**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет**

На правах рукописи

Буров Александр Анатольевич

Задачи динамики систем твёрдых тел с постоянным и периодически изменяемым распределением масс

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в секторе теории устойчивости и механики управляемых систем отдела механики Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Вычислительный центр им.А.А.Дородницына Российской Академии наук»

Научный консультант:	Степанов Сергей Яковлевич, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Болотин Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор
	Красильников Павел Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор
	Сарычев Василий Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского

Защита состоится 31 мая 2013 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.02 при МГУ им.М.В.Ломоносова по адресу: *119991, Москва, Ленинские горы, 1, Главное здание МГУ, ауд. 16-10.*

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций *Ломоносовский проспект, д.27, Фундаментальная библиотека, сектор А – 8 этаж, к.812.*

Автореферат разослан «   »   2013 года

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
при при МГУ им. М. В. Ломоносова, к.ф.-м.н.   Прошкин В. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Использование особенностей распределения масс механических систем, в частности, их симметрий, в ряде ситуаций облегчает отыскание необходимых рабочих режимов исследуемой системы и их качественных свойств, например, устойчивости. Наличие в системах твёрдых тел подвижных масс, совершающих заданное программное относительное движение, может быть использовано для управления движением системы в целом. В качестве подвижных массивных элементов могут использоваться осесимметричные роторы, совершающие движение с постоянными или переменными относительными угловыми скоростями, и точечные массы, совершающие движение вдоль заданных кривых (см., например, работы В.В.Козлова с соавторами, Ф.Л.Черноусько, В.В.Румянцева, В.А.Сарычева, А.Анчева, В.В.Белецкого, Й.Виттенбурга, В.В.Крементуло и других). Широкая применимость таких систем в технике предопределяет актуальность избранной темы исследования.

Целью диссертации является развитие методов исследования особенностей влияния распределения подвижных и неподвижных масс на динамику систем твёрдых тел и, в частности, на реализацию программных установившихся и периодических движений орбитальных объектов, на существование и устойчивость установившихся движений систем твёрдых тел, на наличие инвариантных соотношений (первых интегралов) уравнений движения в задачах динамики твёрдых тел, на неинтегрируемость уравнений движения и регулярную и хаотическую динамику в механике систем многих тел. Ставится задача развития общих методов классической механики для систем твёрдых тел, совершающих движение по трёхмерной сфере.

В диссертации использованы и развиты **методы** аналитической механики, теории устойчивости движения, качественной теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории управления движением, а также методы компьютерного моделирования.

Достоверность полученных результатов опирается на строгое применение математических методов, на сопоставление результатов компьютерного моделирования и теоретических результатов.

Практическая ценность работы. Теоретические результаты диссертации используются при исследовании устойчивости равновесий систем твёрдых тел, при чтении специальных курсов по механике и теории устойчивости движения, а также могут быть использованы при проектировании орбитальных объектов с переменным распределением масс.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались на ряде семинаров ведущих отечественных и зарубежных научных учреждений. Среди них, в частности, семинар по аналитической механике и теории устойчивости движения МГУ им.М.В.Ломоносова под руководством акад.В.В.Румянцева, чл.-корр. В.В.Белецкого, проф.А.В.Карапетяна; семинар МГУ им.М.В.Ломоносова под руководством акад.В.В.Козлова, чл.-корр. Д.В.Трещёва, проф.С.В.Болотина; семинар МГУ им.М.В.Ломоносова по динамике относительного движения под руководством чл.-корр.В.В.Белецкого, проф.Ю.Ф.Голубева, доц.К.Е.Якимовой; семинар Отдела механики Вычислительного центра им.А.А.Дородницына РАН под руководством акад.В.В.Румянцева, проф.С.Я.Степанова, д.ф.-м.н. В.С.Сергеева и проф.А.С.Сумбатова; семинар Лаборатории Моделирования в механике (LMM) Университета Париж VI, Франция, под руководством проф. А.Кабанна, проф.Р.Гатиньоль, проф. М.Паскаль; семинар кафедры механики Университета Пуатье, Франция, под руководством. проф.К.Валле; семинары Центра исследования и преподавания прикладной математики (CERMA) и Центра математики, информатики и компьютерных наук (CERMICS) Национальной школы мостов и шоссе, Франция, под руководством проф.Д.П.Шевалльe; семинар кафедры механики Университета Эври - Валь-д'Эссон, Франция, под руководством проф.Ж.Лербе и проф.М.Паскаль; семинар кафедры математики Университетских факультетов Божией Матери Мира (FUNDP), Намюр, Бельгия под руководством проф.Ж.Анрара, проф.А.Лемэтр и проф. Г.В.Плотниковой; семинар кафедры математики Католического Университета Лювена (UCL), Бельгия, под руководством проф.П. ван Мёрбеке и доц.К.Пайфера; семинар Института технической механики Венского технического университета, Австрия, под руководством проф.Х.Трогера и проф.А.Штайндля; семинар отдела механики и авиакосмического машиностроения (MAE) Принстонского университета под руководством проф.Ф.Холмса и проф.Н.Э.Леонард; семинар Центра аэрокосмических наук и технологий Университета Внутренней Бейры, Португалия, под руководством проф.А.Д.Герман; семинар кафедры математики Университета Порто, Португалия, под руководством проф.Г.Смирнова.

Результаты исследований также докладывались на ряде научных российских и международных конференций. Среди них, в частности, Академические чтения по космонавтике памяти С.П.Королёва и других выдающихся отечественных учёных – пионеров освоения космического пространства (2005 - 2013); Международные научные конференции по механике "Поляховские чтения"; Международная конференция, посвящённая 100-летию А.А.Андронова, Нижний Новгород, 2-6 июля 2001 года; Международные симпозиумы по классической и небесной механике, Великие Луки, 2001, 2004, 2007, 2010; GAMM Tagung 1996, Prag; GAMM Tagung 1998, Gëttingen; Symposium Geometry, Symmetry and Mechanics II: 21-27 July 2002, Warwick, England; Meeting of Society for Theoretical and Applied Mathematics and Mechanics (STAMM XV), 10-14 July, 2006, Vienna; European Non-linear Oscillation Conference (ENOC), 2008, Санкт-Петербург; European Non-linear Oscillation Conference (ENOC), 2011, Roma.

Научная новизна. Предложен новый, оригинальный подход к исследованию задачи о стационарных конфигурациях систем с переменным распределением масс в центральном ньютоновском поле сил в точной постановке, развивающий известный подход В.А.Сарычева и В.Шилена к задачам такого класса в рамках спутникового приближения. Этот подход позволил получить аналитическое решение в задаче о движении вибрирующего гантелеобразного тела, соответствующее движению, на котором гантель образует постоянный – нулевой или ненулевой – угол с направлением на притягивающий центр, а её центр масс движется по эллиптической орбите. Аналогичное решение получено в обобщённой, плоской, эллиптической задаче трёх тел, в которой третье присоединено к одному из основных тел невесомым нерастяжимым тросом переменной длины.

