Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Шнурников Игорь Николаевич

Распределение количества компонент связности дополнения к наборам замкнутых геодезических

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	академик РАН, профессор Фоменко Анатолий Тимофеевич
Официальные оппоненты:	Мантуров Василий Олегович, доктор физико–математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО Российский университет дружбы народов)
	Москвин Андрей Юрьевич кандидат физико–математических наук (ЗАО “Группа компаний С 7”, начальник отдела аналитики)
Ведущая организация:	Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится ________ 2013 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8й этаж).

Автореферат разослан ____ марта 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к теории конфигураций подмногообразий — активно развивающемуся разделу математики, связанному с комбинаторикой, алгебраической топологией, теорией узлов, алгебраической геометрией. Под теорией конфигураций подмногообразий мы имеем в виду в первую очередь результаты, касающиеся комбинаторики и топологии конечных наборов плоскостей и их дополнений в аффинных и проективных пространствах, а также обобщения на наборы подмногообразий в других многообразиях. Базовые факты теории приведены в книге П. Орлика, Х. Терао[1], а геометрические аспекты — в обзоре В. А. Васильева[2]. Ряд обобщений для произвольных многообразий сделал П. Дешпанд[3].

В диссертации изучаются возможные значения числа f связных компонент дополнения к объединению подмногообразий коразмерности один. Перечислим некоторые результаты, касающиеся числа f.

Комбинаторика числа областей. Пусть евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ разбивается набором из n плоскостей коразмерности один (гиперплоскостей) в объединение многогранных областей, включая неограниченные. Р. Бак[4] нашел числа всех k – мерных граней и числа всех ограниченных k – мерных граней в разбиениях пространств $\mathbb{R}^d$ гиперплоскостями общего положения для $k = 0, 1, \ldots, d$, нашел аналогичные числа для разбиений вещественных проективных пространств $\mathbb{RP}^d$. Р. Шеннон[5] доказал нетривиальные нижние точные оценки на числа k – мерных плоскостей пересечения и k – мерных клеток в разбиениях пространств $\mathbb{RP}^d$ конечными наборами гиперплоскостей, для которых пересечение всех гиперплоскостей является пустым множеством. Т. Заславский[6] рассматривал разбиения аффинных и проективных пространств конечными наборами гиперплоскостей, определил характеристический многочлен с помощью функции Мёбиуса и в его терминах выразил число всех областей и число всех ограниченных областей пространства. Р. Эренберг, М. Рэдди, М. Слоун[7] получили аналогичные ре-

[1] P. Orlic, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. Springer, Berlin – Heidelberg, 1992. 329 pp.

[2] В. А. Васильев, Топология наборов плоскостей и их дополнений. *Успехи математических наук*, **56**:2 (338), (2001), 167–203.

[3] P. Deshpande, Arrangements of Submanifolds and the Tangent Bundle Complement. *Electronic Thesis and Dissertation Repository*, Paper 154 (2011).

[4] R.C. Buck, Partition of space. *Amer. Math. Monthly* **50**:9 (1943), 541–544.

[5] R.W. Shannon, A lower bound on the number of cells in arrangements of hyperplanes. *Jour. of combinatorial theory (A)*, **20** (1976), 327–335.

[6] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements: Face count formulas for partitions of space by hyperplanes. Mem. Amer. Math. Soc. **154**:1, 1975.

[7] R. Ehrenborg, M. Readdy, M. Slone, Affine and toric hyperplane arrangements. *Discr. Comp. Geom.*

зультаты для клеточных разбиений многомерных торов с локально плоской метрикой конечными наборами плоских замкнутых подторов коразмерности один, а П. Дешпанд обобщил формулы Заславского для конфигураций подмногообразий коразмерности один.

