Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Хасанов Руслан Ваизович

МАКСИМИЗАЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМ ВКЛАДОМ И ХЕДЖИРОВАНИЕ ПЛАТЕЖНЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва–2013

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Гущин Александр Александрович.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Богачев Владимир Игоревич,
МГУ имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
профессор кафедры теории функций
и функционального анализа;

доктор физико-математических наук,
доцент Рохлин Дмитрий Борисович,
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук,
профессор кафедры высшей математики и исследования операций.

Ведущая организация:

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”.

Защита диссертации состоится 29 марта 2013 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 28 февраля 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Описание оптимального способа инвестирования и хеджирование платежных обязательств являются одними из основных проблем в стохастической финансовой математике. Данные вопросы, как правило, находятся в тесной взаимосвязи с понятием арбитража на финансовом рынке.

Под арбитражем обычно понимается безрисковая финансовая стратегия, позволяющая инвестору с положительной вероятностью получить прибыль от торговли на финансовом рынке. С точки зрения экономической теории арбитражные стратегии могут существовать на рынке лишь непродолжительное время, ведь ими поспешат воспользоваться инвесторы, что приведет к изменению цен финансовых инструментов, установлению на рынке состояния равновесия и исчезновению прибыльных стратегий. Однако с точки зрения современной теоретической финансовой математики рынки с наличием арбитража (в определенных смыслах) рассматриваются достаточно часто и представляют собой большую область для исследования уже решенных классических задач при более слабых допущениях, а также для создания контрпримеров.

С давних времен актуариями используется принцип эквивалентности, состоящий в том, что стоимость финансового инструмента (или денежного потока) вычисляется как математическое ожидание от дисконтированной суммы будущих выплат. Если рассматривать семимартингальную модель рынка с конечным числом активов, динамика цен которых задается процессом S, то впервые в классических работах Ф. Блэка, М. Шоулза[1] и Р. Мертона[2] доказывается, что указанное ожидание необходимо брать по мере Q, относительно которой процесс S является мартингалом. Данный факт связывает понятие справедливого (риск-нейтрального) оценивания финансовых инструментов и понятия арбитража. С конца 1970-х годов начинается более глубокое изучение зависимости существования мартингальных мер для процесса цен активов и выполнения условий отсутствия арбитража. Отметим здесь выдающуюся работу Ф. Делбаена и В. Шахермайера[3], в которой была доказана эквивалентность введенного ими понятия отсутствия арбитража в смысле NFLVR (no free lunch with vanishing risk) и существования эквивалентной σ-мартингальной меры для процесса S (FTAP,

---

[1] *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy, 1973, Vol. 81, p. 637—659.

[2] *Merton R. C.* The theory of rational option pricing // Bell J. Econ. Manag. Sci, 1973, Vol. 4, p. 141–183.

[3] *Delbaen F., Schachermayer W.* The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes // Mathematische Annalen, 1998, Vol. 312, №2, p. 215–260.

Fundamental theorem of asset pricing). В литературе на данный момент также часто используются понятия отсутствия арбитража в смысле NA (no arbitrage, см.[4,5,3]) и в смысле NUPBR (no unbounded profit with bounded risk, см.[6,7,8,9]). Широкое применение в стохастической финансовой математике, в том числе и в настоящей диссертации, нашел метод замены единиц измерения капитала. В связи с этим значимыми являются работы, в которых изучается, сохраняются ли условия отсутствия арбитража при замене единиц измерения капитала. Так, в работе[5] данные исследования проведены для условия NA, а в работе[6] — для условия NUPBR. В диссертации вводится новое понятие отсутствия сильного арбитража, доказывается аналог FTAP, состоящий в том, что введенное условие отсутствия арбитража эквивалентно существованию абсолютно непрерывной относительно исходной меры (конечно-аддитивной) разделяющей меры, и доказывается, что данное условие сохраняется при замене определенным способом единиц измерения капитала.

Если имеется платежное обязательство, приносящее инвестору случайную прибыль (убыток) B и заданное на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, а $\mathscr{A}(x)$ является множеством допустимых терминальных капиталов (полученных, например, от торговли имеющимися на рынке активами) инвестора с начальным капиталом x, то задачу определения верхней цены хеджирования можно описать, как нахождение такого минимального капитала x, для которого найдется терминальный капитал $\xi \in \mathscr{A}(x)$, что $\xi \geqslant B$.

При изучении поставленной задачи нахождения верхней цены хеджирования, а также задачи максимизации полезности в качестве моделей финансового рынка зачастую рассматривают динамические модели, в которых дисконтированные цены базовых рисковых активов описываются случайным процессом S (при самых общих предположениях являющегося семимартингалом), инвестиционные стратегии — предсказуемыми S-интегрируемыми процессами H, а доходы инвестора X_t к моменту времени t при задан-

[4] *Delbaen F., Schachermayer W.* A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing // Mathematische Annalen, 1994, Vol. 300, №1, p. 463–520.

