МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико–математический факультет

На правах рукописи

УДК 539.3

**КВАЧЕВ КИРИЛЛ ВАДИМОВИЧ**

# МЕТОД ЛЯПУНОВА–МОВЧАНА В НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

Специальность: 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой
степени кандидата физико–математических наук

МОСКВА 2013 г.

Работа выполнена на кафедре механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,
профессор Д.В. Георгиевский

**Официальные оппоненты:** доктор технических наук,
профессор В.И. Ванько

кандидат физико-математических наук,
доцент В.В. Показеев

**Ведущая организация:** ОАО “Корпорация “Московский институт теплотехники”, г. Москва

Защита диссертации состоится 22 февраля 2013 г. в 16 часов 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–10.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 17 января 2013 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 501.001.91
профессор С.В. Шешенин

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Часто на практике возникает задача о моделировании поведения систем на конечном либо бесконечном промежутках времени. Для этого используют математическую модель, которая описывает некоторую идеальную траекторию системы, возможно, даже не наблюдающуюся на практике. Если выбранное движение системы неустойчиво относительно того или иного класса возмущений, то моделируемые процессы не наблюдаются, они разрушаются под действием возмущений неучтенных факторов. Следовательно, важным свойством решения математической задачи помимо существования и единственности является его устойчивость, практическим критерием которой служит наблюдаемость физического процесса.

В механике деформируемого твердого тела особое место занимают тонкие тела, так как конструкции из них сочетают в себе легкость с высокой прочностью и потому находят широкое применение в самых различных областях: авиастроении, судостроении, конструировании перекрытий и т.д.

В авиастроении актуальными являются задачи об устойчивости колебаний обшивки летательного аппарата в потоке газа, научный интерес к которым возник в 30-е годы XX века. Математическое исследование подобных задач стало более реальным после того, как в 1947 г. А.А. Ильюшин предложил закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. С тех пор было исследовано большое количество задач в "поршневой" постановке. В основном это проблемы устойчивости колебаний пластин в сверхзвуковом потоке газа. В качестве граничных условий обычно выбирались наиболее простые с точки зрения математики условия шарнирного закрепления. Задачам с другими граничными условиям посвящено не так много работ. Для оболочек аналитических результатов получено довольно мало.

**Цель работы.** В диссертации была поставлена задача о нахождении достаточных условий устойчивости колебаний тонких тел в сверхзвуковом потоке газа в терминах оценок для критической скорости на основе методики Ляпунова–Мовчана.

**Научная новизна.** В проблемах аэроупругой устойчивости развит математический аппарат прямого метода Ляпунова. Во всех рассмотренных задачах найдены достаточные условия устойчивости, согласующиеся как с более точными значениями критических скоростей, полученными спектральным методом, так и имеющимися экспериментальными (натурными и масштабными) данными.

**Обоснованность и достоверность** результатов вытекает из использования классического аппарата механики сплошной среды, аналитической динамики, функционального анализа и теории дифференциальных уравнений в частных производных. Положения и качественные выводы работы выдерживают тесты на сравнение с признанными результатами других авторов.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение и могут быть использованы при конструировании и оценке несущей способности элементов конструкций летательных аппаратов, движущихся со сверхзвуковыми скоростями.

**На защиту выносится** нахождение нижних оценок критических скоростей методом Ляпунова–Мовчана в ряде задач об устойчивости колебаний пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

— аспирантский семинар и научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Победри (2011, 2012 г.г.),

— научно-исследовательский семинар имени А.А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. И.А. Кийко (2012 г.),

— научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика Р.И. Нигматулина (2012 г.),

— научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2012 г.),

— научно-исследовательский семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского, д.ф.-м.н., проф. М.В. Шамолина, д.ф.-м.н., проф. С.А. Агафонова (2009-2012 г.г.),

— научно-методический семинар для студентов 1-6 курсов и аспирантов МГТУ им. Н.Э. Баумана под руководством д.ф.-м.н., проф. С.А. Агафонова, д.т.н., проф. В.И Ванько, д.т.н., проф. В.В. Феоктистова (2012 г.),

— конференция-конкурс молодых ученых НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова (2012 г.),

— научные конференции «Ломоносовские чтения» секция механики, МГУ им. М.В. Ломоносова (2009, 2010 г.г.).

**Публикация результатов.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из содержания, введения, пяти глав и списка литературы. В работе содержится 4 рисунка, 239 библиографических ссылок. Общий объем диссертации составляет 178 страниц.

