**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.987.4

Кравцева Анна Константиновна

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Шавгулидзе Евгений Тенгизович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Смолянов Олег Георгиевич, МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор кафедры теории функций и функционального анализа
	доктор физико-математических наук, доцент Сакбаев Всеволод Жанович МФТИ (ГУ), доцент кафедры высшей математики
Ведущая организация:	Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

Защита диссертации состоится 29 марта 2013 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 28 февраля 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются задачи бесконечномерного анализа. А именно, доказывается существование фейнмановских интегралов в смысле аналитического продолжения гауссовских интегралов по операторным аргументам для класса функционалов экспоненциального вида с полиномом в показателе, строится представление данных интегралов Фейнмана в форме гауссовских интегралов, и, наконец, описывается класс эволюционных уравнений, обладающих решениями, представимыми с помощью интегралов Фейнмана.

В середине двадцатого века в квантовой механике стал использоваться подход, основанный на функциональном интегрировании. Он был предложен Р. Фейнманом в работе[1]. Данная работа была выполнена на физическом уровне строгости. Позже вопросы, связанные с континуальным интегрированием, исследовались во многих математических работах, в частности, работах С. Альбеверио, Ф. А. Березина, Х. фон Вайцзеккера, Э. Виттена, И. М. Гельфанда, Ю. Л. Далецкого, Х. Досса, Р. Камерона, В. П. Маслова, М. Б. Менского, Э. Нельсона, Б. Саймона, О. Г. Смолянова, А. В. Угланова, А. Трумена, Р. Хег-Крона, А. Ю. Хренникова, А. М. Чеботарева, Е. Т. Шавгулидзе, П. Экснера, А. М. Яглома. Функциональный интеграл широко используется в квантовой теории поля.

Известно несколько определений континуального интеграла: во-первых, определение Р. Фейнмана через предел конечнократных интегралов, во-вторых, определение через аналитическое продолжение по параметру, в-третьих, определение через преобразование Фурье и равенство Парсеваля и, в-четвёртых, определение в теории white noise analysis. Оригинальный фейнмановский подход развивался в работах В. П. Маслова[2]; А. Трумена[3]; Ф. А. Березина[4]; О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[5]; В. Ичиносе[6]; Д. Фудживары и Н. Куманы-го[7] и многих других. Ана-

[1] R. P. Feynman, "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics", Reviews of Modern Physics, 1948, **20**, №2, pp. 367-387.

[2] В. П. Маслов, "Комплексные цепи Маркова и интеграл Фейнмана для нелинейных систем", М.: Наука, 1976.

[3] A. Truman, "The polygonal path formulation of the Feynman path integrals", Lecture notes in Physics, **106**, 1979, pp. 73–102.

[4] Ф. А. Березин, "Метод вторичного квантования", М.: Наука, 1986.

[5] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, "Континуальные интегралы", М.: Изд-во МГУ, 1990.

[6] W. Ichinose, "On the formulation of the Feynman path integral through broken line paths", Communications in Mathematical Physics, **189**, № 1, 1997, pp. 17–33.

[7] D. Fujiwara, N. Kumano-go, "Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation", Bulletin des Sciences Mathematiques, **129**, № 1, 2005,

литический интеграл Фейнмана разрабатывался в работах И. М. Гельфанда и А. М. Яглома[8]; Р. Камерона[9]; Е. Нельсона[10]; В. П. Маслова[2]; Ф. А. Березина[11]; О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[5]. Конструкция интеграла, основанная на преобразовании Фурье и равенстве Парсеваля, рассматривалась в работах С. Альбеверио и Р. Хег-Крона[12]; В. П. Маслова[2]; В. П. Маслова и А. М. Чеботарева[13]; С. Девитт-Моретт[14]; А. В. Угланова[15]. Построение интеграла в теории white noise analysis излагается, например, в работах Т. Хиды[16]; М. Гротхауса, Д. С. Кхандекара, Ж. Л. да Сильвы и Л. Стрейта[17]. В работах Е. Нельсона[10]; О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[18,5] исследовался вопрос о связи первых трёх определений. В монографии С. Альбеверио и Р. Хег-Крона[12] рассматривались фейнмановские интегралы от функционалов, являющихся преобразованиями Фурье счетноаддитивных мер на бесконечномерном пространстве. Больший интерес с точки зрения физики представляют результаты, полученные в работах О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[5,19,20], в которых

---

pp. 57–79.

[8] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, "Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике", Успехи математических наук, **11**, № 1, 1956, с. 77–114.