[5] *Delbaen F., Schachermayer W.* The no-arbitrage property under a change of numéraire // Stochastics and Stochastic Reports, 1995, Vol. 53, p. 213–226.

[6] *Karatzas I., Kardaras C.* The numéraire portfolio in semimartingale financial models // Finance and Stochastics, 2007, Vol. 11, №11, p. 447–493.

[7] *Takaoka K.* On the condition of no unbounded profit with bounded risk. Graduate School of Commerce and Management, Hitotsubashi University, working paper, №131.

[8] *Kardaras K.* Market viability via arbitrage of the first kind // Finance and Stochastics, 2012, Vol. 16, №4, p. 651–667.

[9] *Kardaras C.* Finitely additive probabilities and the Fundamental Theorem of Asset Pricing // Contemporary Quantitative Finance (Platen Festschrift), Springer, 2010, p. 19–34.

ной стратегии H представляются векторными стохастическими интегралами $X_t = (H \cdot S)_t = \int_0^t H_u dS_u$. В качестве $\mathscr{A}(x)$ тогда берут множество $\mathscr{A}(x) := \{x + (H \cdot S)_T \colon H \in \mathscr{H}(x)\}$, где T — заключительный момент времени операций на финансовом рынке, а $\mathscr{H}(x)$ — множество допустимых стратегий, реализуемых при начальном капитале x.

Задача нахождения верхней цены хеджирования впервые была поставлена и исследована в работе[10], где авторы работали в модели с непрерывным временем, при этом цены основных активов являлись многомерным диффузионным процессом. Независимо в работе[11] изучалась аналогичная задача в модели с дискретным временем и конечным вероятностным пространством. Результаты работ в данной области исследования носят название “суперхеджирующие теоремы”, позволяющие явным образом вычислять верхние значения хеджирующих цен. Основной вклад в решение данной задачи в семимартингальной модели финансового рынка с конечным числом активов в случае, когда процесс S цен активов является локально ограниченным, множеством допустимых стратегий инвестора, капитал которых равномерно ограничен снизу константой, и ограниченного снизу платежного обязательства B был внесен в работе[5]. В ней искомое значение цены вычисляется как

$$\sup_{\mathsf{Q} \in \mathscr{M}^e(S)} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} B, \tag{1}$$

где $\mathscr{M}^e(S)$ — множество эквивалентных локально мартингальных мер процесса S. В работе[3] данное исследование было проведено для случая произвольного процесса цен, более широкого класса ψ-допустимых стратегий инвестора и ψ-ограниченного снизу платежного обязательства. Верхняя цена хеджирования здесь определяется по формуле

$$\sup_{\mathsf{Q} \in \mathscr{M}^e_\psi(S)} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} B, \tag{2}$$

при этом $\mathscr{M}^e_\psi(S)$ — множество σ-мартингальных мер процесса S с некоторым дополнительным предположением. Некоторые недостатки данных формул состоят в следующем: во-первых, они доказаны при достаточно сильном требовании о существовании локально (или σ-) мартингальной меры, эквивалентном в свою очередь условию NFLVR, и во-вторых, верхняя грань в формулах (1) и (2), как правило, не достигается. В случае, когда множество $\mathscr{A}(x) = x + \mathscr{A}$ для некоторого не зависящего от x выпуклого конуса $\mathscr{A}$, мы доказываем суперхеджирующую теорему, из которой следует,

[10] *El Karoui N., Quenez M.-C.* Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // SIAM Journal of Control and Optimization, 1995, Vol. 33, №1, p. 27—66.

[11] *Naik V., Uppal R.* Leverage constraints and the optimal hedging of stock and bond options // Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1994, Vol. 29, №2, p. 199–222.

что всегда найдется (конечно-аддитивная) мера, доставляющая максимум в формуле для верхней хеджирующей цены. Также мы априори не налагаем на модель никаких условий на арбитраж, но показываем, что рассматриваемая задача нетривиальна лишь в случае отсутствия сильного арбитража, вводимого и изучаемого нами в главе 1. В том случае, когда $\mathscr{A}(x)$ есть множество терминальных значений неотрицательных процессов капитала в семимартингальной модели финансового рынка с конечным числом активов, мы доказываем, что верхняя цена хеджирования выражается в виде верхней грани по множеству локально мартингальных или, эквивалентно, σ-мартингальных плотностей, существование которых равносильно условию NUPBR (независимому от условия сильного арбитража). В предположении, что $\mathscr{A}(x)$ — это множество терминальных значений процессов капитала, ограниченных снизу константой, мы изучаем взаимосвязь рассматриваемых нами цен хеджирования.