**Личный вклад автора.** Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

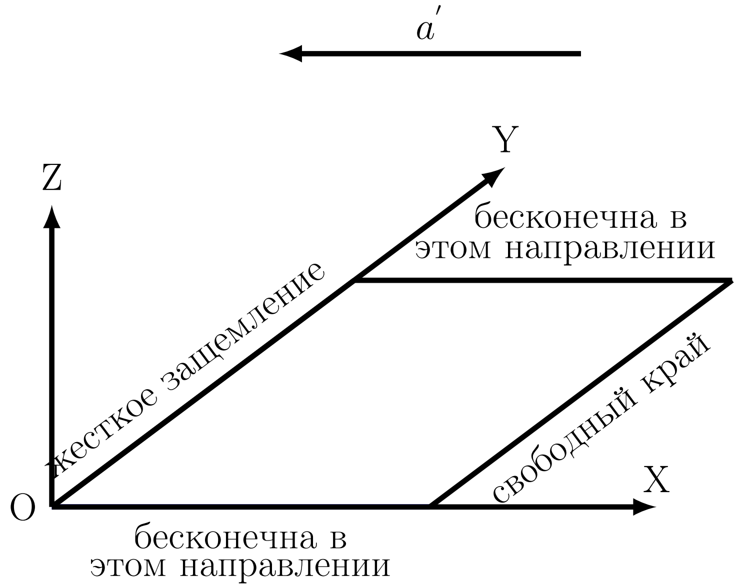
**Во введении** обоснована актуальность проводимых научных теоретических исследований. Сформулированы цель работы, ее научная новизна, теоретическая и практическая значимость.

**В первой главе** «*Метод Ляпунова–Мовчана в задачах устойчивости деформирования сплошных сред (обзор)*» дан современный обзор литературы по методу Ляпунова–Мовчана. Представлены работы по следующим направлениям:

1. Обобщение математического аппарата метода Ляпунова на континуальные системы.

2. Метод Ляпунова—Мовчана в задачах устойчивости деформируемых твердых тел. Работы классифицированы по следующим направлениям: одномерные деформируемые системы, двумерные деформируемые системы, трехмерные деформируемые тела.
3. Метод Ляпунова—Мовчана и устойчивость аэро- и гидроупругих систем.
4. Прямой метод Ляпунова в теории гидродинамической устойчивости. Основная часть работ посвящена температурной конвекции в жидкостях.
5. Устойчивость деформирования относительно возмущений материальных функций, входящих в определяющие соотношения.

**Во второй главе** «*Устойчивость колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа*» рассмотрены классическая проблема об устойчивости колебаний пластины, бесконечной в одном направлении, в сверхзвуковом потоке газа и задача об устойчивости колебаний прямоугольной пластины. Первая ранее была проанализирована спектральным методом А.А. Мовчаном.




Уравнения движения и граничные условия в безразмерных переменных примут вид:

$$\frac{E_0}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} = \rho'\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2} \tag{1}$$

$$\frac{E_0}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2} = \rho^{'}\frac{\partial^2 v_0}{\partial t_0^2} \tag{2}$$

$$-\frac{E_0\alpha^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^4} - 2\left(-a_0\frac{\partial w_0}{\partial x_0} + \frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right) = \rho^{'}\alpha\frac{\partial^2 w_0}{\partial t_0^2} \tag{3}$$

$$x_0 = 0: \ u_0 = 0, \ v_0 = 0, \ w_0 = 0, \ \frac{\partial w_0}{\partial x_0} = 0 \tag{4}$$

$$x_0 = 1: \ \frac{\partial u_0}{\partial x_0} = 0, \ \frac{\partial v_0}{\partial x_0} = 0, \ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} = 0, \ \frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3} = 0 \tag{5}$$

Введены следующие безразмерные величины:

$$w_0 = \frac{w}{h}, \ v_0 = \frac{v}{h}, \ u_0 = \frac{u}{h}, \ x_0 = \frac{x}{a}, \ a_0 = \frac{a^{'}}{c_0}, \ \rho^{'} = \frac{\rho}{\rho_0}, \ t_0 = \frac{c_0 t}{a},$$

$$\alpha = \frac{h}{a}, \ E_0 = \frac{E}{\rho_0 c_0^2} \tag{6}$$

где $E$ – модуль Юнга, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $\rho$ – плотность материала, $t$ – время, $u$, $v$, $w$ – компоненты перемещения вдоль $OX$, $OY$, $OZ$ соответственно, $h$ – толщина пластины, $a$ – ширина пластины, $c_0$ – скорость звука в газе на бесконечности, $\rho_0$ – плотность газа на бесконечности, $a^{'}$ – скорость набегающего потока газа.