Когомологии дополнения. П. Орлик и Л. Соломон[8] выразили кольцо целочисленных когомологий дополнения к набору комплексных гиперплоскостей через ч. у. м. пересечений гиперплоскостей. Они заметили, что характеристический многочлен и число областей для набора вещественных гиперплоскостей совпадают с многочленом Пуанкаре и суммой чисел Бетти дополнения в пространстве $\mathbb{C}^m$ к объединению комплексифицированных гиперплоскостей соответственно. Обзор С. А. Юзвинского[9] посвящен свойствам алгебр Орлика–Соломона и некоторым их приложениям. М. Горески и Р. Макферсон[10] выразили целочисленные когомологии дополнения в вещественном пространстве к набору аффинных плоскостей произвольных размерностей в терминах порядкового комплекса этого набора и размерностей пересечений плоскостей. Г. М. Циглер[11] построил примеры наборов вещественных плоскостей коразмерности два с четномерными пересечениями, имеющих одинаковые ч.у.м. пересечений, но у которых дополнения к объединениям плоскостей имеют неизоморфные алгебры $\mathbb{Z}$–когомологий и неизоморфные фундаментальные группы.

Наборы прямых и псевдопрямых на проективной плоскости. Рассмотрим набор из n гладких замкнутых кривых без самопересечений (псевдопрямых) на вещественной проективной плоскости, любые две из которых пересекаются трансверсально в единственной точке; при этом не существует точки, принадлежащей всем псевдопрямым. Обозначим через t_i число точек, принадлежащих ровно i псевдопрямым. Изучение возможных значений чисел t_i и соотношений между ними — довольно интересная задача, возникшая из гипотезы Дж. Сильвестра, см. обзоры П. Брасса и др.[12] и Н. Нилакантана[13]. Гипотеза Г. А. Дирака[14] утверждает, что $t_2 \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, известен также пример с $t_2 = \frac{n}{2}$ для четных чисел $n \geqslant 6$. Дж. Сцима и

41:4 (2009), 481–512.

[8]P. Orlic, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Inventiones Math.* **56**:2 (1980), 167–189.

[9]С. А. Юзвинский, Алгебры Орлика–Соломона в алгебре и топологии. *Усп. Матем. Н.*, **56**:2(338) (2001), 87–166.

[10]М. Горески, Р. Макферсон. Стратифицированная теория Морса. М.: Мир, 1991.

[11]G.M. Ziegler, On the difference between real and complex arrangements. *Math. Z.* **212** (1993), 1–11.

[12]P. Brass, W. Mozer, J. Pach, Incidence and Arrangement Problems. In *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, 2005. Chapter 7, 289–324.

[13]N. Nilakantan, Extremal Problems Related to the Sylvester–Gallai Theorem. In *Combinatorial and Computational Geometry*, ed. by J.E. Goodman, J. Pach, E. Welzl, Cambridge University Press, 2005, 479–494.

[14]G. A. Dirac, Collinearity properties of sets of points. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* (*2*), **2** (1951), 221–227.

Е.Т. Сойер[15] доказали неравенство $t_2 \geqslant \frac{6}{13}n$ при $n \geqslant 8$. Б. Грин и Т. Тао[16], использовав методы аддитивной комбинаторики, доказали гипотезу Дирака для достаточно больших n. Известны соотношения, касающиеся чисел t_i одновременно для нескольких значений i, например, линейные неравенства Э. Мельхиора[17] и Ф. Хирцебруха[18]. Неравенство Е. Мельхиора обращается в равенство для симплициальных разбиений вещественной проективной плоскости набором псевдопрямых. Ф. Хирцебрух изучал возможные значения отношения чисел Черна для двумерных комплексных многообразий, построенных по наборам комплексных прямых на плоскости $\mathbb{C}^2$, а неравенство на числа t_i получил как следствие неравенства Мияоки–Яо (с уточнениями Ф. Сакаи). Б. Грюнбаум[19], систематически изучая конфигурации прямых и псевдопрямых на вещественной проективной плоскости, поставил вопрос об описании множества чисел областей f, реализуемых при данном числе прямых n; доказал, что число областей не может принадлежать интервалу $(2n-2; 3n-6)$. Позже Н. Мартинов[20] полностью нашел множества чисел f, реализуемых наборами n псевдопрямых. А именно, число f не может принадлежать интервалам (лакунам)

