

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

механико-математический факультет

На правах рукописи

Мельников Андрей Михайлович

**Задачи предельного равновесия дилатирующих  
тел в условиях плоского напряженного  
состояния**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре теории пластичности  
механико-математического факультета Московского государственного  
университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: член-корр. РАН, д. ф.-м. н.,  
профессор,  
Е.В. Ломакин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор,  
А.В. Звягин  
к. ф.-м. н.,  
старший научный сотрудник,  
В.А. Пелешко

Ведущая организация: Институт проблем механики РАН

Защита состоится «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании дис-  
сертационного совета Д.501.001.91 при Московском государственном универ-  
ситете имени М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, г. Москва,  
ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, главное здание МГУ, механико-математиче-  
ский факультет, аудитория 16-10

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математиче-  
ского факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д.501.001.91,

доктор физико-математических наук, профессор

С.В. Шешенин

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Основными критериями пластичности, используемыми при расчете на прочность различных конструкций, являются критерии Мизеса и Треска. Хотя данные изотропные критерии во многих случаях являются достаточными для использования в качестве критериев предельного состояния материала при простом нагружении, их использование обусловлено скорее относительной простотой их численного и аналитического применения и экспериментального определения параметров, чем соответствием реальному поведению материала. На практике же свойства многих, в том числе изотропных, материалов демонстрируют различные отклонения от свойств, предсказываемых теорией, опирающейся на данные критерии. Простейшим примером такого отклонения является различие пределов пластичности при растяжении и сжатии. Для таких материалов не выполняется гипотеза “единой кривой”, согласно которой зависимость эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации остается одинаковой для любого соотношения между компонентами тензора напряжений. Зависимость пластических свойств от напряженного состояния может быть вызвана различием внутренних процессов, происходящих в материале при различных напряженных состояниях. В процессе пластического деформирования материала может происходить образование дислокаций и иных микродефектов, раскрытие или закрытие микротрещин и иные процессы, влияющие на прочность материала. Тип этих процессов, а также соотношение между ними зависит от вида напряженного состояния. Хотя подобная зависимость более характерна для пористых материалов, она, в меньшей степени, проявляется и у металлов, прошедших обработку. Как можно более точный учет такой зависимости важен при расчете работы конструкций под действием экстремальных нагрузок на границе предела прочности материала. На протяжении XX века было раз-

работано множество критериев для учета асимметрии пластических свойств материала. Различные проблемы, связанные с поведением таких материалов рассматривались в работах С.Е. Александрова, Б.Д. Аннина, Ф. Барлата, Г.А. Гениева, Д. Друккера, Б.А. Друянова, И.В. Кучеренко, М.Н. Матченко, А.Ф. Никитенко, В.Н. Николаевского, А.А. Трещева, Н. Флека и других. Описание некоторых из возможных подходов к моделированию свойств таких материалов приведено в обзоре литературы.

В данной диссертации рассматриваются свойства материалов, поведение которых может быть охарактеризовано на основе обобщенного критерия пластичности, предложенного Е.В. Ломакиным для дилатирующих сред.

**Целью диссертационной работы** является изучение поведения материалов, пластические свойства которых описываются обобщенным критерием, в условиях плоского напряженного состояния, вывод определяющих соотношений для плоского напряженного состояния, исследование влияния чувствительности свойств материалов к виду напряженного состояния на их прочностные характеристики, аналитическое решение различных задач для общего и частного вида зависимости свойств материала от условий нагружения и сравнение полученных аналитических решений в рамках упруго-пластической модели с результатами численного решения задач для упруго-пластического материала, полученными с помощью метода конечных элементов.

Рассмотрены задачи об определении поля напряжений в окрестности углового выреза, растяжении полосы, ослабленной угловыми или круговыми вырезами, о поле напряжений в окрестности кругового отверстия в пластине из жестко-идеально пластического материала.

**Научная новизна** Результаты, выносимые на защиту:

- Выведены уравнения для напряжений и скоростей перемещений для дилатирующего материала в условиях плоского напряженного состояния

и исследованы их свойства. Показана связь выведенных уравнений с исследованным ранее случаем плоской деформации.

- Описаны некоторые виды полей характеристик и выведены уравнения, описывающие их форму для общего случая зависимости свойств материала от вида напряженного состояния, которые в частных случаях такой зависимости могут быть решены аналитически.
- Построены кинематически возможные решения задач о плоскости с полубесконечным разрезом, о растяжении полос, ослабленных угловыми или круговыми вырезами с определением полей напряжений в окрестности круговых и угловых вырезов для обобщенного критерия пластичности, характеризующего зависимость свойств материала от вида напряженного состояния. Приведены примеры данных решений для критерия Друкера-Прагера.
- Проведено сравнение полученных решений с численными решениями аналогичных задач для упруго-пластического материала.

**Практическая значимость.** В диссертации получены кинематически допустимые решения нескольких задач определения напряженного состояния в окрестности вырезов для дилатирующих тел и показано, в целом, хорошее соответствие между этими решениями и численными решениями аналогичных задач для упруго-пластического материала в ряде случаев. Полученные результаты могут быть использованы для предварительной оценки предельной нагрузки и для определения полей напряжений в окрестности концентраторов напряжений в задачах плоского напряженного состояния для тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния. Кроме того, полученные уравнения для полей напряжений могут быть использованы для построения решений других подобных задач, для тел другой формы или для

материалов с критерием пластичности, отличным от рассмотренного. Достоверность полученных результатов определяется применением строгих математических методов для получения теоретических решений, а также соответствием решений, полученных с использованием различных методов.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Ломоносовские чтения. Секция механики. 16–25 апреля 2009 года, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова.
- Современные проблемы газовой и волновой динамики. Международная конференция, посвященная памяти академика Халила Амедовича Рахматулина в связи со столетием со дня его рождения. 21–23 апреля 2009 года. Москва. МГУ им. М.В. Ломоносова.
- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвященный 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20–21 января 2011 года.
- X всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Нижний Новгород, 24–30 августа 2011 года.
- Тайваньско-Российский Симпозиум “Deformation and Fracture in Technological Processes”, 28–30 мая 2012 года, Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

и на научно-исследовательских семинарах:

- на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН Е.В. Ломакина,

- на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Победри,
- на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. И.А. Кийко.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [1–3], 1 статья в рецензируемом международном периодическом издании [4], 1 статья в сборнике трудов конференций [5] и 3 тезиса докладов [6–8].