В рамках теории Рауса и ее обобщений развит метод анализа структуры линейных многообразий, возникающих при исследовании необходимых и достаточных условий устойчивости равновесия системы твёрдых тел. На случай движения тела с роторами по круговой кеплеровской орбите распространён метод построения управлений, сохраняющий лагранжеву структуру уравнений движения и основные симметрии. Оценены возможности использования метода для реализации и стабилизации относительных равновесий. Развит подход к решению полуобратной задачи об относительных равновесиях гиростата с шаровым тензором инерции на круговой орбите. Результат применён к задаче об относительном движении гиростата с распределением масс, допускающим группу симметрии тетраэдра. Дано обоснование подхода к исследованию необходимых и достаточных условий устойчивости механических систем, стеснённых односторонними голономными связями, реализуемыми большими потенциальными силами.

Известный подход к отысканию дополнительных частных интегралов типа интеграла Гесса в задаче о движении тяжёлого твёрдого тела распространён на задачи о движении тяжёлого гиростата на струне, о движении тяжёлого гиростата по гладкой горизонтальной плоскости, о движении тела в потоке частиц, о движении тяжёлого тела, опирающегося остриями на гладкую плоскость. Доказана неинтегрируемость уравнений движения в задачах о движении двухзвенного физического маятника и о движении гироскопа в кардановом подвесе.

Развито предложенное В.В.Козловым и Д.В.Трещёвым представление о т.н. «ограниченной постановке» в задачах динамики твёрдых тел, для которых «длина» существенно превосходит «ширину» и «толщину». Для таких тел в задачах о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой и о движении твёрдого тела в идеальной жидкости установлено сочетание легко наблюдаемого регулярного движения «оси тела» и трудно наблюдаемого, хаотического движения тела вокруг этой «оси».

Изучены особенности постановки задач классической механики точки и твёрдого тела, вложенных в трёхмерное сферическое пространство. Исследованы возможности использования понятий центра масс и центра тяжести, изучены условия равновесия тел в сферическом аналоге центрального поля ньютоновского притяжения, исходя из «ограниченной постановки» в задачах механики твёрдого тела выписан аналог уравнения Белецкого для «плоских» колебаний сферического спутника на эллиптической орбите. Найдены нетривиальные решения в задаче о движении гантелеобразного тела в сферическом аналоге центрального поля ньютоновского тяготения.

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов INTAS, ФЦП «Ведущие научные школы», РФФИ.

Личный вклад. Существенная часть работ, составивших основу диссертации, выполнена без соавторов. Из совместных работ с другими авторами, среди которых А.Д.Герман, А.Дюган, А.В.Карапетян, И.И.Косенко, И.Мотт, Я.-Е.Славяновский, С.Я.Степанов, Р.С.Суликашвили, Х.Трогер, Д.П.Шеваллье, на защиту выносятся лишь те результаты, которые получены лично автором. В случаях, когда во избежание потери целостности изложения также приводятся результаты соавторов, в тексте сделаны специальные оговорки.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 41 печатной работе, из них 18 статей – в рецензируемых журналах из списка ВАК: [1–18] , 14 статей – в изданиях, не включённых в список ВАК и не являющихся трудами конференций: [19–32], 9 статей – в трудах международных конференций [33–41].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, восьми глав, одного приложения и содержит 304 страницы машинописного текста.

Первая глава посвящена изучению плоскопараллельных движений тел переменного распределения масс. В разд. 1.1 приводится вывод уравнений относительного движения изменяемого твёрдого тела в спутниковом приближении. Пусть ($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$) – тройка взаимно ортогональных единичных векторов, образующих орбитальную систему отсчёта: вектор $\boldsymbol{\gamma}$ направлен по радиусу орбиты от притягивающего центра, вектор $\boldsymbol{\beta}$ перпендикулярен плоскости орбиты, вектор $\boldsymbol{\alpha}$ дополняет их до правой тройки и ориентирован по направлению движения центра масс. Если ν – истинная аномалия центра масс, μ – произведение гравитационной постоянной на массу притягивающего центра, p и e – параметр и эксцентриситет эллиптической орбиты, то положение центра масс определяется соотношениями

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}, \quad r^2\frac{d\nu}{dt} = \sqrt{\mu p} \tag{1}$$

В силу равенств (1) истинная аномалия ν монотонно возрастает со временем

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(1 + e\cos\nu)^2$$

и может быть использована как независимая переменная. Если $\mathbf{I}(\nu) = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – центральный тензор инерции тела в связанных с телом осях $Cx_1x_2x_3$, то уравнения относительного движения запишутся в виде [1]

$$\frac{d}{d\nu}\left[(1 + e\cos\nu)^2\mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\beta})\right] = \tag{2}$$

$$+(1 + e\cos\nu)^2\mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\beta}) \times (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\beta}) + (1 + e\cos\nu)\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma},$$

$$\frac{d}{d\nu}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \frac{d}{d\nu}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \frac{d}{d\nu}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{\nu}$ – отношение угловой скорости тела к быстроте изменения истинной аномалии. Из уравнений непосредственно следует

Утверждение 1 Если изменение тензора инерции тела таково, что

$$(1 + e\cos\nu)^2\mathbf{I}(\nu) = \mathbf{I}_\star, \quad \mathbf{I}_\star = \mathrm{const}, \tag{4}$$

то имеют место 24 относительных равновесия, на которых одна из осей инерции спутника направлена на притягивающий центр, а другая перпендикулярна плоскости орбиты.

[1] В уравнениях, изучавшихся В.Шиленом [42], также присутствует переменный гиростатический момент роторов, см. также [43]

Соотношение (4) выражает ключевую идею, на которую опирается выбор закона перераспределения масс в теле.

В разд. 1.2 изучаются вращательно - колебательные движения тела переменного распределения масс вокруг оси Cx_2 остающейся перпендикулярной к плоскости орбиты. Тогда, если угол φ задаёт отклонение оси Cx_1 от локальной вертикали (рис. 1), то в силу (2) уравнение колебаний в плоскости орбиты имеет вид ([43], с.172)

$$\frac{d}{d\nu}\left[(1+e\cos\nu)^2 I_2\left(1+\frac{d\varphi}{d\nu}\right)\right] = -3(I_3-I_1)(1+e\cos\nu)\cos\varphi\sin\varphi. \tag{5}$$

В отличие от уравнения Белецкого, моменты инерции в уравнении (5) переменны и зависят от определяемого истинной аномалией положения центра масс тела на эллиптической орбите.