Применение методики Ляпунова–Мовчана в этой задаче позволило получить достаточные условия устойчивости. Воспользуемся теоремой об устойчивости по мере $\mu$:

$$\mu = \left(\int_0^1 \left(u_0^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial t_0}\right)^2 + v_0^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_0}\right)^2 + w_0^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right)^2\right) dx_0\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Найдем условия положительной определенности функционала и неположительности его производной. Имеем:

$$a_0 \leq \frac{\pi^2 E_0 \alpha^3}{48(1-\nu^2)}(1-C) \tag{8}$$

$$a_0^2 \leq \frac{E_0 \alpha^2 \pi^2}{48(1-\nu^2)\rho'} C \tag{9}$$

$$0 < C < 1 \tag{10}$$

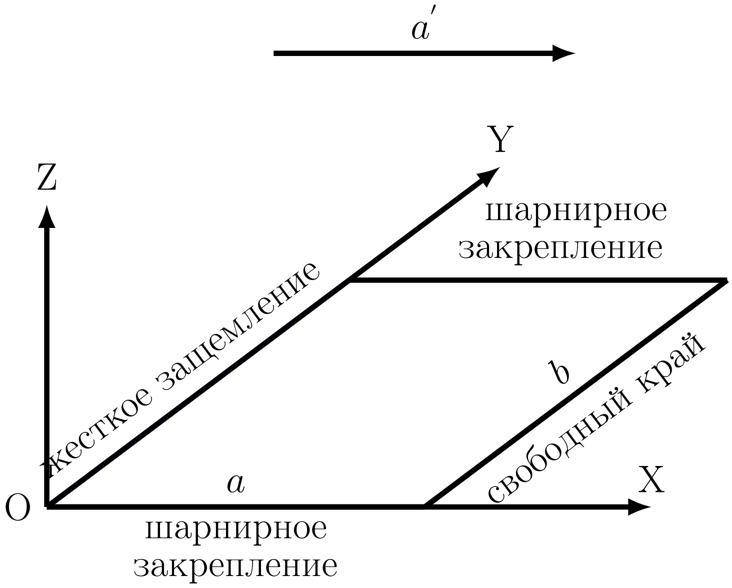
Применение спектрального подхода дало следующий результат:

$$a_0 \leq 2,112 \frac{E_0 \alpha^3}{1-\nu^2} \tag{11}$$

Правая часть неравенства (8) меньше, чем правая часть неравенства (11). Таким образом, оценка, найденная методом Ляпунова−Мовчана вкладывается в оценку, полученную спектральным подходом, что согласуется с тем, что этот метод дает достаточные условия устойчивости. Из системы неравенств (8)−(10) получим нижнюю оценку критической скорости:

$$a_0^2 \leq \frac{E_0 \alpha^2 \pi^2}{48(1-\nu^2)\rho'} + \frac{1}{2\alpha^2 \rho'^2} - \frac{1}{2\alpha^2 \rho'} \sqrt{\frac{E_0 \alpha^4 \pi^2}{12(1-\nu^2)\rho'} + \frac{1}{\rho'^2}} \tag{12}$$

Вторая задача посвящена исследованию устойчивости колебаний прямоугольной пластины в сверхзвуковом потоке газа.




После обезразмеривания уравнения движения и граничные условия примут вид:

$$\frac{E_0}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2}\alpha^2+\nu\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0 \partial y_0}\alpha\beta\right)+$$

$$+\frac{E_0}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2}\beta^2+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0 \partial y_0}\alpha\beta\right)=\rho^{'}\alpha\beta\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2} \qquad (13)$$

$$\frac{E_0}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0 \partial y_0}\alpha\beta+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2}\alpha^2\right)+\frac{E_0}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2}\beta^2+\nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0 \partial y_0}\alpha\beta\right)=$$

$$=\rho^{'}\alpha\beta\frac{\partial^2 v_0}{\partial t_0^2} \qquad (14)$$

$$-\frac{E_0}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^4}\alpha^4+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^2 \partial y_0^2}\alpha^2\beta^2+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y_0^4}\beta^4\right)-$$