**Личный вклад автора** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 139 страниц, из них 126 страниц текста, включая 63 рисунка. Библиография включает 118 наименований на 13 страницах.

## Содержание работы

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В обзоре литературы** приводится обзор работ, посвященных исследованию пластических свойств материалов с различным поведением при различных напряженных состояниях. В обзор включено несколько вариантов обобщенных критериев пластичности, формулировка которых включает некоторую функцию от параметра вида напряженного состояния, которая может быть выбрана на основе каких-либо предположений, либо определена экспериментально. Проводится обзор как изотропных так и анизотропных критериев пластичности. Кроме того, приведен обзор некоторых моделей упрочнения, которые могут быть использованы вместе с описанными критериями пластичности.

**В первой главе** приводится описание рассматриваемого в диссертации критерия пластичности для изотропных материалов определяющие соотношения для жестко-пластического тела, свойства которого задаются данным критерием. Обобщенный критерий пластичности задается соотношением:

$$f(\xi)\sigma_0 = k, \quad (1)$$

где  $\xi = \sigma/\sigma_0$  — параметр вида напряженного состояния, также известный как параметр трехосности (ratio of triaxiality),  $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$  — среднее напряжение,  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}$  — интенсивность касательных напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$  — девиатор напряжений,  $k$  — константа материала. Параметр  $\xi$  характеризует отношение гидростатического напряжения к интенсивности сдвиговых напряжений и принимает все действительные значения в общем случае. Функция  $f(\xi)$  характеризует чувствительность свойств материала к виду напряженного состояния, выполняя роль коэффициента, связывающего поверхность пластичности Мизеса с поверхностью пластичности рассматриваемого критерия. Функция  $f(\xi)$  необходимым образом предполагается положительной и может быть определена экспериментально. Например, можно, исходя из эксперимента на чистый сдвиг, принять  $f(0) = 1$ , тогда  $k$  будет равняться

интенсивности напряжений при достижении предела пластичности в эксперименте на чистый сдвиг ( $k = \sqrt{3}\tau_s$ ). В этом случае для остальных значений параметра  $\xi$  функция  $f(\xi)$  будет равняться отношению  $\sqrt{3}\tau_s$  к интенсивности напряжений для данного типа напряженного состояния. Принимая закон течения, ассоциированный с условием (1), получим соотношения для скоростей деформации имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij}^p &= h' \left[ \frac{1}{3}\Lambda(\xi)\delta_{ij} + \frac{3}{2}\lambda(\xi)f(\xi)S_{ij}/k \right], \\ \Lambda(\xi) &= f'(\xi), \quad \lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi), \quad h' = H/\chi(\xi), \\ H &= \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}, \quad \chi(\xi) = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda^2(\xi) + \frac{3}{2}\lambda^2(\xi)}.\end{aligned}\tag{2}$$

Функции  $\lambda(\xi)$  и  $\Lambda(\xi)$ , а так же их производные связаны соотношениями:

$$\lambda(\xi) + \xi\Lambda(\xi) = f(\xi), \quad \lambda'(\xi) + \xi\Lambda'(\xi) = 0.\tag{3}$$

Из соотношений (2) могут быть выведены соотношения для скорости объемной деформации:

$$\dot{\varepsilon}^p = \Gamma\Lambda(\xi)/\lambda(\xi),\tag{4}$$

здесь  $\varepsilon^p = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}^p$  — величина объемной пластической деформации,  $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} = h'\lambda(\xi)$  — интенсивность скоростей сдвиговых пластических деформаций,  $e_{ij} = \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon^p\delta_{ij}$  — девиатор пластических деформаций. В силу этого предполагается, что  $\lambda(\xi) > 0$ . Предельная поверхность определяемая критерием (1) является невогнутой при выполнении условия  $f(\xi) \geq 0$ .

Дан вывод соотношений теории пластичности для случая плоского напряженного состояния, рассматриваемого в данной работе. В силу равенства нулю одного из трех главных напряжений, область изменения параметра вида напряженного состояния  $\xi$  ограничена:

$$|\xi| \leq \frac{2}{3}.\tag{5}$$

Для упрощения рассмотрения случая плоского напряженного состояния вводится обозначение  $S = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$  — плоский аналог среднего напряжения. Для жестко-пластического тела из критерия пластичности (1) следует, что связь среднего напряжения и параметра вида напряженного состояния взаимно однозначная, так как:

$$S'_\xi = \frac{3f(\xi) - \xi f'(\xi)}{2f^2(\xi)} = \frac{3k\lambda(\xi)}{2f^2(\xi)}. \quad (6)$$

При выполнении условий, наложенных выше на функцию  $f(\xi)$ , данное выражение положительно для всех значений параметра  $\xi$ . Напряжения при этом могут быть найдены по формулам:

$$\sigma_{11} = S - kF(S) \sin 2\varphi, \quad \sigma_{22} = S + kF(S) \sin 2\varphi, \quad \sigma_{12} = kF(S) \cos 2\varphi. \quad (7)$$

где  $\varphi$  — угол между направлением оси  $x_1$  и нормалью к площадке, на которой действует максимальное касательное напряжение, а выражение для функции  $F(S)$  имеет вид:

$$F(S) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{4}(\xi(S))^2}}{f(\xi(S))}. \quad (8)$$