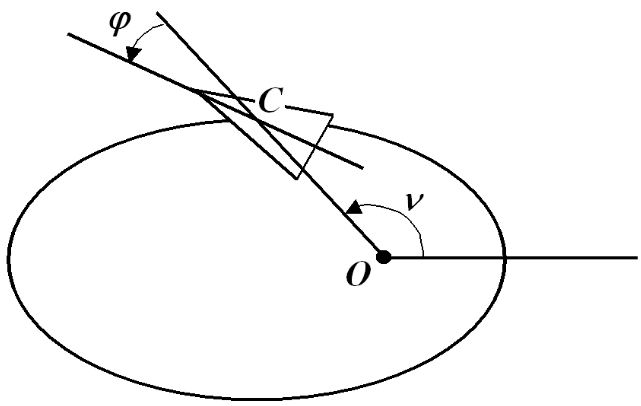

Рис. 1: Ориентация тела на орбите

Для описания перераспределения масс удобно использовать компоненты тензора Эйлера – Пуансо $\mathbf{K} = \mathrm{diag}(K_1, K_2, K_3)$:

$$K_1 = \int\limits_{\mathcal{G}} x_1^2 dm(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad I_1 = K_2 + K_3, \quad (1,\ 2,\ 3). \tag{6}$$

Так, если одновременно выполняются условие [43, 44]

$$(1+e\cos\nu)^2(K_1+K_3) = I^* = \mathrm{const}^* \tag{7}$$

и условие

$$3(K_1-K_3)(1+e\cos\nu) = I^{**} = \mathrm{const}^{**} > 0, \tag{8}$$

то движение описывается уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\varphi}{d\nu^2} = -\omega_0^2\cos\varphi\sin\varphi, \quad \omega_0^2 = \frac{I^{**}}{I^*}, \tag{9}$$

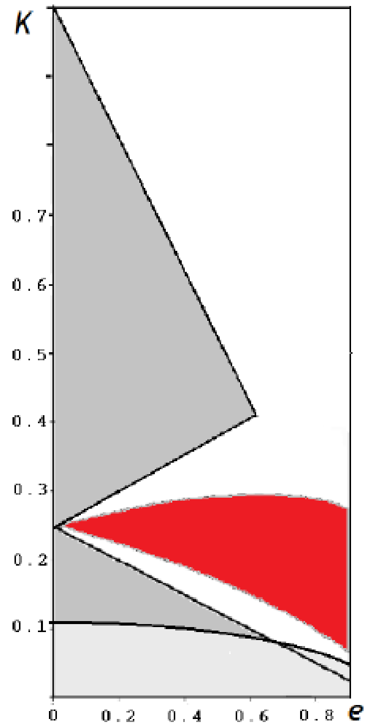

Рис. 2: Области устойчивости на плоскости (e, K). Неустойчивость (тёмная область), устойчивость по теореме Жуковского (тёмно-серая область), устойчивость по теореме Ляпунова (светло-серая область).

совпадающим с уравнением колебания тела на круговой орбите, причём $\omega_0 > 0$ – частота малых колебаний в окрестности устойчивых относительных равновесий $\varphi = 0, \pi$.

Для подобно-изменяемого тела уравнение сводится к

$$(1 + e\cos\nu)\,\varphi'' + K\sin\varphi\cos\varphi = 0, \quad K = \mathrm{const}\,. \tag{10}$$

Доказано, что его решения неустойчивы при $K < 0$. С помощью теорем Жуковского и Ляпунова даны оценки областей выполнения необходимых условий устойчивости в пространстве параметров (e, K), найденных численно (рис. 2). Доказано, что по крайней мере при малых $e > 0$ уравнение (10) неинтегрируемо, приведены примеры исследования сочетания регулярной и хаотической динамики.

В разд. 1.3 рассматривается случай, когда масса системы остаётся распределённой вдоль прямой. Указывается закон перераспределения масс, при котором существуют равновесия в задаче Х.Трогера о движении массивной кабины вдоль гантелеобразного тела на эллиптической орбите, на примере движения кабины между концами гантели по синусоидальному закону исследуется хаотическое поведение системы. В §§1.3.2, 1.3.3 ставится и решается задача о законе вибрации гантели, при котором существуют вращения с постоянной по ν частотой $\omega : \varphi = \omega\nu$. Удовлетворяя уравнению

$$(1 + e\cos\nu)\varphi'' + 3\left(\cos\varphi\sin\varphi - \frac{\varphi' + 1}{\omega + 1}\cos\omega\nu\sin\omega\nu\right) = 0, \qquad (11)$$

они периодичны при целых и рациональных значениях ω. Для $\omega = 0$ уточнены при $e \approx 1$ найденные ранее [44], а для $\omega \in \{1, 2, 3, 4\} \cup \{-2, -3, -4\} \cup \{3/2, 5/2, 7/2\} \cup \{-5/2, -7/2\}$ – найдены численно необходимые условия устойчивости таких вращений. С помощью сечений Пуанкаре разобраны примеры хаотического поведения.

В разд. 1.4 рассмотрена задача о плоском движении гантели переменной длины в центральном поле сил. В точной постановке доказано, что если длину гантели изменять пропорционально расстоянию от её центра масс до притягивающего центра, то существуют относительные равновесия, при которых гантель образует постоянный – нулевой или ненулевой – угол с направлением на притягивающий центр. При этом центр масс гантели будет совершать движение по эллиптической орбите.

В разд. 1.5 рассмотрена обобщённая плоская ограниченная эллиптическая задача трёх тел, в рамках которой предполагается, что два тела, «Земля» и «Луна», движутся вокруг общего центра масс по невозмущаемым эллиптическим орбитам, а третье тело малой массы присоединено ко второму невесомым, нерастяжимым тросом изменяемой длины ℓ (рис. 3). Для уравнений движения

$$\begin{gathered}\ell\varphi'' + 2\ell'(1 + \varphi') - \frac{2e\ell(1 + \varphi')\sin\nu}{1 + e\cos\nu} + \\ + \frac{p_M \sin\varphi}{(1 + e\cos\nu)^2}\left[1 - \frac{(1 + \mu)^3 p_M^3}{f^{3/2}}\right] = 0, \\ f = \ell^2(1 + e\cos\nu)^2 + (1 + \mu)^2 p_M^2 + 2\ell(1 + \mu)p_M\cos\varphi(1 + e\cos\nu),\end{gathered} \qquad (12)$$

где p_M – параметр «лунной» орбиты, а μ – отношение масс «Луны» и «Земли», доказано, что равновесные конфигурации, на которых трос образует постоянный, нулевой или ненулевой угол, с прямой, соединяющей «Землю» и «Луну», существуют, если длина троса пропорциональна радиусу орбиты «Луны». Изучены необходимые условия устойчивости. Показано, что для реальных массовых и орбитальных параметров Земли и Луны равновесие, на котором трос обращён в сторону Земли, устойчиво для всех физически осмысленных значений длин троса, не превосходящих радиуса лунной орбиты, а для равновесия, на котором трос обращён от Земли, неустойчивость может наблюдаться лишь для длин троса, существенно превосходящих радиус лунной орбиты. Численно исследованы примеры (рис. 4) регулярного и хаотического поведения изучаемой системы.