Концепция максимизации ожидаемой полезности восходит к 1950-м годам, в частности, работе Дж. Тобина[12], в которой были представлены теоретико-вероятностные обоснования портфельной теории Марковица, основанной на анализе ожидаемых средних значений и дисперсий случайных величин. Одной из предпосылок к сравнению именно средних ожидаемых доходов стали монографии Дж. фон Неймана, О. Моргенштерна[13] и Л. Сэвиджа[14], где поставленный набор аксиом привел к представлению полезности $\mathscr{U}(\xi)$ того или иного исхода ξ в виде математического ожидания $\mathsf{E}_\mathsf{P} U(\xi)$ по некоторой вероятностной мере P от некоторой функции полезности U : $\mathscr{U}(\xi) = \mathsf{E}_\mathsf{P} U(\xi)$.

Если предпочтения инвестора описываются возрастающей вогнутой функцией полезности $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и случайность на рынке реализована через вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, то стандартная задача максимизации ожидаемой полезности от терминального капитала может быть поставлена в виде

$$\sup_{\xi \in \mathscr{A}(x)} \mathsf{E}_\mathsf{P} U(\xi), \tag{3}$$

где, как и прежде, множество $\mathscr{A}(x)$ состоит из всех возможных терминальных капиталов инвестора, имеющего начальный капитал x.

Наряду с задачей максимизации полезности от терминального капитала в литературе рассматриваются и более общие постановки. В том случае, если инвестору неизвестно, какой вероятностной мерой Q описывается будущее

[12] *Tobin J.* Liquidity preference as behavior towards risk // Rev. Econ. Stud., 1958, Vol. 25, p. 68–85.

[13] *Von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, 1944.

[14] *Savage L.* The foundations of statistics. N. Y.: Wiley, 1954.

состояние рынка, но есть предположение, что данная мера содержится во множестве $\mathscr{Q}$, то рассматривается задача максимизации робастной полезности, имеющая вид

$$\sup_{\xi \in \mathscr{A}(x)} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi). \tag{4}$$

Элементы множества $\mathscr{Q}$ обычно называют субъективными мерами, и вид функционала полезности говорит о том, что инвестор не склонен к риску и выбирает наихудший для себя сценарий.

Еще одна проблема максимизации полезности возникает в задачах с "потреблением", когда инвестор извлекает прибыль (и потребляет) на протяжении всего временного горизонта, а не только в терминальный момент времени. Функции полезности $\bar{U}(t, \cdot)$ могут варьироваться со временем. План потребления C в момент времени $t \in [0, T]$ определяется случайной нормой потребления $c(t) \geqslant 0$, а общий объем потребления на промежутке $[t, t + dt]$ увеличивается на $c(t)dt$. Если за $X^{C,P}$ обозначить процесс капитала, отвечающий инвестиционной стратегии P и плану потребления C, то его изменение $dX^{C,P}$ будет удовлетворять соотношению $dX^{C,P} = -c(t)dt + dV^P(t)$, где $dV^P(t)$ есть изменение стоимости инвестиционного портфеля вследствие изменения цен торгуемых активов. Таким образом, инвестор заинтересован в получении наибольшей интегральной полезности

$$\sup_{(C,P) \in \mathscr{A}(x)} \mathsf{E}_{\mathsf{P}} \int_0^T \bar{U}(t, c(t))dt,$$

где максимизация происходит по множеству $\mathscr{A}(x)$ допустимых пар инвестиционных стратегий и планов потребления с начальным капиталом x. Одним из естественных ограничений на допустимые стратегии является неотрицательность капитала в заключительный момент времени: $X_T^{C,P} \geqslant 0$.

Глава 3 диссертации посвящена другому обобщению задачи (3) — максимизации функционала ожидаемой полезности со *случайным вкладом*, имеющего следующий вид:

$$\sup_{\xi \in \mathscr{A}(x)} \mathsf{E}_{\mathsf{P}} U(\xi + B). \tag{5}$$

Здесь B — это случайный вклад инвестора (к примеру, выплата, полученная по платежному обязательству). Впервые данная задача была поставлена и исследована в работе[15] в семимартингальной модели финансового рынка в случае множества допустимых стратегий, капитал которых ограничен снизу константой, и ограниченного случайного вклада. Отметим также рабо-

[15] *Cvitanic J., Schachermayer W., Wang H.* Utility maximization in incomplete markets with random endowment // Finance and Stochastics, 2001, Vol. 5, №2, p. 259–272, 2001.

