.* Трехмерное моделирование фильтрации в упругой среде. // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2009. с. 84 – 85.
6. *Какушев Э. Р., Шешенин С. В.* Моделирование осадки поверхности земли при разработке нефтяного месторождения. // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2010. с. 27.
7. *Какушев Э. Р., Шешенин С. В.* Решение связанной задачи фильтрации. // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2012. с. 84.