$$\big(i(n-i+1)+C_{i-1}^2;\ (i+1)(n-i)\big)$$

для

$$2 \leqslant i \leqslant \left[\sqrt{2n-5,75}-0,5\right]$$

при $n \geqslant 3$ (все остальные числа между минимальными и максимальными возможными значениями реализуются). Н. Мартинов доказал также, что множества чисел f, реализуемые наборами n прямых и наборами n псевдопрямых, совпадают между собой. В. И. Арнольд[21], по-видимому, не зная о результатах Б. Грюнбаума и Н. Мартинова, снова начал изучать множество чисел областей f проективной плоскости, реализуемых при данном числе прямых n. Предложенный им подход отличался от подхода Н. Мартинова большей ролью нижних оценок числа f, зависящих от n и от максимального числа прямых, пересекающихся в одной точке. Эта идея В.И. Арнольд применяется в диссертации в ряде других случаев.

[15]J. Csima, E.T. Sawyer, There exist $\frac{6n}{13}$ ordinary points. *Discrete Comput. Geom.* **9** (1993), 187–202.

[16]B. Green, T. Tao, On sets defining few ordinary lines. arxiv: 1208.4714 (2012).

[17]E. Melchior, Über Vielseite der Projektiven Ebene. *Deutsche Mathematik* **5** (1940), 461–475.

[18]F. Hirzebruch, Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers. *Contemporary Math.* **58** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 141–155.

[19]B. Grünbaum, Arrangements and Spreads. AMS, Providence, Rhode Island, 1972.

[20]N. Martinov, Classification of arrangements by the number of their cells. *Discrete and Comput. Geometry*, **9**:1 (1993), 39–46.

[21]В.И. Арнольд, На сколько частей делят плоскость n прямых? *Матем. просвещение сер. 3* (2008) **12**, 95–104.

Цель работы

Обобщить результаты Н. Мартинова в следующем смысле. Изучить множества чисел f связных компонент дополнений в многообразиях M к конечным объединениям подмногообразий коразмерности один. Рассмотреть случаи кривых на двумерных поверхностях рода g, гиперплоскостей в d–мерных аффинных, проективных пространствах и пространствах Лобачевского. Получить нижние оценки числа f, зависящие от числа n и степени "вырождения" набора подмногообразий.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Для наборов n псевдопрямых на вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, в которых не более чем $n-3$ псевдопрямые пересекаются в одной точке, найдено и доказано неравенство

$$t_2 + 1,5\, t_3 \geqslant 8 + \sum_{i \geqslant 4} (2i - 7,5)\, t_i,$$

где t_i — это число точек, каждая из которых принадлежит ровно i псевдопрямым. На основе этого и других известных ранее линейных по t_i неравенств (Е. Мельхиора и Ф. Хирцебруха) получены нижние оценки числа компонент связности дополнения в $\mathbb{RP}^2$ к объединениям n прямых (и псевдопрямых).

2. Полностью вычислены множества $F(M, n)$ чисел компонент связности дополнений в M к объединениям n замкнутых геодезических для случаев, когда M:

- двумерный тор или бутылка Клейна с любой локально евклидовой метрикой,
- тетраэдр с равными гранями (любыми остроугольными треугольниками).

3. Найдена и доказана точная нижняя оценка числа f связных компонент дополнения в связном, гладком, d–мерном компактном многообразии M^d без края к объединению n связных замкнутых подмногообразий коразмерности один

$$f \geqslant n - \dim H_{d-1}\left(M^d, G\right) + 1,$$

где группа $G = \mathbb{R}$, если M^d и все n подмногообразий ориентируемы, и $G = \mathbb{Z}_2$ иначе.

4. Изучены множества $F(M^d, n)$ чисел компонент связности дополнений в d – мерных многообразиях M^d к объединениям n различных связных подмногообразий определенного типа в следующих случаях:

- вычислены первые 4 по возрастанию числа множества $F\left(\mathbb{RP}^d, n\right)$ для вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}^d$ и наборов из n плоскостей коразмерности один, не имеющих общих точек в совокупности (при $n \geqslant 2d+5$ и $d \geqslant 3$);

- множества $F(L^d, n)$ полностью найдены для d–мерных пространств Лобачевского L^d и наборов n плоскостей коразмерности один;

- найдены бесконечные подмножества множеств $F(T^d, n)$ для плоских торов T^d и наборов плоских подторов коразмерности один. Выдвинута гипотеза, что эти подмножества совпадают с множествами $F(T^d, n)$ на основании того, что для $d = 2$ совпадение доказано.