С учетом введенных выше обозначений, система уравнений равновесия для жестко-пластического тела примет вид:

$$\begin{aligned} S_{,1} - kF'(S)(S_{,1} \sin 2\varphi - S_{,2} \cos 2\varphi) - 2kF(S)(\varphi_{,1} \cos 2\varphi + \varphi_{,2} \sin 2\varphi) &= 0, \\ S_{,2} + kF'(S)(S_{,1} \cos 2\varphi + S_{,2} \sin 2\varphi) - 2kF(S)(\varphi_{,1} \sin 2\varphi - \varphi_{,2} \cos 2\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Штрихом обозначена производная по среднему напряжению  $S$ . Система уравнений в частных производных (9) содержит две неизвестные величины — среднее напряжение  $S$  и угол  $\varphi$ . Система (9) является гиперболической при  $|kF'(S)| < 1$ . Производная функции  $F(S)$ , определенной уравнением (8) стремится к бесконечности при стремлении параметра  $\xi$  к  $\pm \frac{2}{3}$ . Следовательно,

для любого допустимого вида функции  $f(\xi)$  существует диапазон напряжений, в котором система уравнений равновесия не является гиперболической. В случае гиперболичности системы (9), уравнения для характеристик и соотношения для величин переменных вдоль них имеют вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \varphi_{\alpha, \beta} = \frac{-\cos 2\varphi \pm \sqrt{1 - k^2 F'^2}}{-kF' + \sin 2\varphi}, \quad dS \mp \frac{2kF d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 F'^2}} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — индексы, обозначающие семейства характеристик гиперболической системы уравнений (9). Как видно из этих соотношений, угол между характеристиками в общем случае зависит от вида напряженного состояния для любой зависимости пластических свойств от вида напряженного состояния, а сами характеристики не являются линиями скольжения. Если ввести угол  $\psi$ , зависящий от вид напряженного состояния, следующим образом:

$$\sin 2\psi = -kF', \quad \cos 2\psi = \sqrt{1 - k^2 F'^2}, \quad (11)$$

то, пользуясь соотношениями вдоль характеристик (10), можно найти угол между характеристиками:

$$\omega = 2\psi + \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

Таким образом, в случае плоского напряженного состояния угол между характеристиками зависит от напряженного состояния даже при отсутствии зависимости критерия текучести от напряжений. Кроме того, в данной главе рассматриваются основные свойства напряжений в случае гиперболичности системы уравнений равновесия и выводится система уравнений для скоростей перемещений:

$$\begin{aligned} (v_{1,1} + v_{2,2}) \cos 2\varphi + kF'(S)(v_{1,2} + v_{2,1}) &= 0, \\ v_{1,1} - v_{2,2} &= -(v_{1,2} + v_{2,1}) \operatorname{tg} 2\varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Тип данной системы совпадает с типом системы (9). В случае гиперболичности систем уравнений их характеристики также совпадают. Вдоль характе-

ристик системы (13) выполняются соотношения Гейрингер:

$$dv_\alpha - v_3 d\varphi_\alpha = 0, \quad dv_\beta - v_4 d\varphi_\beta = 0. \quad (14)$$

Здесь  $v_\alpha$  и  $v_\beta$  — скорости вдоль соответствующих семейств характеристик,  $v_3$  и  $v_4$  — нормальные к характеристикам компоненты скорости:

$$v_3 = (v_\beta - v_\alpha \cos \omega) / \sin \omega, \quad v_4 = (v_\beta \cos \omega - v_\alpha) / \sin \omega, \quad \omega = \varphi_\beta - \varphi_\alpha. \quad (15)$$

Несмотря на различие постановок задач в случае плоской деформации и плоского напряженного состояния, выведенные уравнения по форме совпадают с уравнениями для случая плоской деформации, выведенными Е.В. Ломакиным и Б.Н. Федуловым, с той лишь разницей, что в случае плоской деформации отсутствуют ограничения на значение параметра  $\xi$  и функция  $F(S)$  имеет вид:

$$F(S) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 - \frac{\Lambda^2(\xi(S))}{9\lambda^2(\xi(S))}}}{f(\xi(S))}. \quad (16)$$

Таким образом, дальнейшие выкладки можно рассматривать как развитие теории для случая обобщенной плоской задачи теории пластичности, тип плоской задачи при этом определяется формой использованной функции  $F$ .

**Во второй главе** приводится решение нескольких задач теории пластичности для обобщенного критерия пластичности (1) в случае гиперболичности системы уравнений равновесия (9) как в общем случае, так и в случае частного вида зависимости свойств материала от вида напряженного состояния — для критерия Друкера-Прагера. Первой рассмотрена задача об определении напряженного состояния в окрестности вершины полубесконечного разреза в удаленном поле растягивающих напряжений, нормальных к его поверхности. В зависимости от критерия пластичности возможно построение как непрерывного так и разрывного поля напряжений. Соответствующие поля характеристик показаны на рис. 2. В обоих решениях использованы два

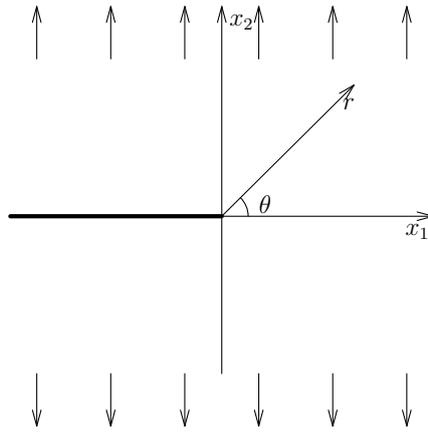
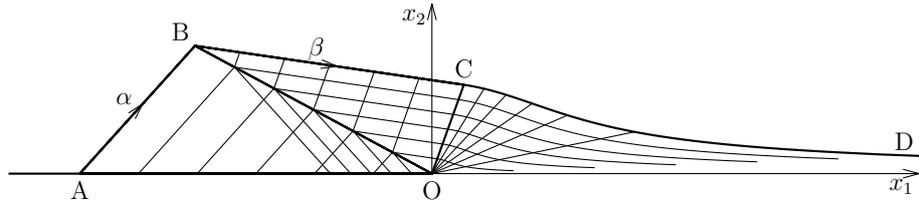