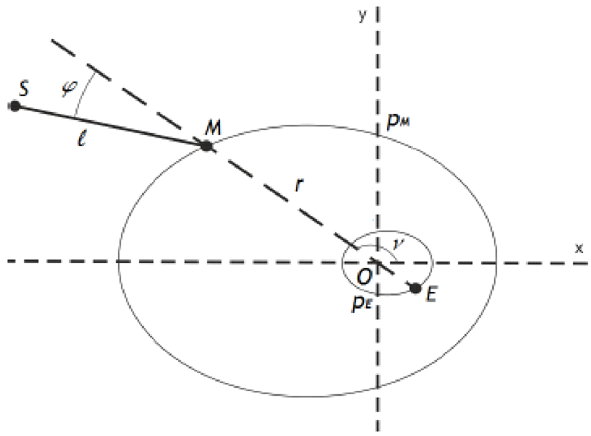

Рис. 3: Лунный маятник. Основные обозначения

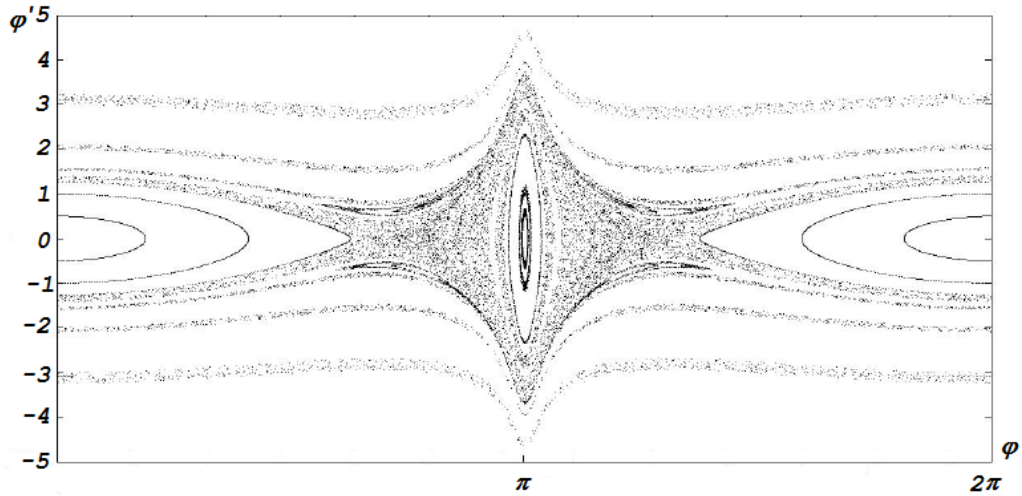

Рис. 4: Пример хаотического поведения лунного маятника.

Вторая глава посвящена развитию методов исследования необходимых и достаточных условий устойчивости равновесий в механике систем твёрдых тел. Метод Рауса, используемый для исследования существования и достаточных условий устойчивости в системах с избыточными координатами и естественно возникающими геометрическими соотношениями между ними, предполагает либо обычно сопровождающееся потерей симметрии исключение одних координат и их подстановку в квадратичную форму второй вариации, либо применение достаточно трудоёмкой процедуры вычисления миноров и определителя расширенной матрицы второй вариации.

В разд. 2.1 выписываются уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad (13)$$

$$L = L(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \times \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} \qquad (14)$$

где L – функция Лагранжа.

Единичные, ортогональные между собой векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ образуют правую тройку $OX_\alpha X_\beta X_\gamma$, относительно которой рассматривается движение. Они заданы своими проекциями на оси жёстко связанной с телом системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Две тройки геометрических интегралов

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) - 1 = 0, \quad \mathcal{J}_{\boldsymbol{\alpha\beta}} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \qquad (15)$$

выражающие зависимость между переменными, определяют конфигурационное многообразие $\mathbf{M}$ твёрдого тела.

В разд. 2.1 указывается, что касательное пространство к некоторой точке конфигурационного многообразия – линейное многообразие, задаваемое соотношениями

$$\delta\mathcal{J}_{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{\alpha}, \delta\boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad \delta\mathcal{J}_{\boldsymbol{\alpha\beta}} = (\boldsymbol{\alpha}, \delta\boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta}, \delta\boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}). \qquad (16)$$

Доказано

Утверждение 2 *(Основное утверждение) Независимые координаты $\delta\boldsymbol{\theta} = (\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3)^T$ в касательном пространстве $\mathbf{T_x M}^3$ можно определить с помощью уравнений Пуассона, представимых в виде*

$$\delta\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \times \delta\boldsymbol{\theta}, \quad \delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\theta}, \quad \delta\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma} \times \delta\boldsymbol{\theta}, \qquad (17)$$

В разд. 2.3 показано, что применение в теореме Рауса вариаций (17) даёт уравнение равновесий в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \times \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad U = -L(0, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}). \qquad (18)$$

Это уравнение исследуют вместе с интегралами (15). Достаточные условия устойчивости определяются из знакоопределённости квадратичной формы

$$
\begin{aligned}
2\delta^2_{\boldsymbol{\theta}} W &= (\boldsymbol{\Theta}\delta\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}) = \qquad (19)\\
&= \sum\left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} + \lambda_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{E}\right)(\boldsymbol{\alpha}\times\delta\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\alpha}\times\delta\boldsymbol{\theta}\right) + \\
&\quad +2\sum\left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\beta}} + \lambda_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}\mathbf{E}\right)(\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\alpha}\times\delta\boldsymbol{\theta}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\lambda_{\boldsymbol{\alpha}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha}\right), \quad \lambda_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\alpha}\right), \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}). \qquad (20)
$$

В разделе 2.4 рассмотрены иллюстративные примеры из механики: движение твёрдого тела вокруг неподвижного центра масс под действием ньютоновского притяжения со стороны удалённых объектов и классическая задача о равновесиях спутника на круговой орбите. Найдены равновесия и исследованы достаточные условия их устойчивости.

В разделе 2.5 показано, что введённые вариации позволяют записать уравнения в вариациях в окрестности равновесия как

$$
\frac{d}{dt}\delta_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \delta\dot{\boldsymbol{\theta}} + \delta_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{Q}, \qquad (21)
$$

$$
\delta_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}^2}\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}\times\delta\boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}\times\delta\boldsymbol{\theta}),
$$

$$
\delta_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\omega}}\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}\times\delta\boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}\times\delta\boldsymbol{\theta}).
$$

С их помощью исследованы необходимые условия устойчивости равновесий в рассмотренных примерах.