Основные методы исследования

В диссертации используются свойства функции Мёбиуса частично упорядоченных множеств, методы теории гомологий и некоторые результаты, касающиеся замкнутых геодезических на поверхностях с метриками постоянной кривизны.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в задачах комбинаторной и дискретной геометрии, комбинаторной топологии.

Апробация результатов работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно–исследовательском семинаре "Дифференциальная геометрия и приложения" кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико – математического факультета МГУ (2011 – 2012 гг.), на семинарах "Алгебраическая топология и ее приложения" в рамках конференции «Ломоносовские чтения» (2011 – 2012 гг.), "Современные геометрические методы" (2008 – 2011 гг.), "Узлы и теория представлений" (2010 – 2012 гг.), "Геометрия в целом" (2009 – 2010 гг.), "Математические вопросы кибернетики" (2010 г.), "Теория автоматов" и "Дискретная геометрия и геометрия чисел" (2011 г.) механико–математического факультета МГУ, а также на следующих научно–исследовательских семинарах и научных конференциях:

- на международной конференции “Метрическая геометрия поверхностей и многогранников”, посвященной 100 – летию со дня рождения Н. В. Ефимова, Москва, 2010 г.;

- на международной конференции “Юбилейный симпозиум А. З. Петрова по общей теории относительности и гравитации”, Казань, 2010 г.;

- на международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной 110 – летию со дня рождения И. Г. Петровского, Москва, 2011 г.;

- на международной конференции “Александровские чтения”, Москва, 2012 г.;

- на международной конференции “Дискретная Геометрия”, посвященной 100 – летию со дня рождения А. Д. Александрова, Ярославль, 2012 г.;

- на семинаре “Algebraische Geometrie” (руководители Prof. Dr. Hubert Flenner, Prof. Gerhard Rohrle, Prof. Dr. Uwe Storch), Бохум, Рурский ун-т, 2009 г.;

- на геометрическом семинаре им. И. Ф. Шарыгина (руководители д.ф.-м.н. И.Х. Сабитов, д.ф.-м.н. В. Ю. Протасов), Москва, МЦНМО, 2009 г.;

- на семинаре по комбинаторной геометрии и топологии (руководитель д.ф.-м.н. В. О. Мантуров), Москва, РУДН, 2012 г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 9 работах, список которых приведен в конце автореферата, [1 − 9].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы (47 наименований). Общий объем диссертации составляет 109 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации дается обзор литературы, формулируются постановки задач и основные результаты работы.

Содержание главы 1

В первой главе рассматриваются конечные наборы псевдопрямых (гладких замкнутых кривых без самопересечений, попарно трансверсально пересекающихся в одной точке) на вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$. Изучаются соотношения между числами v, e, f, t_i, p_j вершин, ребер, граней, i–кратных точек пересечения и j–угольных граней соответственно. Доказано следующее линейное по t_i неравенство, аналогичное (но не эквивалентное) неравенству Ф. Хирцебруха для наборов комплексных прямых.

Теорема 1. *Если в наборе из n псевдопрямых на проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ в одной точке пересекаются не более чем $n-3$ псевдопрямые, то*

$$t_2 + 1,5\, t_3 \geqslant 8 + \sum_{i \geqslant 4} (2i - 7,5)\, t_i.$$

Формулируется и доказывается метод получения нижних оценок числа областей f с помощью линейных по t_i неравенств. Метод применяется к неравенствам Е. Мельхиора, Ф. Хирцебруха и к неравенству теоремы 1. Получающиеся оценки вида $f \geqslant F(n, m)$ зависят от числа (псевдо)прямых n квадратично, где m — максимальное число пересекающихся в одной точке (псевдо)прямых. Далее приводится теорема Н. Мартинова, описывающая множество всех пар чисел (n, f), для которых существуют наборы из n псевдопрямых, делящие проективную плоскость на f областей.