Рис. 1. Полубесконечный разрез в поле сил растяжения

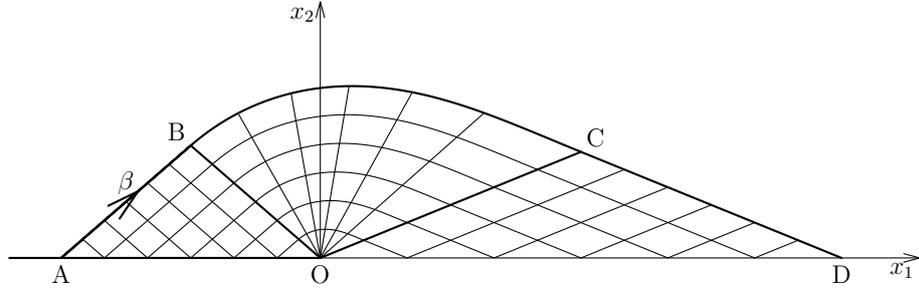
типа полей характеристик — поле прямолинейных характеристик, в котором реализуется равномерное напряженное состояние, и центрированный веер характеристик, в котором прямолинейны характеристики только одного семейства. Стоит отметить, что напряженное состояние в вершине разреза в обоих типах решения определяется неоднозначно. Напряжения на поверхности разреза равны нулю, следовательно в прилегающей области  $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$ , что в терминах переменных, входящих в уравнения равновесия (9), означает:

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{4}, \quad S = \mp kF(S). \quad (17)$$

В силу симметрии, на линии положительной полуоси  $Ox_1$  (рис. 2) сдвиговые напряжения  $\sigma_{12}$  равны нулю, следовательно  $\varphi = \mp \pi/4$ . Поля характеристик решения должны соединить эти два граничных условия. Так как при любом критерии пластичности угол между характеристиками зависит от напряжения, для построения веера прямолинейных характеристик необходимо построить уравнения тангенциального семейства характеристик в зависимости от параметра вида напряженного состояния для обобщенного критерия пластичности. Для вывода системы уравнений, определяющих веер прямолинейных  $\alpha$ -характеристик, введем вспомогательную полярную систему координат  $(r, \theta)$  с началом в центре веера. Пусть некоторая  $\beta$ -характеристика



(а). Характеристики для непрерывного поля напряжений



(б). Характеристики для разрывного поля напряжений

Рис. 2. Примеры построения полей характеристик в задаче о растяжении плоскости с линейным разрезом

проходит через точку  $(r_0, \theta_0)$  в полярной системе координат. Уравнение линии, проходящей через точку  $(r_0, \theta_0)$  и образующей угол  $\omega$  с радиус-вектором, описывающим точку характеристики имеет вид

$$r = \exp \left( \ln r_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{ctg} \omega(\theta) d\theta \right). \quad (18)$$

Угол  $\omega$  — это угол между характеристиками, определенный уравнениями (11) и (12). Этот интеграл может быть вычислен для произвольного вида функции  $F(S)$ , с учетом зависимости среднего напряжения  $S$  от угла наклона  $\alpha$ -характеристики:

$$r = r_0 \left( \frac{F(S(\theta_0)) \sqrt{1 - k^2 F'^2(S(\theta_0))}}{F(S(\theta)) \sqrt{1 - k^2 F'^2(S(\theta))}} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Заметим, что в случае, когда система уравнений (9) становится параболической, знаменатель уравнения (19) обращается в ноль, следовательно, с помощью централизованного веера характеристик, вообще говоря, не всегда возмож-

но соединить границу разреза с положительной полуосью оси  $Ox_1$ .

Связь между средним напряжением  $S$  и углом наклона  $\alpha$ —характеристики можно получить, воспользовавшись соотношением для угла наклона  $\alpha$ —характеристики (10),

$$d\theta = d\varphi_\alpha = d\varphi - d\psi = \frac{k^2 F F'' + k^2 F'^2 - 1}{2kF\sqrt{1 - k^2 F'^2}} dS. \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20) образуют систему уравнений, задающую  $\beta$ —характеристику параметрически, в зависимости от параметра  $S$ .

Аналогично можно определить центрированный веер прямолинейных  $\beta$ —характеристик. В этом случае угол  $\theta$  равен углу наклона  $\beta$ —характеристики, и закон его изменения имеет вид:

$$d\theta = d\varphi_\beta = d\varphi + d\psi = -\frac{k^2 F F'' + k^2 F'^2 - 1}{2kF\sqrt{1 - k^2 F'^2}} dS. \quad (21)$$

Уравнение, описывающие зависимость радиуса от напряжения остается тем же, что и в предыдущем случае. Система уравнений, параметрически задающая  $\alpha$ —характеристику, состоит из уравнений (19) и (21).

В случае, когда построение непрерывного решения невозможно, можно построить разрывное поле напряжений, подобное показанному на рис. 2, б, где  $OB$  — линия разрыва напряжений. На линии разрыва непрерывны нормальное и касательное к линии разрыва напряжения. Положение линии разрыва и скачок тангенциальной компоненты напряжений находится из соотношений для напряжений вдоль характеристик (10) и условия пластичности (1). Возможность построения непрерывного либо разрывного решения определяется использованным критерием пластичности.

Построенное решение естественным образом может быть расширено и на его основе можно построить решения задач о напряженном состоянии в окрестности углового выреза в поле сил растяжения, а также о предельном состоянии полосы с угловыми вырезами.