Третья глава посвящена методу построения управлений движением спутника с роторами, сохраняющему лагранжеву структуру уравнений движения и основные симметрии задачи. Для наглядности считается, что роторов три, и их оси направлены по главным центральным осям инерции гиростата. Тогда, если $\mathbf{I}$ – тензор инерции, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ – вектор углов поворотов роторов,$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости, то уравнения движения имеют вид

$$
\frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}}) = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q}', \quad \mathbf{B} = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3), \qquad (22)
$$

$$
\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{Q}_R, \quad \mathbf{Q}_R = (Q_{1R}, Q_{2R}, Q_{3R}). \qquad (23)
$$

Указываются действующие на роторы моменты, составляющие вектор $\mathbf{Q}_R$, такие, что

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{\omega}},$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ – заданная наперёд постоянная симметричная матрица, т.е. существует частный интеграл уравнений (22, 23) вида

$$\mathcal{J} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{P}\boldsymbol{\omega} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\frac{d\mathcal{J}}{dt}\right]_{\mathcal{J}=0} = 0. \tag{24}$$

Рассмотрен пример, когда $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости спутника-гиростата. В этом случае изменённый потенциал имеет вид

$$U_a = \frac{1}{2}\left(-(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) + 3(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})\right), \tag{25}$$

что позволяет активно влиять на множество относительных равновесий. В простейшем случае, когда тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{I}$ соосны, множество относительных равновесий имеет ту же структуру, что и в классической задаче о равновесиях спутника. Так для относительного равновесия

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0)^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)^T. \tag{26}$$

достаточные условия устойчивости принимают вид

$$A_2 - A_3 - 3I_3 > 0, \quad I_1 - I_3 > 0, \quad 3I_2 + A_2 - A_1 > 0. \tag{27}$$

Таким образом, за счёт этих воздействий удаётся повлиять лишь на два из трёх условий устойчивости.

При таком же управлении по относительной угловой скорости изменённый потенциал остаётся прежним, т.е. остаются неизменными достаточные условия устойчивости. При этом определяемые из уравнений

$$\begin{aligned}
A_1\delta\ddot{\theta}_1 &= \dot{\psi}\left(I_2 - I_3 - I_1\right)\delta\dot{\theta}_3 - 4\dot{\psi}^2(I_2 - I_3)\delta\theta_1, \\
A_2\delta\ddot{\theta}_2 &= -3\dot{\psi}^2(I_1 - I_3)\delta\theta_2, \\
A_3\delta\ddot{\theta}_3 &= -\dot{\psi}\left(I_2 - I_3 - I_1\right)\delta\dot{\theta}_1 - \dot{\psi}^2(I_2 - I_1)\delta\theta_3.
\end{aligned}$$

необходимые условия устойчивости при выполнении условий $I_2 < I_3 < I_1$ записываются как

$$(I_2 - I_1)A_1 + 4(I_2 - I_3)A_3 + (I_2 - I_1 - I_3)^2 > 0 \tag{28}$$

$$\left[(I_2 - I_1)A_1 + 4(I_2 - I_3)A_3 + (I_2 - I_1 - I_3)^2\right]^2 - 16A_1A_3(I_2 - I_1)(I_2 - I_3) > 0.$$

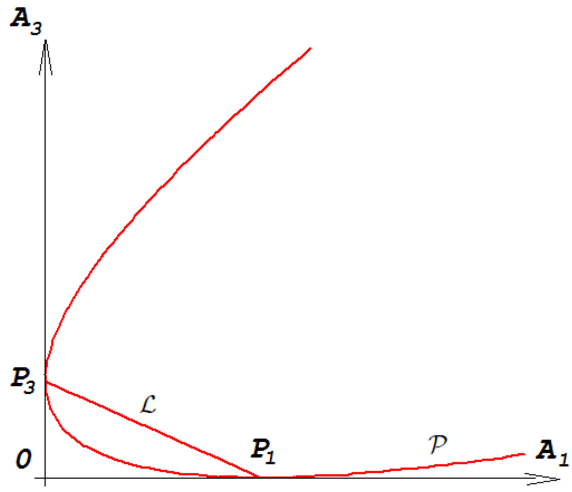

Рис. 5: Область устойчивости в задаче об управляемом движении спутника - гиростата.

Эти условия оказываются выполненными для тех точек плоскости (A_1, A_3), которые располагаются внутри «треугольника» OP_1P_3 :

$$P_1: \quad \left(\frac{(I_2-I_1-I_3)^2}{I_2-I_1}, 0\right), \quad P_3: \quad \left(0, -\frac{1}{4}\frac{(I_2-I_1-I_3)^2}{I_2-I_3}\right), \tag{29}$$

две стороны которого – отрезки координатных осей OP_1 и OP_3, а третья сторона – расположенная под прямой $\mathcal{L}$ дуга параболы $\mathcal{P}$.

В ЧЕТВЁРТОЙ ГЛАВЕ изучаются вопросы существования частных линейных интегралов в задачах механики твёрдого тела, аналогичных интегралу Гесса, в задаче о движении тяжёлого гиростата на стержне и в задаче о движении тяжёлого гиростата по гладкой горизонтальной плоскости.

1^o. Пусть $Ox_1x_2x_3$ – жёстко связанная с корпусом гиростата подвижная система координат с началом в центре масс и с осями, направленными вдоль главных центральных осей инерции. Пусть $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – центральный тензор инерции тела, конец стержня прикреплён к корпусу гиростата с помощью сферического шарнира в точке $P : \overrightarrow{OP} = \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)^T$ – вектор кинетического момента ротора.

Утверждение 3 Пусть $I_3 < I_2 < I_1$. Тогда при выполнении условий

$$\begin{gathered} -\sqrt{I_2^{-1}-I_1^{-1}}k_3 \pm \sqrt{I_3^{-1}-I_2^{-1}}k_1 \mp \delta\sqrt{\left(I_2^{-1}-I_1^{-1}\right)\left(I_3^{-1}-I_2^{-1}\right)}I_2 = 0, k_2 = 0, \\ \sqrt{I_2^{-1}-I_1^{-1}}p_3 \mp \sqrt{I_3^{-1}-I_2^{-1}}p_1 = 0, \quad p_2 = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

уравнения движения тяжёлого гиростата, подвешенного на стержне, допускают частный интеграл

$$\mathcal{F} = \omega_1 I_1 \sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}} \pm \omega_3 I_3 \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}} + \delta = 0. \qquad (31)$$

2^o. Пусть тяжёлый гиростат, совершающий движение по гладкой горизонтальной плоскости, имеет массовые параметры и гиростатический момент, такие же, что и в 1^o. Если поверхность его корпуса в тех же связанных с корпусом подвижных осях задаётся как $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$, то справедливо

Утверждение 4 *Пусть $I_3 < I_2 < I_1$. Тогда при выполнении условий*

$$\begin{gathered} -\sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}} k_3 \pm \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}} k_1 \mp \delta \sqrt{\left(I_2^{-1} - I_1^{-1}\right)\left(I_3^{-1} - I_2^{-1}\right)} I_2 = 0, k_2 = 0, \\ \sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}} \left(x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) \pm \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}} \left(x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) = 0. \end{gathered} \qquad (32)$$

уравнения движения тяжёлого гиростата по гладкой плоскости допускают частный интеграл

$$\mathcal{F} = \omega_1 I_1 \sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}} \pm \omega_3 I_3 \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}} + \delta = 0. \qquad (33)$$

Рассмотрены примеры, когда корпус гиростата – шар со смещённым по отношению к геометрическому центру центром масс и когда поверхность корпуса – трёхосный эллипсоид.