$$-\left(a_0\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\alpha+\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\sqrt{\alpha\beta}\right)=\rho^{'}\alpha\beta\frac{\partial^2 w_0}{\partial t_0^2} \qquad (15)$$

$$y_0 = 0; 1: \; u_0 = 0, \; v_0 = 0, \; w_0 = 0, \; \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_0^2} = 0 \tag{16}$$

$$x_0 = 0: \; u_0 = 0, \; v_0 = 0, \; w_0 = 0, \; \frac{\partial w_0}{\partial x_0} = 0 \tag{17}$$

$$x_0 = 1: \; \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = 0, \; \frac{\partial u_0}{\partial y_0} + \frac{\partial v_0}{\partial x_0} = 0, \; \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\alpha^2 + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_0^2}\beta^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3}\alpha^2 + (2-\nu)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y_0^2 \partial x_0}\beta^2 = 0 \tag{18}$$

Введены следующие безразмерные величины:

$$w_0 = \frac{w}{h}, \; v_0 = \frac{v}{h}, \; u_0 = \frac{u}{h}, \; x_0 = \frac{x}{a}, \; y_0 = \frac{y}{b}, \; a_0 = \frac{a'}{c_0}, \; \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \; t_0 = \frac{c_0 t}{\sqrt{ab}},$$

$$\alpha = \frac{h}{a}, \; \beta = \frac{h}{b}, \; E_0 = \frac{E}{\rho_0 c_0^2} \tag{19}$$

где $E$ – модуль Юнга, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $\rho$ – плотность материала, $t$ – время, $u$, $v$, $w$ – компоненты перемещения вдоль $OX$, $OY$, $OZ$ соответственно, $h$ – толщина пластины, $a$, $b$ – длина и ширина пластины, $c_0$ – скорость звука в газе на бесконечности, $\rho_0$ – плотность газа на бесконечности, $a'$ – скорость набегающего потока газа.

Применение теоремы Ляпунова–Мовчана об устойчивости по мере

$$\mu = \Big(\int_0^1 \int_0^1 \Big(u_0^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial t_0}\right)^2 + v_0^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_0}\right)^2 +$$

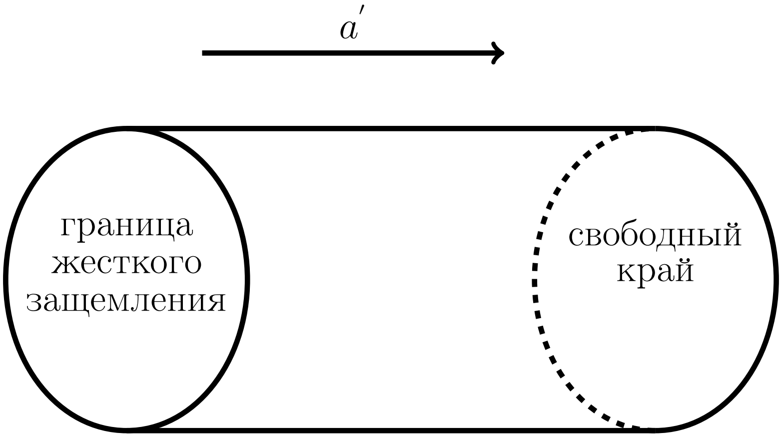
$$+ w_0^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y_0^2}\right)^2 +$$

$$
+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2\Bigg)dx_0dy_0\Bigg)^{\frac{1}{2}} \tag{20}
$$

дает следующую нижнюю оценку критической скорости:

$$
a_0^2 \leq \frac{E_0\pi^2}{\rho'}\left(\frac{\beta^2}{6(1+\nu)}+\frac{\alpha^2}{48}\right) \tag{21}
$$

**В третьей главе** «*Задача об устойчивости колебаний цилиндрической оболочки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа*» рассмотрено два случая дополнительных ограничений на перемещения оболочки.