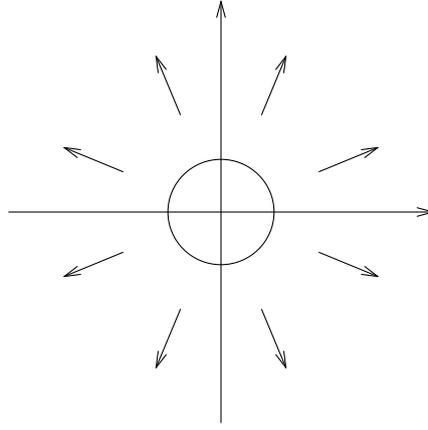


Рис. 3. Плоскость с круговым отверстием под действием равномерной растягивающей нагрузки

Другой подход к решению задач теории пластичности продемонстрирован в решении задачи о нахождении поля напряжений при всестороннем растяжении бесконечной плоскости с круговым отверстием, свободным от напряжений (рис. 3). Эта задача также может рассматриваться как задача о предельном состоянии кольца под действием всесторонней равномерно распределенной по внешнему радиусу нагрузки, при этом напряжение на внешнем радиусе кольца является предельным значением напряжения, при котором кольцо полностью переходит в состояние пластичности. В этом случае задача становится одномерной (остается только зависимость от радиуса) и уравнение равновесия принимает вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (22)$$

В силу симметрии касательные напряжения  $\sigma_{r\theta}$  равны нулю, следовательно  $\varphi = \theta \mp \frac{\pi}{4}$  и уравнение равновесия принимает вид:

$$\frac{d(S \mp kF(S))}{dr} \mp \frac{2kF(S)}{r} = 0. \quad (23)$$

Уравнение равновесия имеет решение:

$$\ln \frac{r}{r_0} = \ln \sqrt{\frac{F(S_0)}{F(S)}} \mp \int_{S_0}^S \frac{dS}{2kF(S)}, \quad (24)$$

где  $S_0$  — среднее напряжение при  $r = r_0$ . В диссертации показано, что данное решение стремится к напряженному состоянию, характеризующемуся значением параметра  $|\xi| = \frac{3}{2}$ , т.е. в случае плоского напряженного состояния значение параметра, получаемое при решении данной задачи, выходит за пределы области гиперболичности системы уравнений равновесия (9) для произвольного критерия пластичности в форме (1). Используя решение уравнения (24) в задаче о кольце, можно найти радиальное напряжение на внешнем радиусе, при котором кольцо переходит в состояние пластичности. Для этого необходимо в уравнение (24) поставить значение  $r$ , равное внешнему радиусу кольца.

Рассмотрены примеры решения приведенных выше задач для критерия Друкера-Прагера, получаемого из выражения (1) при  $f(\xi) = 1 + C\xi$ . Параметр  $\xi$  в пластической области может быть выражен через среднее напряжение  $S$ :

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{S}{k - \frac{2}{3}CS}. \quad (25)$$

При этом среднее напряжение  $S$  находится в пределах

$$-\frac{3k}{3-2C} \leq S \leq \frac{3k}{3+2C}. \quad (26)$$

Функция  $F(S)$  в этом случае может быть явно выражена через среднее напряжение:

$$F(S) = \frac{1}{3k\sqrt{3}} \sqrt{(9-4C^2) \left( \left( \frac{9k}{9-4C^2} \right)^2 - \left( S + \frac{6kC}{9-4C^2} \right)^2 \right)}. \quad (27)$$

Система уравнений (9) для напряжений становится параболической при

$$S = \frac{3k}{9-4C^2} \left( \pm \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{9-C^2}} - 2C \right). \quad (28)$$

Уравнения (10) для характеристик и соотношения вдоль них могут быть проинтегрированы. Для сокращения записи введем обозначения:

$$a = \frac{9}{9-4C^2}, \quad s = \frac{S}{k} + \frac{6C}{9-4C^2}. \quad (29)$$

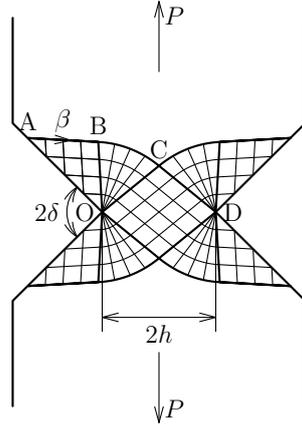


Рис. 4. Непрерывное поле характеристик в задаче о растягиваемой полосе при  $C = -1$ ,  $\delta = \pi/4$

В этих обозначениях уравнения (10) для характеристик принимают вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \varphi_{\alpha, \beta} = \frac{-\cos 2\varphi \pm \frac{\sqrt{a^3 + (a+1/3)s^2}}{\sqrt{a}\sqrt{a^2 - s^2}}}{\frac{s}{\sqrt{3a}\sqrt{a^2 - s^2}} + \sin 2\varphi}. \quad (30)$$

Соотношения вдоль них имеют вид:

$$2\sqrt{3a+1} \arcsin \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{3a}}}{a} s + \arcsin \frac{a - s(1 + \frac{1}{3a})}{(a-s)\sqrt{1 + \frac{1}{3a}}} - \arcsin \frac{a + s(1 + \frac{1}{3a})}{(a+s)\sqrt{1 + \frac{1}{3a}}} \mp 4\varphi = \operatorname{const}. \quad (31)$$

Основным отличием данных уравнений от случая, рассмотренного в работах Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова является зависимость функции  $F$  от среднего напряжения, отсутствовавшая при плоской деформации.