3^o. Аналогичные условия существования линейного частного интеграла найдены в задаче о движении по гладкой плоскости тяжёлого твёрдого тела, опирающегося на неё двумя остриями. Для случая одного острия такой случай, как оказалось, был известен Ляпунову и Колосову. В случае одного острия задача оказалась динамически эквивалентной задаче о катании тяжёлого шара по гладкой горизонтальной плоскости, что позволило на основании полученных ранее результатов сделать выводы о существовании и несуществовании дополнительных первых интегралов уравнений движения.

4^o. Рассмотрена задача о движении тела вокруг неподвижной точки в набегающем однородном потоке невзаимодействующих между собой частиц в предположении об абсолютно неупругом соударении. Если поверхность тела выпукла, а скорость набегающего потока существенно превосходит произведение характерных значений угловой скорости тела и расстояния от тела до неподвижной точки, то уравнения движения тела можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}, \;\; \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \;\; T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\right), \;\; \mathbf{Q} = f\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) S(\boldsymbol{\gamma}), \qquad (34)$$

где $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции тела относительно неподвижной точки O, $Ox_1x_2x_3$ – система координат, оси которой направлены по его главным осям, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – единичный вектор, направленный вдоль набегающего потока, f – постоянная, величина которой пропорциональна плотности газа и квадрату скорости набегающего потока, $S(\boldsymbol{\gamma})$ – площадь проекции $\mathcal{T}(\boldsymbol{\gamma})$ тела на плоскости $\pi(\boldsymbol{\gamma})$, перпендикулярной набегающему потоку, т.е. проекции тела на плоскость π вдоль направления $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = (c_1(\boldsymbol{\gamma}), c_2(\boldsymbol{\gamma}), c_3(\boldsymbol{\gamma}))^T$ – вектор, соединяющий неподвижную точку с любой точкой прямой $\ell(\boldsymbol{\gamma})$, параллельной $\boldsymbol{\gamma}$ и содержащей центроид проекции $\mathcal{T}(\boldsymbol{\gamma})$ – точку, совпадающую с центром масс однородной пластинки, занимающей область $\mathcal{T}(\boldsymbol{\gamma})$.

Для выписанных уравнений указывается инвариантная мера, выводятся условия того, что они являются уравнениями Эйлера - Пуанкаре - Лагранжа, приводятся примеры, когда такие условия выполнены. Указываются случаи существования дополнительного частного интеграла, аналогичного интегралу Гесса.

Пятая глава посвящена исследованию движений твёрдых тел, обладающих симметриями в распределении масс. В разд. 5.1 рассматривается задача о движении в центральном поле сил твёрдого тела с неподвижной точкой. Указываются условия распределения масс, гарантирующие существование перманентных вращений такого тела вокруг линии, соединяющей неподвижную точку и притягивающий центр. Приводятся удовлетворяющие указанному условию примеры распределения масс в телах, обладающих особыми тетраэдральными и октаэдральными формами.

В разд. 5.2 рассмотрена задача о движении спутника-гиростата, распределение масс которого допускает группу симметрии тетраэдра. Выписаны уравнения движения в избыточных координатах, показано, как для них может быть произведено понижение порядка по Раусу, описан общий подход к отысканию стационарных движений. Для правильного тетраэдра с равными массами в вершинах помимо обычного разложения потенциала по малому параметру, равному отношению характерного размера тела и расстояния до притягивающего центра, выписано иное разложение, не имеющее особенностей и в идейном плане восходящее к исследованиям Борна и Инфельда.

В случае, когда тетраэдр-гиростат совершает движение по круговой кеплеровской орбите, исследованы существование и достаточные условия устойчивости относительных равновесий, для которых вектор гиростатического момента перпендикулярен плоскости орбиты.

В разд. 5.3 для произвольных гиростатов с шаровым тензором инерции указано решение полуобратной задачи об относительных равновесиях на круговой орбите, когда по заданному в теле положению локальной вертикали определяется положение в теле вектора нормали к плоскости орбиты и реализующий такое равновесие гиростатический момент. С точностью до аддитивной постоянной изменённый потенциал имеет вид

$$U_c = -\Omega_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\beta}), \quad U_N = U_N(\boldsymbol{\gamma}; R, G, M, m), \tag{35}$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)^T$ – вектор гиростатического момента, Ω_0 – орбитальная угловая скорость, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ – единичные векторы орбитальной системы отсчёта:

$$\mathcal{J}_{\beta\beta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) - 1 = 0, \quad \mathcal{J}_{\beta\gamma} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad \mathcal{J}_{\gamma\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) - 1 = 0. \tag{36}$$

Относительным равновесиям отвечают критические точки функции Рауса

$$W = U + \frac{\lambda}{2}\mathcal{J}_{\beta\beta} + \mu\mathcal{J}_{\beta\gamma} + \frac{\nu}{2}\mathcal{J}_{\gamma\gamma}, \tag{37}$$

определяемые из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\Omega_0\mathbf{k} + \lambda\boldsymbol{\beta} + \mu\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial U_N}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mu\boldsymbol{\beta} + \nu\boldsymbol{\gamma} = 0, \tag{38}$$

существенно нелинейными по $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда

$$\lambda = \Omega_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\beta}), \quad \mu = \Omega_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) = -\left(\frac{\partial U_N}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\beta}\right), \quad \nu = -\left(\frac{\partial U_N}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\gamma}\right), \tag{39}$$

Из (38) и (39) можно найти, что

$$\boldsymbol{\beta} = \sigma\frac{\boldsymbol{\gamma} \times \left(\dfrac{\partial U_N}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}\right)}{\left|\dfrac{\partial U_N}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}\right|}, \quad \sigma = \pm 1, \tag{40}$$

$$(\mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad (\mathbf{k}, \boldsymbol{\beta}) = \lambda\Omega_0^{-1}, \quad (\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) = \mu\Omega_0^{-1}. \tag{41}$$

Рассмотрен пример тетраэдра - гиростата с равными массами в вершинах и равными массивными рёбрами. Для приближения ньютоновского потенциала, задаваемого кубическим симметрическим многочленом от направляющих косинусов единичного вектора локальной вертикали, в §5.3.4 полностью решена полуобратная задача о существовании относительных равновесий, в §5.3.5 исследованы достаточные условия их устойчивости.