Задачи решаются в следующей постановке:

$$
\frac{E_0}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2}\alpha^2+\nu\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0\partial\varphi}-\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)\right)+\frac{E_0\alpha^3\beta}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3}+
$$

$$
+\frac{E_0}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial\varphi^2}\beta^2+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0\partial\varphi}\alpha\beta\right)-\frac{E_0\alpha\beta^3}{24(1+\nu)}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0\partial\varphi^2}=\rho'\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2}\alpha^2 \tag{22}
$$

$$
\frac{E_0}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0\partial\varphi}\alpha\beta+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2}\alpha^2\right)+\frac{E_0(3-\nu)\alpha^2\beta^2}{24(1-\nu^2)}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^2\partial\varphi}+
$$

$$
+\frac{E_0}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0\partial\varphi}\alpha\beta+\beta^2\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial w_0}{\partial\varphi}\right)\right)=\rho'\frac{\partial^2 v_0}{\partial t_0^2}\alpha^2 \tag{23}
$$

$$
-\frac{E_0}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^4}\alpha^4+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^2\partial\varphi^2}\alpha^2\beta^2+\frac{\partial^4 w_0}{\partial\varphi^4}\beta^4\right)-\frac{E_0\beta^4}{6(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}+
$$

$$+\frac{E_0}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\alpha\beta+\beta^2\left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi}-w_0\right)\right)-\frac{E_0\alpha^3\beta}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_0^3}+$$

$$+\frac{E_0\alpha\beta^3}{24(1+\nu)}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_0\partial\varphi^2}+\frac{E_0(\nu-3)\alpha^2\beta^2}{24(1-\nu^2)}\frac{\partial^3 v_0}{\partial x_0^2\partial\varphi}-$$

$$-\left(a_0\frac{\partial w_0}{\partial x_0}+\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)\alpha=\rho^{'}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t_0^2}\alpha^2 \tag{24}$$

$$x_0=0:\ u_0=0,\ v_0=0,\ w_0=0,\ \frac{\partial w_0}{\partial x_0}=0 \tag{25}$$

$$x_0=1:\ \frac{\partial u_0}{\partial x_0}\alpha+\nu\beta\left(\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}-w_0\right)+\frac{\alpha^2\beta}{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\alpha^2+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}\beta^2+\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\alpha\beta+\nu\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\beta^2=0,\ \frac{\partial u_0}{\partial\varphi}\beta+\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\alpha+$$

$$+\frac{\alpha\beta^2}{4}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0\partial\varphi}=0,\ -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3}\alpha^3+(\nu-2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0\partial\varphi^2}\alpha\beta^2+\frac{(\nu-3)\alpha\beta^2}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0\partial\varphi}-$$

$$-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2}\alpha^2\beta+\frac{(1-\nu)\beta^3}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\varphi^2}=0 \tag{26}$$

В полученных уравнениях введены следующие безразмерные переменные:

$$w_0=\frac{w}{h},\ v_0=\frac{v}{h},\ u_0=\frac{u}{h},\ E_0=\frac{E}{\rho_0 c_0^2},\ \rho^{'}=\frac{\rho}{\rho_0},\ a_0=\frac{a^{'}}{c_0},\ x_0=\frac{x}{L},$$

$$t_0=\frac{c_0 t}{L},\ \alpha=\frac{h}{L},\ \beta=\frac{h}{R} \tag{27}$$

где $E$ – модуль Юнга, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $\rho$ – плотность материала, $t$ – время, $u,\ v,\ w$ – перемещения точек срединной плоскости вдоль образующей, кольцевом и в радиальном направлениях соответственно, $h$ – толщина оболочки, $L$ – длина оболочки, $R$ – радиус оболочки, $c_0$ – скорость звука в газе на бесконечности, $\rho_0$ – плотность газа на бесконечности, $x$ – координата вдоль образующей, $\varphi$ – координата в кольцевом направлении, $a^{'}$ – скорость потока газа, набегающего по направлению оси $OX$ с внешней стороны оболочки, $OX$ – ось, вдоль которой изменяется координата $x$.

1) Рассмотрен случай, когда

$$\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} = 0 \tag{28}$$

Введена следующая мера:

$$\mu = \left(\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left(\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_0}\right)^2 + v_0^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi}\right)^2 + w_0^2\right) d\varphi dx_0\right)^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

Примем обозначение:

$$\delta = \frac{12(1-\nu^2)\beta^2}{\alpha^4} \tag{30}$$

Достаточное условие устойчивости можно записать в виде:

$$a_0^2 \leq \frac{E_0 \beta}{\sqrt{12(1-\nu^2)}\rho^{'}} \tag{31}$$

при условии выполнения неравенства

$$\delta \geq \frac{64\pi^4}{5} \tag{32}$$

Выберем случай, когда

$$\frac{L}{R} \geq \frac{4}{5} \tag{33}$$

Поскольку рассматриваются тонкие оболочки ($\beta \leq 1/20$), имеет место неравенство (32). Для оболочек, для которых выполнено неравенство (33), в предположении отсутствия ускорения вдоль образующей, поставленную задачу можно считать решенной. Следует отметить, что, вообще говоря, $\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \neq 0$ при $x_0 \in [0,1]$. В случае, когда $\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} = 0$, получен тот же результат.