ту[16]. В ней авторы видоизменили функционал полезности (5), включив в него дополнительный параметр. Это позволило им в более удобной форме поставить двойственную задачу. В диссертации также содержатся результаты, дополняющие исследования данной статьи. С задачей (5) тесно связана задача нахождения беспристрастной цены (indifference pricing) платежного обязательства (см., например,[17,18]).

Существующая литература по максимизации полезности в основном разделяется на два общих случая: 1) функция полезности U конечна на полупрямой $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, и равна $-\infty$ на $(-\infty, a)$; 2) функция полезности U конечна всюду на $\mathbb{R}$. Решения задачи максимизации полезности существенно различаются в каждом из этих случаев. В данной работе мы имеем дело с первым из них.

Выбор методов исследования задач нахождения верхней цены хеджирования и максимизации полезности зависит от структуры финансового рынка. В классических работах по суперхеджированию[10] и по максимизации полезности[19,20,21] данные задачи решались с помощью методов динамического программирования. Применяемые методы позволили конструктивно описать решение, однако явный вид решения был возможен только в конкретных частных случаях. Альтернативой методам динамического программирования служат двойственные методы выпуклого анализа, не требующие практически никаких предположений о структуре модели. Суть этих методов заключается в применении двойственных теорем, позволяющих получить дуальные соотношения на значение верхней цены хеджирования, а также свести исходную задачу максимизации полезности к двойственной задаче, решения которой взаимосвязаны с решениями исходной задачи. К недостаткам двойственных методов можно отнести то обстоятельство, что полученные с их помощью результаты носят характер утверждений типа существования и единственности и, вообще говоря, не позволяют найти конкретное решение (которое, впрочем, не всегда можно получить и с помощью методов динамического программирования).

[16] *Hugonnier J., Kramkov D.* Optimal investment with random endowments in incomplete markets // Ann. Appl. Probab., 2004, Vol. 14, №2, p. 845–864.

[17] *Hugonnier J., Kramkov D., Schachermayer W.* On Utility Based Pricing of Contingent Claims in Incomplete Markets // Mathematical Finance, 2005, Vol. 15, №2, p. 203–212.

[18] *Biagini S., Frittelli M., Grasselli M.* Indifference price with general semimartingales // Math. Finance, 2011, Vol. 21, №3, p. 423–446.

[19] *Merton R. C.* Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case // Rev. Econom. and Statist., 1969, Vol. 51, №3, p. 247–257.

[20] *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model // J. Econom. Theory, 1971, Vol. 3, №4, p. 373–413.

[21] *Samuelson P. A.* Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming // Rev. Econom. and Statist., 1969, Vol. 51, №3, p. 239–246.

В задачах стохастического управления впервые двойственные методы были применены Ж.-М. Бисмутом в работе[22], а в задаче максимизации полезности — С. Плиска в работе[23]. Во многом на развитие двойственных методов повлияла работа Д. Крамкова и В. Шахермайера[24], где приводятся ссылки на предшествующую литературу. В ней был внесен основной вклад в решение задачи максимизации стандартной полезности в случае функции полезности, конечной на полупрямой.

Результаты диссертации, как уже отмечалось, получены с помощью применения двойственных теорем выпуклого анализа, работающих в локально выпуклых топологических пространствах. Как правило, исходные задачи ставятся в пространстве случайных величин, которое (наделенное топологией сходимости по вероятности) не является локально выпуклым. В классических работах по максимизации полезности и хеджированию платежных обязательств, где применяются двойственные методы (см., например, [24, 15, 5]) исходные задачи сначала сводятся к пространству L^∞ существенно ограниченных случайных величин, что накладывает условие ограниченности на случайные обязательства (или случайный вклад). Другой возможный подход связан с переходом к пространству Орлича, построенному по функции полезности инвестора (см., например,[25, 26, 18]). Отметим также работу[27], в которой изучалась задача (4). В ней исследовались и использовались пространства Орлича, построенные по функции полезности инвестора и семейству субъективных мер. Данный подход позволил значительно продвинуться в вопросе расширения класса допустимых стратегий в исследуемой задаче. В настоящей работе мы используем пространство L^∞ с неограниченным сверху весовым коэффициентом, построенным по платежному обязательству (случайному вкладу) инвестора. Данное пространство (топологически) изоморфно L^∞, что позволяет, с одной стороны, применять двойственные теоремы, а с другой, отказаться от ограниченности платежного обязательства (случайного вклада). Также рассматриваемые нами постановки исследуемых задач носят абстрактный характер и имеют слабые, по сравнению с

[22] *Bismut J.-M.* Conjugate convex functions in optimal stochastic control // J. Math. Anal. Appl., 1973, Vol. 44, №2, p. 384–404.

[23] *Pliska S. R.* A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios // Math. Oper. Res., 1986, Vol. 11, №2, p. 370–382.