На основании данных уравнений приведены примеры решения описанных выше задач. Для задачи о растяжении полосы с угловыми вырезами (рис. 4) построена зависимость предельной нагрузки (нагрузки, при которой центральное сечение целиком находится в области пластичности) от угла выреза и параметра  $C$ , определяющего чувствительность пластических свойств среды к виду напряженного состояния (рис. 5). Кроме того для каждого зна-

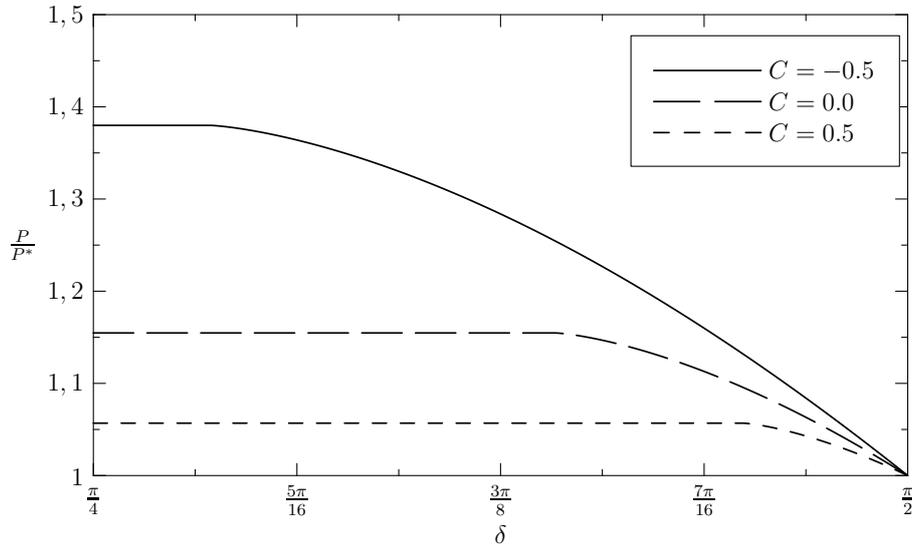


Рис. 5. Изменение коэффициента усиления (отношение предельной нагрузки в о полосе с угловыми вырезами к предельной нагрузке в полосе ширины  $2h$  без выреза) в зависимости от угла выреза и коэффициента  $C$

чения угла выреза найдено значение параметра  $C$ , разделяющего области построения разрывного и непрерывного решения. Построение неразрывного поля напряжений в задачах о растяжении плоскости и полосы с угловым вырезом величины  $2\delta$  возможно для параметров  $C$  и  $\delta$ , лежащих выше линии, изображенной на рис. 6.

Найдено аналитическое решение задачи о растяжении плоскости с круговым отверстием. Уравнение (24) в случае критерия Друкера-Прагера принимает вид:

$$\begin{aligned}
\ln \frac{r}{r_0} = & \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{9-4C^2}} \arcsin \left( \frac{9-4C^2}{9} \left( \frac{S}{k} + \frac{6C}{9-4C^2} \right) \right) - \\
& - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{9-4C^2}} \arcsin \left( \frac{3+4C}{6+2C} \right) - \\
& - \frac{1}{4} \ln \left( \left( \frac{9}{9-4C^2} \right)^2 - \left( \frac{S}{k} + \frac{6C}{9-4C^2} \right)^2 \right) + \\
& + \frac{1}{4} \ln \left( \left( \frac{9}{9+4C^2} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{3+4C}{6+2C} \right)^2 \right) \right).
\end{aligned} \tag{32}$$

Соответствующие этому решению напряжения приведены на рис. 7. Построено

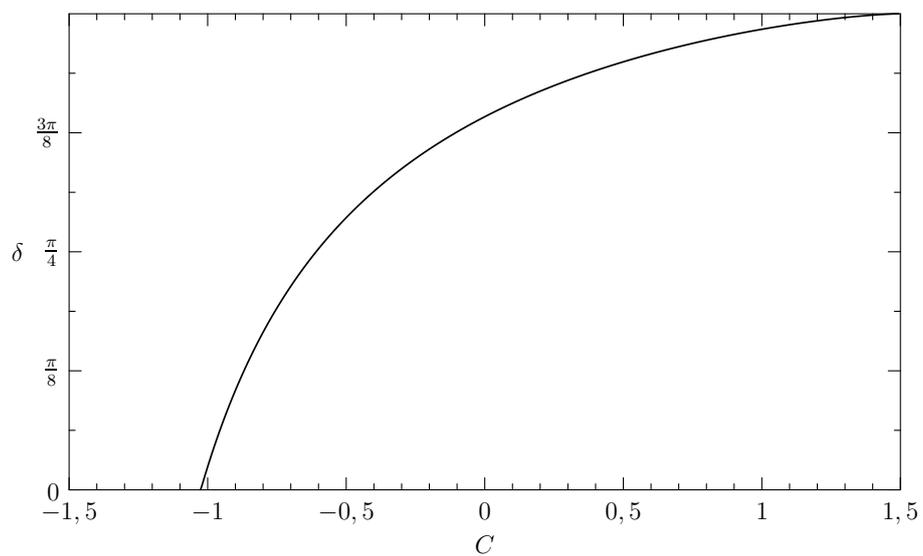


Рис. 6. Значение половины угла выреза  $\delta$ , отделяющее область, в которой возможно построение непрерывного поля напряжений в окрестности углового выреза, от области в которой возможно построить только разрывные решения

решение задачи о предельном состоянии полосы симметричными круговыми вырезами. Для сравнения приведены, полученные в работах Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова решения аналогичных задач для случая плоской деформации.