2) Рассмотрен случай, когда

$$\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = \frac{\partial v_0}{\partial \varphi}_{|x_0=1} = 0 \tag{34}$$

Для использования теоремы Ляпунова–Мовчана об устойчивости вводится мера $\mu$:

$$\mu = \left( \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left( \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi}\right)^2 + v_0^2 + w_0^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi}\right)^2 \right) d\varphi dx_0 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{35}$$

Примем следующие обозначения:

$$A_1 = \frac{B_3}{4} - \frac{E_0 \rho' \beta^2 \nu^2 (2-\nu)^2}{4(3-\nu)^2} - \frac{E_0 \rho' \beta^4 (2-\nu)^2 (1-\nu)^2 (1-\nu^2)}{192(3-\nu)^2} \tag{36}$$

$$A_2 = \left( \frac{1-\nu^2}{24} + \frac{(1-\nu)(\nu-2)^2}{192(1+\nu)} \right) B_3 + \frac{E_0 \rho' \beta^2 (2-\nu)^2 (1-\nu^2)}{48(3-\nu)^2} \tag{37}$$

$$A_3 = \frac{(1+\nu)^2}{4} B_3 - \frac{E_0 \rho' \beta^4 (2-\nu)^2 (1-\nu)^2 (1-\nu^2)}{192(3-\nu)^2} \tag{38}$$

$$A_4 = \frac{\beta(3\nu+2)}{16} \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}, \quad A_5 = \frac{E_0 \rho' \beta^3 \nu (2-\nu)^2}{8(3-\nu)^2} \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \tag{39}$$

$A_1 = A_6 B_3 + A_7,\ A_2 = A_8 B_3 + A_9,\ A_3 = A_{10} B_3 + A_{11}.$
$B_3^* = -(A_7 - \beta^2 A_9)/(A_6 - \beta^2 A_8),\ 0 < B_3^* < 1,\ a_1 = A_4/(A_6 - \beta^2 A_8),$
$a_2 = A_5/(A_6 - \beta^2 A_8),\ a_3 = A_{10}/(A_6 - \beta^2 A_8),\ a_4 = A_{11}/(A_6 - \beta^2 A_8)$
В предположении отсутствия ускорения вдоль образующей оболочки, резуль-

тат решения задачи можно записать в виде:

$$a_0^2 \leq \frac{E_0\beta}{\sqrt{12(1-\nu^2)}\rho'}\frac{1}{a_1+a_3}(\sqrt{s+1}-\sqrt{s+B_3^*})^2,\ s=\frac{a_4+a_2}{a_3+a_1} \tag{40}$$

Величина скорости падает по сравнению с предыдущим случаем. Дополнительное условие $B_3^* < 1$ ($B_3^* > 0$ выполняется автоматически) накладывает ограничения на механико–геометрические параметры.

**В четвертой главе** «*Общий случай задачи об устойчивости колебаний цилиндрической оболочке в сверхзвуковом потоке газа*» задача решается в более простой, чем в главе 3 постановке. Уравнения движения и граничные условия в безразмерных переменных имеют вид:

$$\frac{E_0}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2}\alpha^2+\nu\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0\partial\varphi}-\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)\right)+$$

$$+\frac{E_0}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial\varphi^2}\beta^2+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0\partial\varphi}\alpha\beta\right)=\rho'\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2}\alpha^2 \tag{41}$$

$$\frac{E_0}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0\partial\varphi}\alpha\beta+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2}\alpha^2\right)+$$

$$+\frac{E_0}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0\partial\varphi}\alpha\beta+\beta^2\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial w_0}{\partial\varphi}\right)\right)=\rho'\frac{\partial^2 v_0}{\partial t_0^2}\alpha^2 \tag{42}$$

$$-\frac{E_0}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^4}\alpha^4+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x_0^2\partial\varphi^2}\alpha^2\beta^2+\frac{\partial^4 w_0}{\partial\varphi^4}\beta^4\right)+\frac{E_0}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\alpha\beta+\right.$$

$$\left.+\beta^2\left(\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}-w_0\right)\right)-\left(a_0\frac{\partial w_0}{\partial x_0}+\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)\alpha=\rho'\frac{\partial^2 w_0}{\partial t_0^2}\alpha^2 \tag{43}$$

$$x_0=0:\ u_0=0,\ v_0=0,\ w_0=0,\ \frac{\partial w_0}{\partial x_0}=0 \tag{44}$$

$$x_0 = 1: \ \frac{\partial u_0}{\partial x_0}\alpha + \nu\beta\left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - w_0\right) = 0, \ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\alpha^2 + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2}\beta^2 = 0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \varphi}\beta + \frac{\partial v_0}{\partial x_0}\alpha = 0, \ -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0^3}\alpha^3 + (\nu - 2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi^2}\alpha\beta^2 = 0 \qquad (45)$$