Содержание главы 2

Во второй главе рассматриваются конечные наборы замкнутых трансверсально пересекающихся кривых на двумерных компактных поверхностях M без края. Число f компонент связности дополнения в M к объединению кривых вычисляется в случае, когда разбиение поверхности кривыми не обязательно клеточное. Множество всех возможных чисел f для поверхности рода g и n кривых имеет вид

$$\{m \in N \mid m \geqslant n - 2g + 1\}.$$

В связи с простотой этого множества возник вопрос о дополнительных ограничениях, которые следовало бы наложить на поверхности и на кривые так, что множества чисел областей стали бы более содержательными. Было предложено взять замкнутые геодезические на гладких поверхностях с метрикой постоянной гауссовой кривизны, а также на многогранниках. В работе рассмотрены случаи равногранных тетраэдров T_r, двумерных торов T^2 и бутылок Клейна KL^2 с любыми локально евклидовыми метриками. В разбиениях этих поверхностей наборами замкнутых геодезических определялись условия, при которых все области гомеоморфны диску, после чего число областей выражалось через кратности точек пересечения, число точек пересечения находилось через гомотопические типы геодезических (в случае тетраэдра: через гомотопические типы их поднятий). Явно строился примеры геодезических, реализующих заданное число областей. Для доказательства невозможности остальных чисел быть числами областей использовались оценки числа f в терминах максимального числа параллельных геодезических.

Теорема 2. *Множества F всех возможных чисел связных компонент дополнения к объединению n замкнутых геодезических на равногранных тетраэдрах T_r, двумерных торах T^2 и бутылках Клейна KL^2 с локально плоской метрикой имеют вид:*

- $F(T^2, n) = \{n-1, n\} \cup \{l \in \mathbb{N} \mid l \geqslant 2n-4\}$ *при* $n \geqslant 2$,
- $F\left(KL^2, n\right) = \{n-1, n, n+1\} \cup \{l \in \mathbb{N} \mid l \geqslant 2n-4\}$ *при* $n \geqslant 2$,
- $F(T_r, 2) = \{3\} \cup \{2m \mid m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2\}$,
- $F(T_r, n) = \{n+1, 2n\} \cup \{m \in \mathbb{N} \mid m \geqslant 4n-6\}$ *при* $n \geqslant 3$.

Рассматривается связная ориентируемая C^∞–гладкая компактная поверхность M без края с метрикой постоянной отрицательной кривизны (конкретно заданной). Для этой поверхности

- доказано, что две замкнутые геодезические без самопересечений длины T_1 и T_2 образуют не более чем cT_1T_2 областей для некоторой константы c.

- приведен пример сколь угодно длинных замкнутых геодезических, образующих одну область,

- приведен пример сколь угодно длинных замкнутых геодезических длин T_1 и T_2, образующих не менее чем $c_1T_1T_2$ областей для некоторой константы $c_1 > 0$.

- приведен пример замкнутой геодезической, образующей f областей для любого натурального числа f.

Содержание главы 3

В третьей главе рассматриваются наборы связных замкнутых подмногообразий коразмерности один в многообразии M. Число f компонент связности дополнения в многообразии M к объединению A подмногообразий выражено с помощью гомологической последовательности пары (M, A), после чего получена нижняя точная оценка числа f.

Теорема 3. *Пусть A — объединение n попарно трансверсально пересекающихся замкнутых и связных подмногообразий коразмерности один в гладком, компактном, связном d–мерном многообразии M^d без края, $f = \left|\pi_0\left(M^d \setminus A\right)\right|$. Тогда*

$$f \geqslant n + 1 - \dim H_{d-1}\left(M^d, G\right),$$

где группа $G = \mathbb{R}$, если многообразие M^d и все подмногообразия A_i ориентируемы, и $G = \mathbb{Z}_2$ иначе.

Для конечных наборов плоскостей коразмерности один в вещественных проективных пространствах $\mathbb{RP}^d$ определяются функция Мёбиуса ч.у.м. пересечений и характеристический многочлен. Описаны свойства функции Мёбиуса, с помощью которых получены нижние оценки и вычислены несколько первых значений числа f связных компонент дополнения в пространстве $\mathbb{RP}^d$ к объединению n гиперплоскостей.