Шестая глава посвящена исследованию необходимых и достаточных условий устойчивости равновесий систем, стеснённых односторонними связями, реализованными большими потенциальными силами. Такие равновесия и достаточные и необходимые условия их устойчивости найдены в виде рядов по возникающему малому параметру. Показано, что в пределе получаются равновесия системы, стеснённой связью, а также необходимые и достаточные условия устойчивости таких равновесий.

В качестве примера рассмотрена задача о маятнике, подвешенном с помощью нерастяжимой невесомой нити на спутнике, совершающем движение по круговой кеплеровской орбите. Помимо исследования достаточных условий устойчивости относительных равновесий, на них определены реакции связи. Это позволило оценить возможность применения нити для реализации равновесий.

На примере обсуждена вырожденная ситуация, когда применённый предельный переход не даёт возможности сделать вывод о достаточных условиях устойчивости.

В рамках механики систем с голономными связями, реализованными большими потенциальными силами, предложен подход к изучению кинематической подвижности системы, опирающийся на понятие области возможного движения.

В седьмой главе исследованы условия несуществования дополнительных первых интегралов в системах с переменным распределением масс, таких как тяжёлый двухзвенный физический маятник, гироскоп в кардановом подвесе, а также двухстепенной гироскоп.

Восьмая глава посвящена исследованию регулярной и хаотической динамики твёрдых тел, один из размеров которых, «длина», существенно больше двух оставшихся размеров, «ширины» и «толщины». Динамика таких тел исследована в рамках двух постановок задачи. В первом случае рассматривается задача о движении такого тяжёлого тела вокруг неподвижной точки. Во втором случае изучается задача о движении тонкого тела в идеальной несжимаемой, покоящейся на бесконечности жидкости.

Показано, что подход к интегрированию уравнений движения, предложенный ранее В.В.Козловым и Д.В.Трещёвым, поддаётся распространению и на рассматриваемые постановки задач. Доказано, что уравнения движения частично разделяются. В случае твёрдого тела оказывается интегрируемой динамика по углам прецессии и нутации. При этом ось тела, отвечающая его «длине», движется как сферический маятник. В то же время, движение тела вокруг этой оси, по углу собственного вращения, оказывается хаотическим, а уравнение вращений вокруг этой оси неинтегрируемо.

Аналогичные выводы оказываются справедливыми и для задачи о движении тела в жидкости.

Приложение А посвящено построению основ классической механики систем материальных точек и твёрдых тел, погруженных в трёхмерную сферу. Исследовано правило сложения сил, указаны аналоги правила рычага Архимеда, исследованы условия существования и устойчивости равновесий тел в сферическом аналоге центрального ньютоновского поля сил. Исследованы условия существования стационарных движений гантелеобразного сферического тела в сферическом аналоге центрального ньютоновского поля сил. В предположении о малости тела по сравнению с радиусом сферы выведен сферический аналого уравнения Белецкого, исследованы его простейшие свойства.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1) Предложен метод реализации равновесных конфигураций и эллиптичности орбиты центра масс в задаче о движении гантелеобразного тела периодически изменяемой длины в центральном ньютоновском поле тяготения (в точной постановке).

2) Известный подход В.А.Сарычева и В.Шилена, позволяющий реализовать в рамках спутникового приближения равновесные конфигурации тел с переменным распределением масс, распространён на случай равномерных (по истинной аномалии) вращений тел. На основании теорем Жуковского и Ляпунова в случае плоских возмущений численно выявлены и оценены аналитически области устойчивости равновесных конфигураций в пространстве параметров. Аналитически исследована неинтегрируемость уравнений плоских колебаний вибрирующих тел на эллиптической орбите, для ряда значений параметров численно выявлены области регулярной и хаотической динамики.

3) Для обобщённой ограниченной плоской эллиптической задачи трёх тел, в которой малое тело предполагается присоединённым к одному из основных тел с помощью нерастяжимого невесомого троса переменной длины, указан закон изменения его длины, при котором существуют «вертикальные» и «наклонные» относительные равновесия во вращающейся вместе с основными телами системе отсчёта. В рамках плоской задачи исследованы необходимые условия устойчивости таких равновесий. На основании метода сечений Пуанкаре при некоторых значениях параметров сделаны выводы об особенностях регулярной и хаотической динамики третьего тела.

4) В рамках теории Рауса и ее обобщений развит метод анализа структуры линейных многообразий, возникающих при исследовании необходимых и достаточных условий устойчивости равновесия системы твёрдых тел.

5) На случай движения тела с роторами по круговой кеплеровской орбите распространён метод построения управлений, сохраняющий лагранжеву структуру уравнений движения и основные симметрии. Оценены возможности использования метода для реализации и стабилизации относительных равновесий.

6) Указаны распределения масс, при которых имеют место новые случаи существования дополнительного линейного частного интеграла, аналогичного интегралу Гесса, в задачах:

   - о движении тяжёлого гиростата на струне,
   - о движении тяжёлого гиростата по гладкой горизонтальной плоскости,
   - о движении тела в потоке частиц,
   - о движении тяжёлого тела, опирающегося остриями на гладкую плоскость.

   В случае одного острия установлена динамическая эквивалентность изучавшейся задачи и задачи о катании тяжёлого твёрдого несимметричного шара по гладкой плоскости, позволившая сделать выводы об особенностях регулярной и хаотической динамики изучавшейся системы.

7) Развит подход к решению полуобратной задачи об относительных равновесиях гиростата с шаровым тензором инерции на круговой орбите. Результат применён к задаче об относительном движении гиростата с распределением масс, допускающим группу симметрии тетраэдра.

8) Дано обоснование подхода к исследованию необходимых и достаточных условий устойчивости механических систем, стеснённых односторонними голономными связями, реализуемыми большими потенциальными силами.

9) Доказана неинтегрируемость уравнений движения в задачах о движении двухзвенного физического маятника и о движении гироскопа в кардановом подвесе.

10) Развито предложенное В.В.Козловым и Д.В.Трещёвым представление о т.н. «ограниченной постановке» в задачах динамики твёрдого тела, для которых «длина» существенно превосходит «ширину» и «толщину». Для таких тел в задачах о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной

точкой и о движении твёрдого тела в идеальной жидкости установлено сочетание легко наблюдаемого регулярного движения «оси тела» и трудно наблюдаемого, хаотического движения тела вокруг этой «оси».

11) Изучены особенности постановки задач классической механики точки и твёрдого тела, вложенных в трёхмерное сферическое пространство. Исследованы возможности использования понятий центра масс и центра тяжести, изучены условия равновесия тел в сферическом аналоге центрального поля ньютоновского притяжения, исходя из «ограниченной постановки» в задачах механики твёрдого тела выписан аналог уравнения Белецкого для «плоских» колебаний сферического спутника на эллиптической орбите. Найдены нетривиальные решения в задаче о движении гантелеобразного тела в сферическом аналоге центрального поля ньютоновского тяготения.

Список литературы

1. Буров А.А. О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжёлого двузвенного маятника // ПММ. 1986. Т.50. Вып.1.

2. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения твёрдого тела на гладкой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. No.5.