Обозначения сходны с введенными в предыдущей главе.

Для использования теоремы Ляпунова–Мовчана об устойчивости вводится мера $\mu$:

$$\mu = \left(\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi}\right)^2 + w_0^2\right) d\varphi dx_0\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (46)$$

В предположении отсутствия ускорения в касательной к оболочке плоскости, результаты решения задачи можно записать в следующем виде:

$$a_0\alpha \leq \frac{1}{ed_1 - \frac{\lambda^2 E_0^2 C}{4(1-\nu^2)^2}}\left(\sqrt{a_3 b_3} - \frac{\lambda^2 E_0^3 C\sqrt{B}}{4(1-\nu^2)^3}\right) - \frac{E_0\sqrt{B}}{1-\nu^2} \qquad (47)$$

Для этой оценки необходимо выполнение неравенств:

$$d_1 < 0, \ b_3 > 0, \ ed_1 - \frac{\lambda^2 E_0^2 C}{4(1-\nu^2)^2} > 0, \ 0 \leq C_3 \leq 1 - \nu^2 \qquad (48)$$

$$C_i > 0, \ i = 7, 8, 9, \ 0 \leq C_{10} \leq 1, \ 0 \leq C_{11} \leq 1, \ 0 \leq C_{12} \leq 1 \qquad (49)$$

$$C_8 - \frac{E_0\lambda\alpha^2\beta^2}{6(1+\nu)} < 0, \ C_7 - \frac{E_0\lambda\alpha^4}{12(1-\nu^2)}C_3 < 0 \qquad (50)$$

Здесь введены обозначения:

$$a_3 = \left(2\alpha - \rho^{'}\alpha^2\lambda - \frac{E_0^2 D}{(1-\nu^2)^2 C_7} - \frac{E_0^2 E}{(1-\nu^2)^2 C_8}\right)\left(ed_1 - \frac{\lambda^2 E_0^2 C}{4(1-\nu^2)^2}\right) +$$

$$+\frac{E_0^2 Ce}{(1-\nu^2)^2} \tag{51}$$

$$b_3 = -\frac{\pi^2}{4}C_{12}(1-C_{11})\left(C_7 - \frac{E_0\lambda\alpha^4}{12(1-\nu^2)}C_3\right)\left(ed_1 - \frac{\lambda^2E_0^2C}{4(1-\nu^2)^2}\right)+$$

$$+\frac{\lambda^2E_0^2B}{4(1-\nu^2)^2}d_1 \tag{52}$$

$$e = -\frac{\lambda^2E_0^2E}{4C_{10}(1-\nu^2)^2\left(C_8 - \frac{E_0\lambda\alpha^2\beta^2}{6(1+\nu)}\right)} - \frac{\lambda^2E_0^2D}{4C_{11}(1-\nu^2)^2\left(C_7 - \frac{E_0\lambda\alpha^4}{12(1-\nu^2)}C_3\right)}-$$

$$-E_0\lambda\beta^2 + \frac{\pi^4}{16}(1-C_{12})(1-C_{11})\left(C_7 - \frac{E_0\lambda\alpha^4}{12(1-\nu^2)}C_3\right) \tag{53}$$

$$d_1 = \frac{\pi^2}{4}(1-C_{10})\left(C_8 - \frac{E_0\lambda\alpha^2\beta^2}{6(1+\nu)}\right) + \frac{2E_0\lambda\sqrt{A}}{1-\nu^2}-$$

$$-\frac{E_0\lambda\beta^4}{12(1-\nu^2)}\left(1 - \frac{\nu^2}{1-C_3}\right) \tag{54}$$

**В пятой главе** «*Другой подход к построению функционала Ляпунова—Мовчана в задаче об устойчивости колебаний цилиндрической оболочки*» задача формулируется в той же постановке, что и в главе 3. Вводится мера (46). Результаты решения задачи, полученные в этой главе, можно представить в следующем виде:

1) Рассмотрен случай $\frac{\partial v_0}{\partial \varphi}=0$. Если выполнено неравенство (32), то достаточное условие устойчивости таково:

$$a_0^2 \leq \frac{E_0\beta}{\sqrt{12}\rho'} \tag{55}$$

Поскольку $\beta \leq \frac{1}{20}$, то когда выполнено неравенство (33) справедливо и неравенство (32), а потому для оболочек, для которых выполнено (33), в предположении отсутствия ускорения в касательной плоскости, поставленную задачу для данного случая можно считать решенной.