[24] *Kramkov D., Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets // Ann. Appl. Prob., 1999, Vol. 9, №3, p. 904–950.

[25] *Biagini S., Frittelli M.* Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes // Finance Stoch., 2005, Vol. 9, №4, p. 493–517.

[26] *Biagini S., Frittelli M.* A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach // Ann. Appl. Probab., 2008, Vol. 18, №3, p. 929–966.

[27] *Морозов И. С.* Расширение класса допустимых стратегий в задаче максимизации робастной полезности с конечной на $\mathbb{R}$ функцией полезности // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 5, с. 617–634.

предшествующими работами, ограничения на модель финансового рынка.

Цель исследования. Целями исследования являются: изучение введенного понятия сильного арбитража на финансовом рынке; нахождение верхних цен хеджирования платежных обязательств; постановка двойственной задачи к задаче максимизации полезности со случайным вкладом, сведение двойственной задачи к виду, не содержащему конечно-аддитивные меры.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) введено понятие сильного арбитража в статической модели финансового рынка и найдены необходимые и достаточные условия его отсутствия в терминах конечно-аддитивных мер и σ-мартингальных плотностей;

2) получены формулы для верхних цен хеджирования платежных обязательств в статической и семимартингальной моделях финансового рынка при достаточно слабых требованиях на арбитраж на финансовом рынке и нестандартных предположениях на класс допустимых стратегий; получена характеризация моделей финансового рынка, в которых верхние цены хеджирования вычисляются в виде верхней грани по множеству счетно-аддитивных мер;

3) поставлена двойственная задача к задаче максимизации полезности с неограниченным случайным вкладом и доказаны дуальные связи между ней и исходной; двойственная задача сведена к виду, не содержащему конечно-аддитивные меры.

Методы исследования. В работе применяются методы теории вероятностей и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны в теории вероятностей, функциональном анализе, математической статистике, теории случайных процессов и различных областях ее применения, в частности, в задачах финансовой математики.

Апробация работы. Результаты, относящиеся к диссертации, излагались на следующих семинарах:

1. Большой семинар кафедры теории вероятностей (МГУ, механико-математический факультет) под руководством действительного члена РАН, профессора А. Н. Ширяева, Москва, 2011;

2. Семинар "Стохастический анализ: теория и приложения", проводимый в Математическом институте им. В. А. Стеклова под руководством действительного члена РАН, профессора А. Н. Ширяева и доктора физико-математических наук А. А. Гущина, Москва, 2009–2011, неоднократно;

и конференциях:

3. Международная конференция "Стохастическая оптимизация и оптимальная остановка", Москва, 2012;

4. XVIII Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам, Казань, 2011;

5. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2011", Москва, 2011;

6. Международный симпозиум "Стохастика и ее видение", Москва, 2010.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырех работах [1–4] (полный список приведен в конце автореферата). Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 91 страницах и состоит из списка обозначений, введения, трех глав и списка литературы, включающего 70 наименований.

Содержание работы

В диссертации исследования в основном проводятся в статической модели финансового рынка. Дадим соответствующие определения. Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ задано множество случайных величин $\mathscr{A}$, элементы которого интерпретируются как возможные доходы инвестора от финансовых операций. Предполагается также заданной случайная величина ψ, интерпретируемая в главе 1 как стоимость новых единиц измерения капитала в основных единицах, в главе 2 — как прибыль (убыток), полученная от "базового" платежного обязательства, и определяемая равенством $\psi = 1+|B|$ в главе 3, где случайная величина B — платежное обязательство (случайный вклад) инвестора. Далее введем необходимые объекты, используемые в работе. Пусть

$$\mathscr{C}^\psi := (\mathscr{A} - L^0_+) \cap (\psi L^\infty).$$

По множеству $\mathscr{C}^\psi$ построим множество $\mathscr{R}$ разделяющих функционалов:

$$\mathscr{R} := \left\{ \mu \in ba_+ : \mu\left(\frac{1}{\psi}\right) = 1,\ \mu(\xi) \leqslant 0\ \forall \xi \in \frac{\mathscr{C}^\psi}{\psi} \right\}.$$

Глава 1 посвящена изучению понятия сильного арбитража в статической модели финансового рынка. Будем говорить, что данный рынок удовлетворяет условию отсутствия сильного арбитража, если не существует дохода $\xi \in \mathscr{A}$ такого, что $\xi \geqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Предложение 1.1 является критерием отсутствия на финансовом рынке сильного арбитража и утверждает, что данное условие эквивалентно непустоте множества $\mathscr{R}$ для любой случайной величины $\psi \geqslant \delta > 0$, хеджируемой доходами из множества $\mathscr{A}$. Также показывается, что условие отсутствия сильного арбитража не зависит от выбора единиц измерения капитала, задаваемых с помощью величины $\psi \geqslant \delta > 0$, хеджируемой доходами из множества $\mathscr{A}$.