Теорема 4. *Первые четыре по возрастанию значения числа связных компонент дополнения в пространстве $\mathbb{RP}^d$ к объединениям n гиперплоскостей, не имеющих общих точек в совокупности, следующие:*

$$(n-d+1)2^{d-1}, \quad 3(n-d)2^{d-2}, \quad (3n-3d+1)2^{d-2}, \quad 7(n-d)2^{d-3}$$

при $d \geqslant 3$ и $n \geqslant 2d+5$.

Изучены множества $F\left(T^d, n\right)$ и $F\left(L^d, n\right)$ чисел связных компонент дополнений в d–мерных торах T^d с локально евклидовой метрикой к объединениям n плоских подторов коразмерности один и дополнений в пространствах Лобачевского L^d к объединениям n гиперплоскостей соответственно.

Теорема 5. *Пусть $n \geqslant d \geqslant 2$ — натуральные числа. Тогда*

$$F\left(T^d, n\right) \supseteq \{f \in \mathbb{N} \mid n-d+1 \leqslant f \leqslant n \quad \text{или} \quad f \geqslant 2(n-d)\},$$

$$F\left(L^d, n\right) = \left\{f \in \mathbb{N} \mid n+1 \leqslant f \leqslant \sum_{i=0}^{d} C_n^i\right\}.$$

В заключении приведен неформальный "алгоритм" для изучения множества чисел f связных компонент дополнения и указана важность нижних оценок числа f, зависящих от степени вырождения набора подмногообразий.

Благодарности

Глубоко признателен своему научному руководителю, академику РАН А. Т. Фоменко за постановки задач и внимание к работе. Глубоко благодарен профессору Н. П. Долбилину, доценту Е. А. Кудрявцевой и профессору В. Ю. Протасову за неоднократные обсуждения задач и полезные ссылки на литературу. Благодарю всех сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений за творческую обстановку и внимание к работе.

Особенно поблагодарить хотелось бы академика РАН В. И. Арнольда, привлекшего внимание к задаче в открытой лекции в 2007 г.

Работы автора по теме диссертации

[1] И.Н. Шнурников, На сколько областей делят плоскость n прямых, среди которых не более $n-k$ коллинеарных? *Вестник Моск. ун-та, сер. 1* (2010) **5**, 32-36.

[2] И. Н. Шнурников, О числе областей, образованных наборами замкнутых геодезических на плоских поверхностях. *Матем. Зам.* **90**:4 (2011), 636 — 640.

[3] И. Н. Шнурников, Конфигурации подмногообразий коразмерности 1.*Матем. сб.* (2012) **203**:9, 133 — 160.

[4] И.Н. Шнурников, О числе компонент связности дополнений к объединениям замкнутых подмногообразий. Деп. в ВИНИТИ, № 347 – В 2012, с. 1 — 28.

[5] И.Н. Шнурников, Число областей в разбиениях плоскости прямыми не общего положения. Сборник тезисов международной конференции "Геометрия в «целом», топология и их приложения", Харьков, 2009 г., с. 47.

[6] И.Н. Шнурников, Классификация конфигураций прямых на проективной плоскости по числу областей. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна — 2010, Воронеж, 2010 г., с. 160 — 161.

[7] И.Н. Шнурников, О числе областей проективного пространства, разделенного n плоскостями. Тезисы докладов международной конференции "Юбилейный симпозиум А.З. Петрова по общей теории относительности и гравитации", Казань, 2010 г., с. 125 — 126.

[8] И.Н. Шнурников, О числе областей, образованных набором замкнутых геодезических на плоских поверхностях. Тезисы докладов международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной 110-ой годовщине И.Г. Петровского, Москва, 2011 г., с. 396-397.

[9] И.Н. Шнурников, О числе областей дополнений в конфигурациях подмногообразий. Тезисы докладов международной конференции “Дискретная геометрия”, посвященной 100 – летию со дня рождения А. Д. Александрова, Ярославль, 2012 г., с. 85 — 86.