2) Общий случай. В предположении отсутствия ускорения в касательной к оболочке плоскости, имеет место следующая нижняя оценка критической скорости:

$$a_0^2 \leq \frac{E_0 \alpha^2 \pi^2}{48 \rho'} \tag{56}$$

В заключении работы приведены основные результаты диссертации.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Представлен современный обзор публикаций по развитию метода Ляпунова—Мовчана за последние 50 лет.

2. На основе прямого метода в задаче об устойчивости колебаний прямоугольной пластины найдена нижняя грань критической скорости. Для упругой пластины, бесконечной в одном направлении, имеется согласование с результатами, полученными спектральным подходом.

3. В задаче об устойчивости колебаний цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа найдена нижняя оценка критической скорости для двух случаев дополнительных ограничений на перемещения оболочки.

4. В общем случае задачи об устойчивости колебаний цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа найдена нижняя оценка критической скорости, выраженная через механико—геометрические параметры и некоторые дополнительные варьируемые величины.

5. При другом способе построения функционала получена нижняя оценка критической скорости в общем случае задачи об устойчивости колебаний цилиндрической оболочки в потоке газа. Как частный случай, рассмотрены ограничения на перемещения оболочки, что является обобщением одной из задач пункта 3. При этом незначительно уменьшается нижняя оценка критической скорости.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в научных изданиях, рекомендованных в перечне ВАК


*1. Квачев К.В.* Метод Ляпунова–Мовчана в одной задаче устойчивости колебаний пластины // Вестник МГУ. Сер. Математика. Механика. 2011. №6. С. 62-65.

*2. Квачев К.В.* Метод Ляпунова–Мовчана в одной задаче устойчивости колебаний цилиндрической оболочки // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2012. Т. 12. №2. С. 57-65.


### Статьи в других изданиях


3. *Квачев К.В., Георгиевский Д.В.* Исследование осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки под действием неконсервативной нагрузки // Сборник трудов XII Всероссийской школы–семинара "Волновые явления в неоднородных средах". 24–29 мая 2010. Звенигород. Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Секция 3 (CD–ROM). С. 18–20.

4. *Kvachev K.V.* The Lyapunov–Movchan method in the stability problem of oscillations of elastic plate under noncoservative load// Proceedings of the International Symposium on Advanced in Applied Mechanics and Modern Information Technology. 22-23 September 2011. Baku. P. 215–217.


### Материалы конференций и тезисы докладов


5. *Kvachev K.V.* Lyapunov–Movchan method in problems of complicated system dynamical stability // Journal of Mathematical Science. V. 161. No. 5. 2009. P. 611.

6. *Kvachev K.V.* Stability of Axially Symmetric Aeroelastic Oscillations of a Cylindrical Shell via the Lyapunov–Movchan method // Journal of Mathematical Science, V. 165, No 6. 2010. P. 614.

7. *Квачев К.В.* Прямой метод Ляпунова в некоторых динамических задачах теории упругости // Proc. XV Internat. Conf. Dynamical system modelling and stability investigation. Kyiv. May 25 – 27, 2011. Киев: Изд-во КНУ, 2011. С. 278.

8. *Георгиевский Д.В., Квачев К.В.* Метод Ляпунова–Мовчана в задаче об устойчивости осесимметричных колебаний тонкой цилиндрической оболочки в газе // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2009. С. 47.

9. *Георгиевский Д.В., Квачев К.В.* Метод Ляпунова–Мовчана в задаче об устойчивости колебаний тонкой упругой платины в потоке газа // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2010. С. 58-59.

В работах [3, 8, 9] научному руководителю Георгиевскому Д.В. принадлежат формулировка задач и выбор методов их исследования, Квачеву К.В. принадлежат построение функционалов Ляпунова–Мовчана и нахождение достаточных условий устойчивости.