3. Буров А.А. О частных интегралах в задаче о движении тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. No.2.

4. Буров А.А., Карапетян А.В. О движении твёрдого тела в потоке частиц// ПММ. 1993. Т.57. Вып.2. С. 77-81.

5. Буров А.А., Трогер Х. Об относительных равновесиях орбитального маятника // ПММ. 2000. Т.64. Вып.5.

6. Буров А.А., Шеваллье Д.П. О движении твёрдого тела в жидкости под действием центральных сил ньютоновского притяжения // ПММ. 2001. Т.65. Вып.4. С.602 – 618.

7. Буров А.А. О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // ПММ. 2003. Т.67. Вып.2. С.222-230.

8. Буров А.А. О необходимых условиях устойчивости установившихся движений со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // ПММ. 2004. Т.68. Вып.5. С. 870-877.

9. Буров А.А. Об «ограниченной» постановке задачи о движении тяжёлого твёрдого тела // ПММ. 2004. Т.68. Вып.6. С. 958-963.

10. Буров А.А. О движении тела с плоскостью симметрии по трёхмерной сфере под действием сферического аналога ньютоновского притяжения // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 23-34.

11. Буров А.А. О пуассоновых вариациях в задаче об устойчивости равновесий в механике твёрдого тела // ПММ. 2010. Т.74. Вып. 1. С.98-107

12. Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили Р.С. Об орбитальном движении тетраэдра-гиростата // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 594-609.

13. Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили Р.С. Об установившихся движениях гиростатов с равными моментами инерции в центральном поле сил // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 738-744.

14. Буров А.А. О движении твёрдого тела по сферическим поверхностям // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т.42. С. 62-70.

15. Буров А.А. О колебаниях вибрирующей гантели на эллиптической орбите // ДАН. 2011. Т.437. №2. С.186-189.

16. Буров А., Дюган А. О плоских колебаниях вибрирующего гантелеобразного тела в центральном поле сил // Космические исследования. 2011. Том 49. № 4. 363-369.

17. Буров А.А., Косенко И.И. О плоских колебаниях тела с переменным распределением масс на эллиптической орбите // ДАН. 2011. Т.440. №6, с. 760-764.

18. Буров А.А. О консервативных методах управления вращением гиростата // ПММ. 2013. Т.77. Вып.2. С. 3-13.

19. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения твёрдого тела по гладкой горизонтальной плоскости // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1985. С.118-121.

20. Буров А.А. О частном интеграле в задаче о движении тяжёлого твёрдого тела, подвешенного на стержне // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1986.

21. Буров А.А. О неинтегрируемости уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1986.

22. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения в задаче о движении твёрдого тела с ротором на горизонтальной плоскости и об одной идее П.Аппеля // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1988.

23. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения твёрдого тела в газе // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1991.

24. Буров А.А. О движении твёрдых тел с симметриями // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 1993.

25. Burov A.A., Sulikashvili R.S. On motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry // Prépublication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1993. No.17.

26. Burov A.A. On duality, complementarity and «restrictness» in the rigid body dynamics // Prépublication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1994. No.3.

27. Burov A.A., Motte I., Stepanov S.Ya. On motion of rigid bodies on a spherical surface // Regular and Chaotic Dynamics. 1999. Vol.4. No.3. P.61 – 66.

28. Буров А.А. Об ограниченных задачах в механике твёрдого тела // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 2002. С.43 – 53.

29. Буров А.А., Мотт И., Славяновский Я.Е.,Степанов С.Я. О существовании, устойчивости и бифуркациях стационарных движений гантелеобразного тела по поверхности сферы // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 2006. С.94 – 104.

30. Буров А.А. Об ограниченной постановке в задаче о движении твёрдого тела в идеальной жидкости // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 2007. С.3-18.

31. Буров А.А., Косенко И.И. О периодических движениях орбитального лифта// Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 2009. С.72-85.

32. Буров А.А. О движении тяжёлого твёрдого тела с остриями, опирающегося на гладкую поверхность // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости движения. Сборник научных статей, посвящённый

памяти академика Валентина Витальевича Румянцева. - М.: Издательство физико-математической литературы. 2009. С.42-48.

33. Burov A.A. On the Routh method for mechanical systems subjected to unilateral constraints // Progress in Nonlinear Science, Vol. 1 (Nizhny Novgorod, 2001), 2002. 196-201. N.- N.: Inst. Appl. Phys. of RAS.

34. Burov A.A., Motte I., Sławianowski J.J., Stepanov S.Ya. On stability and bifurcations of steady motions of a dumb-bell in a sphere // Труды IV Поляховских чтений. СПб: Санкт-Петербургский университет. 2006. С.44-51.

35. Burov A.A.,Guerman A.D., Sulikashvili R.S. Relative Equilibria of a tetrahedral structure with rigid and tethered elements // Astrodynamics 2007. Advances in the Astronautical Sciences. Vol.129. P.1665-1674. AAS 07-357

36. Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S. Steady motions of a tetrahedral satellite with tethered elements // Proceedings of Sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference June 30 - July 4, 2008, Saint Petersburg, RUSSIA. http://lib.physcon.ru/download/p1753.pdf

37. Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S. Dynamics of tetrahedral constellations of satellites-gyrostats // Proceedings of 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference J. Ambrosio et.al. (eds.) Lisbon, Portugal, 7–11 September 2009. pap 0254 MS-14.pdf

38. Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S. Steady motions of a tetrahedral tethered satellite formation // Paper 2-5, 6th International Workshop on Satellite Constellation and Formation Flying (IWSCFF 2010) 14F VIP Room Howard International House, Taipei, Taiwan November 1 3 (Monday Wednesday), 2010

39. Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R. S. Dynamics of a tetrahedral satellite-gyrostat // AIP Conference Proceeding: Numerical Analysis and Applied Mathematics. American Institute of Physics, ISSN 0094-243X, ISBN 978-0-7354-0834-0, v. 1281, 2010, pp.465-468.

40. Burov A., Kosenko I. Dumb-Bell of Variable Length in an Elliptic Orbit: Relative Equilibria, Periodicity, and Chaos // In: Proc. 4 th Chaotic Modeling and Simulation International Conference 31 May – 3 June 2011, Agios Nikolaos, Crete, Greece.

41. Burov A.A., Kosenko I.I., Guerman A.D. Dynamics of a moon-anchored tether with variable length // Advances in the Astronautical Sciences, 2012, Vol. 142, pp.3495-3507.

42. Schiehlen W. Über die Lagestabilisirung künstlicher Satelliten auf elliptischen Bahnen. Diss. Dokt.-Ing. technische Hochschule Stuttgart. 1966.

43. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. М.: ВИНИТИ, 1978. 224 с.

44. Полянская И.П. Колебания спутника с компенсирующими устройствами на эллиптической орбите // Космич. исслед. 1982. Т.20. Вып.5. С.674 – 681.