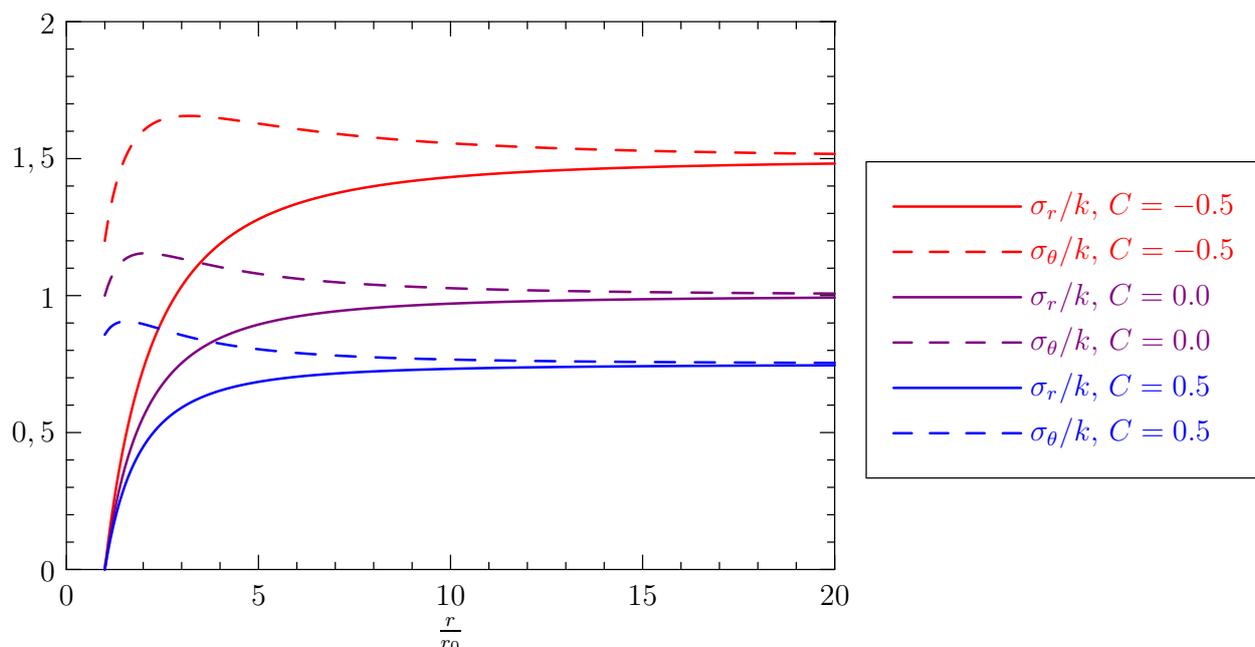


Рис. 7. Напряжения в осесимметричной задаче о растяжении плоскости с круговым отверстием при различных значениях коэффициента  $C$

В третьей главе проводится сравнение полученных аналитических решений для критерия Друкера-Прагера с численными решениями для упруго-пластического материала, полученными методом конечных элементов в программе Code\_Aster. Для моделирования поведения жестко-пластического материала использован материал с большим модулем Юнга и пренебрежимо малым упрочнением. В задаче о напряженном состоянии в окрестности углового выреза продемонстрировано близкое соответствие форм пластической области с формой полей характеристик. Сравнение напряжений на горизонтальной линии симметрии со значениями из аналитических решений показывает, что данные величины весьма близки (рис. 8).

Хорошее соответствие было также получено при моделировании задачи о растяжении плоскости с круговым отверстием (рис. 9).

В задачах о растяжении полос с угловыми и круговыми вырезами полученные поля напряжений и области пластичности существенно отличаются от полей, полученных в рамках жестко-пластической модели, в силу наличия в

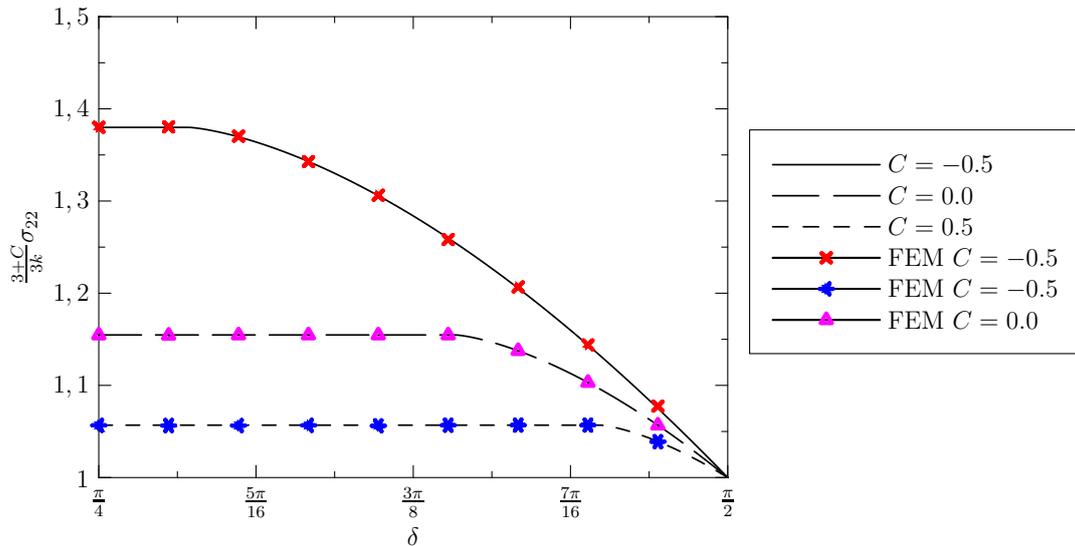


Рис. 8. Сравнение напряжений  $\sigma_{22}$  в задаче о напряженном состоянии в окрестности вершины углового выреза на линии симметрии, полученных в результате численного решения с теоретическими

центре полосы упругой области. Значения предельной нагрузки, полученные при численном решении задачи, меньше значений в аналитических решениях, представленных в предыдущей главе для кинематически возможных полей.