Далее мы переходим к изучению взаимосвязи введенного понятия сильного арбитража с уже известными понятиями NA, NUPBR и NFLVR в семимартингальной модели финансового рынка с конечным числом основных активов (см., например, [3]) и множеством $\mathscr{H}^{bb}$ допустимых стратегий, капитал которых ограничен снизу. Результаты сведены в предложение 1.2:

(i) $\mathscr{R} \neq \emptyset \quad \not\Rightarrow \quad \text{NA}, \quad \text{NA} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{R} \neq \emptyset$;

(ii) $\mathscr{R} \neq \emptyset \quad \not\Rightarrow \quad \text{NUPBR}, \quad \text{NUPBR} \quad \not\Rightarrow \quad \mathscr{R} \neq \emptyset$;

(iii) $\mathscr{R} \neq \emptyset \quad + \quad \text{NUPBR} \quad \not\Rightarrow \quad \text{NFLVR}.$

Далее формулируется и доказывается критерий отсутствия арбитража разных типов в терминах множества $\mathscr{Z}^\sigma$ σ-мартингальных плотностей. Основная нетривиальная и полезная для конкретных примеров его часть состоит в следующем:

$$\mathscr{R} \neq \emptyset \Leftrightarrow \sup_{Z \in \mathscr{Z}^\sigma} \mathsf{E}\, Z_T = 1.$$

В главе 2 рассматриваются вопросы нахождения верхних цен хеджирования платежных обязательств. Под верхней ценой хеджирования платежного обязательства, выплата по которому задается случайной величиной B, на финансовом рынке с множеством $\mathscr{A}$ возможных доходов инвестора понимается следующее значение $\mathscr{V}_{\mathscr{A}}(B)$:

$$\mathscr{V}_{\mathscr{A}}(B) := \inf\{x \in \mathbb{R} : \exists \xi \in \mathscr{A} : x + \xi \geqslant B\}.$$

В теореме 2.1 выводится формула нахождения значения цены:

$$\mathscr{V}_{\mathscr{A}}(B) = \max_{\mu \in \mathscr{R}} \mu\left(\frac{B}{\psi}\right). \tag{6}$$

Из данной формулы можно получить уже известные результаты статей [5, 3], выражающих верхнюю цену хеджирования в виде верхней грани по σ-мартингальным мерам. Также показывается, что необходимым и достаточным условием того, что при вычислении верхней грани в формуле (6) можно ограничиться счетно-аддитивными мерами из $\mathscr{R}$ является равенство замыканий множества $\frac{\mathscr{C}^{\psi}}{\psi}$ в топологии нормы и топологии $\sigma(L^{\infty}, L^1)$ пространства L^{∞}.

Далее в главе 2 изучается вопрос нахождения верхней цены хеджирования неотрицательного платежного обязательства B неотрицательными процессами капитала в семимартингальной модели финансового рынка. Данная цена $\mathscr{V}_{+}(B)$ определяется следующим равенством:

$$\mathscr{V}_{+}(B) := \inf\{x \in \mathbb{R} : \exists X \in \mathscr{X}(x) : X_T \geqslant B\},$$

где $\mathscr{X}(x)$ — множество неотрицательных процессов капитала (определяемых по заданному процессу цен основных активов) с начальным значением $x \in \mathbb{R}_{+}$ (см., например, [7]). В теореме 2.2 выводится формула нахождения значения цены:

$$\mathscr{V}_{+}(B) = \sup_{Z \in \mathscr{Z}^l} \mathsf{E}\, B Z_T = \sup_{Z \in \mathscr{Z}^{\sigma}} \mathsf{E}\, B Z_T,$$

где $\mathscr{Z}^l$ и $\mathscr{Z}^{\sigma}$ — множества локально мартингальных и σ-мартингальных плотностей соответственно.

Перейдем к задаче максимизации полезности со случайным вкладом, которая исследуется **в главе 3**.

Пусть $U \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ — вогнутая, неубывающая, конечная на интервале $(0, +\infty)$ функция, интерпретируемая как функция полезности инвестора, действующего на финансовом рынке. Ожидаемая полезность инвестора при начальном капитале $x \in \mathbb{R}$ и случайном вкладе B определяется соотношением

$$u(x) := \sup_{\xi \in \mathscr{A}} \mathsf{E}\, U(x + \xi + B). \tag{7}$$

В предложении 3.1 доказываются основные свойства функции цены u:

(i) функция $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ является неубывающей и вогнутой.