[9] R. H. Cameron, "A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals", Journal of Mathematics and Physics, , **39**, № 2, 1960, pp. 126–140.

[10] E. Nelson, "Feynman integrals and the Schrödinger equation", Journal of Mathematical Physics, **5**, № 3, 1964, pp. 332–343.

[11] Ф. А. Березин, "Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве", Успехи физических наук, **132**, № 3, 1980, с. 497–548.

[12] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, "Mathematical theory of Feynman path integrals", Lecture notes in math, Berlin: Springer, 1976.

[13] В. П. Маслов, А. М. Чеботарев, "Обобщенная мера в континуальном интеграле Фейнмана", Теоретическая и математическая физика, **28**, № 3, 1976, с. 291–307.

[14] C. De Witt-Morette, "On the definition and approximation of Feynman's path integrals", Physical Review, **81**, № 5, 1951, pp. 848–852.

[15] А. В. Угланов, "Об одной конструкции фейнмановского интеграла", ДАН СССР, **243**, № 6, 1978, с. 1406–1409.

[16] T. Hida, "White noise approach to Feynman integrals", Journal of the Korean Mathematical Society, **38**, № 2, 2001, pp. 275–281.

[17] M. Grothaus, D. C. Khandekar, J. L. da Silva, L. Streit, "The Feynman integral for time-dependent anharmonic oscillators", Journal of Mathematical Physics, **38**, № 6, 1997, pp. 33278–3299.

[18] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, "Несколько результатов, связанных с фейнмановскими мерами", Четвертая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов, **3**, 1985.

[19] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, "Формулы Фейнмана для решений бесконечномерных уравнений Шредингера с полиномиальными потенциалами", Доклады РАН, **390**, № 3, 2003, с. 321–324.

[20] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, "Бесконечномерные уравнения Шредингера с полиномиальными потенциалами и интегралы Фейнмана по траекториям", Доклады

исследовался интеграл Фейнмана в смысле аналитического продолжения по параметру от функционала экспоненциального вида с полиномом в показателе. В диссертации предлагается определение фейнмановского интеграла через аналитическое продолжение в пространстве ограниченных операторов на бесконечномерном пространстве.

Теория дифференциальных уравнений в частных производных для функций бесконечномерного аргумента играет важную роль в различных разделах теоретической физики, в частности, в квантовой теории поля и в теории суперструн. Связь между данными уравнениями и функциональными интегралами по пространству траекторий впервые заметил Р. Фейнман, разрабатывая свой подход к квантовой механике. Математические исследования данных уравнений начались во второй половине двадцатого века в ряде работ, среди которых — работы И. М. Гельфанда и А. М. Яглома[8]; Л. Гросса[21]; Ю. Л. Далецкого и В. В. Стремского[22]. Задача о представлении решений уравнений Шрёдингера с помощью фейнмановских интегралов рассматривалась во многих работах, в частности, в работах С. Альбеверио, О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[23]; Я. А. Бутко[24]; В. П. Маслова; Ю. Л. Далецкого.

Представление решений эволюционных уравнений через предел конечнократных интегралов принято называть формулами Фейнмана. Один из методов получения формул Фейнмана базируется на теореме Чернова[25]. Он был предложен О.Г. Смоляновым и получил развитие в работах Х. фон Вайцзеккера, О. Г. Смолянова и О. Виттиха[26]; О. Г. Смолянова, А. Г. Токарева и А. Трумена[27]; О. О. Обрезкова[28] (в случае стохастическо-

РАН, **408**, № 1, 2006, с. 28–33.

[21] L. Gross, "Abstract Wiener spaces", Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, **2**, 1965, pp. 31–42.

[22] Ю. Л. Далецкий, В. В. Стремский, "Фейнмановские интегралы для уравнений Шрёдингера в функциональных производных", Успехи математических наук, **24**, № 1, 1969, с. 191–192.

[23] С. Альбеверио, О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, "Некоторые методы квантования конечномерных гамильтоновых систем со связями", Доклады РАН, **361**, № 4, 1998, с. 727–730.

[24] Я. А. Бутко, "Функциональные интегралы для уравнения Шрёдингера на компактном римановом многообразии", Математические заметки, **79**, №2, 2006, с. 194–200.

[25] P. R. Chernoff, "Note on product formulas for operator semigroups", Journal of Functional Analysis, **2**, 1968, pp. 238–242.

[26] Х. фон Вайцзеккер, О. Г. Смолянов, О. Виттих, "Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры", Доклады РАН, **371**, № 4, 2000, с. 442–447.