Так как полученные аналитические решения большей части задач (кроме центрально симметричной задачи о растяжении плоскости с круговым отверстием) нельзя рассматривать как точные решения, поскольку в них и не учитывалось влияние напряженного состояния в жестких областях, то решения, полученные методом конечных элементов, в той или иной мере могут отличаться от них. Аналитические решения задач о растяжении полос и о напряженном состоянии вблизи углового выреза являются кинематически возможными, поэтому различие в значениях предельной нагрузки для растяжения полосы с угловыми вырезами и наличие упругих областей в задачах о растяжении полос с угловыми и круговыми вырезами вполне ожидаемы. При этом аналитическое решение хорошо описывает поле напряжений и форму пластических областей в окрестности угловых и круговых вырезов для

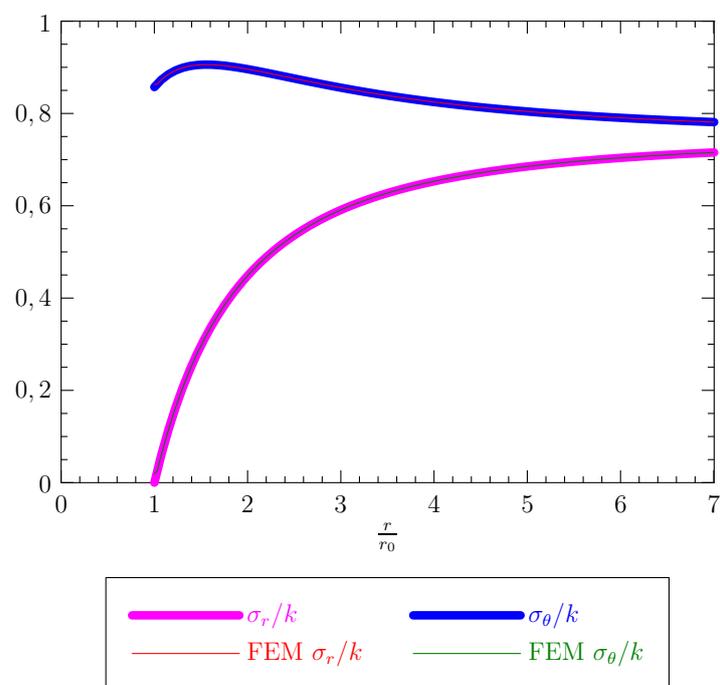


Рис. 9. Сравнение аналитического решения задачи о растяжении плоскости с круговым отверстием с численным решением для случая  $C = 0.5$

произвольных значений параметра  $C$ .

**В Заключение** в заключении приводится обзор основных результатов диссертации:

1. Для исследуемого критерия пластичности выведены основные уравнения и соотношения для случая плоского напряженного состояния.
2. Рассмотрены случаи гиперболичности и параболичности системы уравнений равновесия. В условиях гиперболичности системы уравнений равновесия найдены уравнения характеристик для скоростей и напряжений и исследованы соотношения вдоль них. Исследованы основные свойства полей напряжений в области гиперболичности уравнений.
3. Проведен сравнительный анализ решений для условий плоского напряженного состояния и плоской деформации дилатирующих тел.
4. Получены уравнения для построения централизованного поля прямоли-

нейных характеристик и поля характеристик в центрально симметричной задаче.

5. Построены решения задач о полях напряжений в окрестности углового выреза, в растягиваемой плоскости с круглым отверстием, а также в растягиваемых полосах с угловыми и круговыми вырезами для общего случая зависимости свойств материала от вида напряженного состояния, а также для критерия Друкера-Прагера.
6. В рамках критерия Друкера-Прагера проведен анализ влияния чувствительности пластических свойств материалов к виду напряженного состояния на величину возникающих напряжений и предельных нагрузок. Продемонстрировано заметное влияние параметра, определяющего чувствительность свойств материала к виду внешних воздействий, на характер получаемых решений.
7. Проведено сравнение аналитических решений различных задач, полученных в рамках модели жестко-пластического тела с решениями аналогичных задач для упруго-пластического материала, полученными методом конечных элементов. Показано, что численные и аналитические решения задач для полей напряжений в окрестности вырезов весьма близки и аналитические решения могут быть использованы для оценки величины напряжений в этих случаях. В некоторых задачах о растяжении полос с вырезами аналитические решения дают верхнюю оценку предельной нагрузки, но при определенных значениях механических и геометрических параметров они могут быть использованы с достаточной степенью точности.

## Список публикаций

1. Ломакин Е. В., Мельников А. М. Пластическое плоское напряженное состояние тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 2. С. 48–64.
2. Ломакин Е. В., Мельников А. М. Задачи плоского напряженного состояния тел с вырезами, пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 123–135.
3. Мельников А. М. Плоское напряженное состояние полосы из материала, свойства которого зависят от вида напряженного состояния // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 2352–2353.
4. Lomakin E. V., Melnikov A. M. Limit plastic state of notched stripes with Stress state dependent properties // Deformation and Fracture in Technological Processes. Key Engineering Materials. 2013. Vol. 528. Pp. 79–88.
5. Ломакин Е. В., Мельников А. М. Растяжение пластины с разрезом, пластические свойства которой зависят от вида напряженного состояния // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2011 года). М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 172–177.
6. Ломакин Е. В., Мельников А. М. Плоское пластическое течение сред, чувствительных к виду напряженного состояния, в окрестности надрезов // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Апрель 2009 года. Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ, 2009. С. 107.

7. Ломакин Е. В., Мельников А. М. Пластическое течение дилатирующих сред в условиях плоского напряженного состояния // Современные проблемы газовой и волновой динамики. Тезисы докладов международной конференции, посвященной памяти академика Халила Амедовича Рахматулина в связи со столетием со дня его рождения. 21–23 апреля 2009 года. Москва. МГУ им. М.В. Ломоносова. 2009. С. 63.
8. Lomakin E. V., Melnikov A. M. Limit plastic state of notched stripes with stress state dependent properties // NSC-RFBR. Taiwan-Russia Symposium. Russian Academy of Sciences. A. Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics. Deformation and Fracture in Technological Process. Book of Abstracts. 28–30 May 2012. Moscow, Russia. 2012. P. 21.