(ii) Пусть $a = \inf\{x \in \mathbb{R} : u(x) > -\infty\}$. Тогда либо $u(x) = +\infty$ для всех $x > a$, либо $u(x) \in \mathbb{R}$ для всех $x > a$. В последнем случае функция u непрерывна на $(a, +\infty)$.

Перейдем к описанию двойственной задачи. Пусть V — преобразование Фенхеля–Лежандра функции U, т. е. $V(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}}[U(x) - xy]$, $y \in \mathbb{R}$. В случае $\mathscr{R} = \varnothing$ положим $v(0) := V(0)$ и $v(y) := +\infty$ при $y > 0$. Если же $\mathscr{R} \neq \varnothing$, положим двойственную целевую функцию v равной

$$v(y) := \inf_{\mu\in\mathscr{R}} \left\{ \mathsf{E}\left[V\left(\frac{y}{\psi} \frac{d\mu^r}{d\mathsf{P}} \right) \right] + y\mu\left(\frac{B}{\psi} \right) \right\}, \quad y \geqslant 0, \tag{8}$$

где $\mu = \mu^r + \mu^s$ есть разложение функционала μ на регулярную μ^r и сингулярную μ^s составляющие.

Основные свойства двойственной функции v перечислены в предложении 3.2:

(i) функция $v(y), y \geqslant 0$, принимает значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, является выпуклой и полунепрерывной снизу;

(ii) нижняя грань в (8) достигается;

(iii) если множество $\mathscr{R} \neq \emptyset$, то $v(y) \geqslant V(y) - y\mathscr{V}_{\mathscr{A}}(-B)$ и $\liminf\limits_{y\uparrow+\infty} \frac{v(y)}{y} \geqslant -\mathscr{V}_{\mathscr{A}}(-B)$;

(iv) если множество $\mathscr{R} \neq \emptyset$ и $\operatorname{dom} v \neq \emptyset$, то $\limsup\limits_{y\uparrow+\infty} \frac{v(y)}{y} \leqslant \mathscr{V}_{\mathscr{A}}(B)$.

Взаимосвязи целевых функций u и v посвящена теорема 3.1, утверждения которой состоят в следующем. Пусть

$$\mathscr{M}_0 := \{x \in \mathbb{R} : \exists \xi \in \mathscr{A},\ \varepsilon > 0 : x + \xi + B \geqslant \varepsilon\psi\}.$$

Тогда

(i) функция u конечна на интервале $(\mathscr{V}_{\mathscr{A}}(-B), +\infty)$;

(ii) для $x \in \mathscr{M}_0$

$$u(x) = \min_{y\geqslant 0}\{v(y) + xy\}. \tag{9}$$

Соотношение (9) называют двойственной связью между функциями u и v. Оно позволяет выразить решения основной экстремальной задачи (в случае их существования) через решения двойственной задачи. Данную взаимосвязь изучает предложение 3.3, утверждение которого состоит в следующем.

Если $x \in \mathscr{M}_0$, $\xi_* \in L^0$ — решение задачи (7), то

$$\begin{cases} \frac{y_*}{\psi}\frac{d\mu_*^r}{d\mathsf{P}} \in \partial U(x+\xi_*+B) \\ \mu_*\left(\frac{\xi_*}{\psi}\right) = 0 \\ \mu_*^s\left(\frac{x+\xi_*+B}{\psi}\right) = 0 \end{cases}, \qquad (10)$$

где y_* — значение, доставляющее минимум в формуле (9), а μ_* — решение двойственной задачи (8) при $y = y_*$.

Дальнейшие исследования в рассматриваемой главе посвящены преобразованию функции цены v двойственной экстремальной задачи к виду, не содержащему конечно-аддитивные меры и, тем самым, более удобному для применения в конкретных моделях. Основной результат содержится в теореме 3.2 и состоит в том, что функцию v можно вычислять по следующей формуле:

$$v(y) = \min_{\mu \in \ (\mathscr{R} - ba_+) \cap ca_+} \left\{ \mathsf{E}\left[V\left(\frac{y}{\psi}\frac{d\mu}{d\mathsf{P}}\right)\right] + y\mu\left(\frac{B}{\psi}\right) + yg(\mu, B)\right\}, \qquad (11)$$

где

$$g(\mu, B) := \sup_{\eta + \frac{B}{\psi} \in L_+^\infty} \left\{ \mu(\eta) - \inf_{\xi \in \frac{\mathscr{C}\psi}{\psi}} \mathsf{esssup}(\eta - \xi)\psi \right\},$$

при этом

$$(\mathscr{R} - ba_+) \cap ca_+ = \left\{ \mu \in ca_+ : \mu(\xi) \leqslant 1 \text{ для любой } \xi \in \left(\frac{1}{\psi} + \overline{\left(\frac{\mathscr{C}\psi}{\psi}\right)}\right) \cap L_+^\infty \right\},$$

где черта обозначает замыкание по норме пространства L^∞.