[27] O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman, "Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula", Journal of Mathematical Physics, **43**, № 10, 2002, pp. 5161–5171.

[28] О. О. Обрезков, "Представление решения стохастического уравнения Шрёдингера в виде интеграла Фейнмана", Фундаментальная и прикладная математика, **12**, № 5,

го уравнения Шрёдингера); Я. А. Бутко[29,30] и других. Следует отметить, что в теореме Чернова заранее предполагается наличие решения, поэтому данный метод непосредственно неприменим к доказательству существования решения.

Для аналитических потенциалов и начальных условий известны представления решений уравнений Шрёдингера в форме интегралов Фейнмана в смысле аналитического продолжения по параметру. Такие представления были получены, например, в работах Е. Нельсона[10]; Х. Досса[31]; С. Альбеверио, А. Ю. Хренникова и О. Г. Смолянова[32]; О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[5,19,20], а также в работах С. Альбеверио и О. Г. Смолянова[33]; С. Альбеверио, В. Н. Колокольцова и О. Г. Смолянова[34]; О. Г. Смолянова и А. Трумена[35] для стохастического уравнения Шрёдингера. В диссертации развивается именно этот подход к представлению решений эволюционных уравнений в форме интеграла Фейнмана.

Цель работы. Цель данной работы состоит, во-первых, в нахождении условий существования фейнмановских интегралов в смысле аналитического продолжения в пространстве операторов и построении представлений этих интегралов в виде интегралов по гауссовским мерам; во-вторых — в получении условий существования решений эволюционных уравнений типа Шрёдингера, а также условий представления данных интегралов в форме интеграла Фейнмана.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Доказано существование интеграла Фейнмана в смысле аналитического продолжения в пространстве операторов на гильбертовом про-

2006, с. 135–152.

[29] Я. А. Бутко, "Функциональные интегралы, соответствующие решению задачи Коши–Дирихле для уравнения теплопроводности в области компактного риманова многообразия", Фундаментальная и прикладная математика, **12**, №6, 2006, с. 3–15.

[30] Я. А. Бутко, "Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия", Математические заметки, **83**, №3, 2008, с. 333–349.

[31] H. Doss, "Sur une resolution stochastique de l'equation de Schrödinger a coefficients analytiques", Communications in Mathematical Physics, **73**, № 3, 1980, pp. 247–264.

[32] S. Albeverio, A.U. Khrennikov, O. G. Smolyanov, "The probabilistic Feynman–Kac formula for an infinite-dimensional Schrödinger equation with exponential and singular potentials", Potential Analysis, **11**, 1999, pp. 157–181.

[33] С. Альбеверио, О. Г. Смолянов, "Бесконечномерные стохастические уравнения Шрёдингера–Белавкина", Успехи математических наук, **52**, № 4, 1997, с. 197–198.

[34] S. Albeverio, V.N. Kolokol'tsov, O. G. Smolyanov, "Continuous quantum measurement: local and global approaches", Reviews in Mathematical Physics, **9**, № 8, 1997, pp. 907–920.

[35] О. Г. Смолянов, А. Трумен, "Уравнения Шрёдингера–Белавкина и ассоциированные с ними уравнения Колмогорова и Линдблада", Теоретическая и математическая физика, **120**, № 2, 1999, с. 193–207.

странстве от функционала экспоненциального вида с полиномом в показателе.
2. Найдено представление этого интеграла в виде интеграла по гауссовской мере.
3. Доказано, что задача Коши для уравнения типа Шрёдингера с полиномиальным потенциалом имеет решение.
4. Построено представление этого решения в виде фейнмановского интеграла в смысле аналитического продолжения в пространстве операторов.

Основные методы исследования. При получении результатов диссертационной работы были использованы методы математического анализа, бесконечномерного анализа, комплексного анализа.

Теоретическая и практическая ценность работы. Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для вычисления интегралов, возникающих в квантовой теории поля, для нахождения асимптотики этих интегралов, в частности, интегралов, описывающих решения эволюционных уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- Семинар механико-математического факультета МГУ под руководством д.ф.-м.н. проф. О. Г. Смолянова и д.ф.-м.н. проф. Е. Т. Шавгулидзе (2007–2012 гг., неоднократно)
- XVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2009 г.)
- XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2010 г.)
- XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2011 г.)
- XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2012 г.)
- Семинар Математического института им. В.А. Стеклова РАН под руководством акад. В.С. Владимирова и член-корр. РАН И.В. Воловича (2011 г.)
- 12-ая Международная междисциплинарная научно-практическая школа-конференция, Евпатория (2012 г.)
- Семинар ИПМ им. М. В. Келдыша РАН под руководством д.ф.-м.н. проф. М. В. Масленникова, д.ф.-м.н. проф. В. В. Веденяпина, д.ф.-м.н. В. А. Дородницына, д.ф.-м.н. доц. Ю. Н. Орлова (2012 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приведён в конце автореферата. Из них 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК, 1 тезисы в материалах международной конференции. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав и списка литературы из 46 наименований. Общий объём диссертации — 71 страница.