В предложении 3.4, используя теорему 3.2, получены необходимые условия существования решений в задаче (7), аналогичные (10), но не содержащие конечно-аддитивных мер:

$$\begin{cases} \frac{y_*}{\psi}\frac{d\mu_{**}(y_*)}{d\mathsf{P}} \in \partial U(x+\xi_*+B) \\ \mu_{**}\left(\frac{x+\xi_*}{\psi}\right) = x + g(\mu_{**}(y_*), B), \end{cases} \qquad (12)$$

где ξ_* — решение задачи (7) для некоторого $x \in \mathscr{M}_0$, y_* - значение, доставляющее минимум в формуле (9) при данном x, а $\mu_{**}(y_*)$ — мера, доставляющая минимум в формуле (11) при $y = y_*$.

Далее в главе 3 рассматривается задача максимизации с параметризованным функционалом полезности:

$$\tilde{u}(x, q) := \sup_{\xi \in \mathscr{A}} \mathsf{E}\, U(x + \xi + \langle q, f \rangle). \qquad (13)$$

Здесь f — N-мерный случайный вектор, задающий набор выплат по платежным обязательствам инвестора, а $q \in \mathbb{R}^N$ — количество данных платежных обязательств. Введение дополнительного параметра q позволяет более простым способом избавиться от конечно-аддитивных мер в двойственной задаче. Здесь наши результаты дополняют исследования статьи [16]. Двойственная задача в этом случае ставится в виде

$$v(y,r) := \inf_{\mu \in \mathscr{R}(y,r)} \left[\mathsf{E}\, V\left(\frac{d\mu^r}{d\mathsf{P}}\right)\right], \quad (y,r) \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{14}$$

где в качестве множества $\mathscr{R}(y,r)$ может быть взято любое из множеств $\mathscr{R}_1(y,r)$ или $\mathscr{R}_2(y,r)$:

$$\mathscr{R}_1(y,r) := \{\mu \in ca_+ : \mu(\xi) \le x'y + \langle q', r\rangle \ \forall (\xi, x', q') \in \mathscr{C}_+\},$$

$$\mathscr{R}_2(y,r) := \{\mu \in ba_+ : \mu(\Omega) = y, \mu(\xi) \le \langle q', r\rangle \ \forall (\xi, q') \in \mathscr{C}\};$$

при этом

$$\mathscr{C}_+ := \{(\xi, x', q') \in L^\infty_+ \times \mathbb{R}^{N+1} : \xi - x' - \langle q', f\rangle \in \mathscr{A} - L^0_+\}$$

и

$$\mathscr{C} := \{(\xi, q') \in L^\infty \times \mathbb{R}^N : \xi - \langle q', f\rangle \in \mathscr{A} - L^0_+\}.$$

В заключительной части рассматриваемой главы 3 ставится задача расширения множества допустимых стратегий в задаче максимизации полезности с неограниченным случайным вкладом в семимартингальной модели рынка и показывается, что множество $\mathscr{H}^\psi$, определенное как

$$\mathscr{H}^\psi := \big\{ H \in L(S) : \exists c \in \mathbb{R}_+ : \forall \mathsf{Q} \in \mathbb{M}^e_\sigma, \text{ т.ч. } \mathsf{E}_\mathsf{Q}\, \psi < \infty, \\ (H\cdot S)_t \geqslant -c \cdot \mathsf{E}_\mathsf{Q}(\psi | \mathscr{F}_t)\ \forall t \in [0,T] \big\},$$

действительно является нетривиальным, то есть приводящим к увеличению ожидаемой полезности, расширением класса $\mathscr{H}^{bb}$ стратегий с ограниченным снизу капиталом.

Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук Александра Александровича Гущина, которому автор выражает искреннюю благодарность за помощь в выборе направления исследования и постоянную поддержку.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Хасанов Р. В.* О верхней цене хеджирования платежных обязательств // Теория вероятн. и ее примен., 2012, том 57, №4, с. 667–681.

[2] *Хасанов Р. В.* О максимизации полезности с неограниченным случайным вкладом // Деп. в ВИНИТИ, 05.10.2012, №384-B2012, 20 стр.

[3] *Хасанов Р. В.* Максимизация полезности со случайным вкладом: новая постановка двойственной задачи // Обозр. приклад. и промышл. матем., 2011, том 18, №1, с. 96–97.

[4] *Khasanov R. V.* On superhedging prices of contingent claims // International Conference Stochastic optimization and optimal stopping, The book of Abstracts, 2012, p. 103–104.