Содержание работы.

Во **введении** проводится обзор работ, связанных с темой диссертации, и кратко излагается основное содержание диссертации.

В **первой главе** приводятся используемые далее обозначения, определения, вспомогательные утверждения. В частности, для любого банахова пространства V через $V^{\mathbb{C}}$ обозначается его комплексификация, т.е. $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$, через $B(V)$ — пространство линейных ограниченных по норме операторов на этом пространстве. Далее, пусть H — вещественное гильбертово сепарабельное пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, $T \in B(H)$ — самосопряжённый положительно-определённый ядерный оператор, $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — ортонормированный базис в H, состоящий из собственных векторов оператора T.

Обозначим через μ_α семейство гауссовских мер на H с нулевыми средними и корреляционными операторами T/α^2, где $\alpha > 0$. При $r > 1$ положим $U_r = \{\alpha \in \mathbb{C} : 1/r < |\alpha| < r, |\arg \alpha| < \pi/4\}$.

В монографии О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[4] даётся следующее определение интеграла Фейнмана в смысле аналитического продолжения по параметру:

Определение 1. *Функция $g\colon \mathbb{C} \times H \to \mathbb{C}$ называется интегрируемой по мере Фейнмана,если при некотором $r > 1$ существуют интегралы*

$$\int\limits_H g(\beta, x)\mu_\alpha(dx)$$

для всех $\alpha \in [1/r; r]$, $\beta \in [1/r; r]$ и непрерывная функция $\varphi\colon \overline{U_r} \times \overline{U_r} \to \mathbb{C}$, аналитическая на $U_r \times U_r$, такая, что

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int\limits_H g(\beta, x)\mu_\alpha(dx)$$

при любых $\alpha \in [1/r; r]$, $\beta \in [1/r; r]$. Величину $\varphi(\alpha, \beta)$ при комплексных α, β, называют интегралом Фейнмана от функции g и обозначают через

$$\int\limits_H g(\beta, x) \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\left(T^{-1}x, x\right)\right\} dx.$$

В диссертации приводится обобщение этого определения, а именно, определение через аналитическое продолжение интегралов по гауссовским мерам в пространстве операторов.

Пусть ν_A — семейство гауссовских мер на H с нулевыми средними и корреляционными операторами $A^{-1}T(A^*)^{-1}$, где A — обратимый оператор, лежащий в $B(H)$.

Определение 2. *Функция $g\colon B\left(H^{\mathbb{C}}\right) \times \mathbb{C} \times H \to \mathbb{C}$ называется интегрируемой по мере Фейнмана,если в некоторой непустой области $V \subset B(H) \times B(H) \times \mathbb{R}$ функция $G(A, B, \lambda) = \int\limits_H g(B, \lambda, x)\nu_A(dx)$ определена, т.е. данный интеграл существует, и обладает аналитическим продолжением в некоторую область $W \subset B\left(H^{\mathbb{C}}\right) \times B\left(H^{\mathbb{C}}\right) \times \mathbb{C}$, содержащую область V. Величину этого аналитического продолжения при комплексных A, B, λ называют интегралом Фейнмана от функции g и обозначают через*

$$\int\limits_H g(B, \lambda, x) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(T^{-1}Ax, Ax\right)\right\} dx.$$

Введём дополнительные обозначения. Предположим, что $q_{2l}\colon H \times \ldots \times H \to \mathbb{R}$ — $2l$-линейное непрерывное симметричное отображение, $l \geqslant 2$ и для произвольного $x \in H$, отличного от нуля

$$q_{2l}(x, \ldots, x) > 0.$$

Зададим функционал p формулой

$$p(x) = \left(q_{2l}(x, \ldots, x)\right)^{\frac{1}{2l}}.$$

Будем считать, что для всех $x, y \in H$

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y),$$

и найдётся такое число $s > 0$, что для любых $x_1, \ldots, x_{2l} \in H$

$$|q_{2l}(x_1, \ldots, x_{2l})| \leqslant s p(x_1) \ldots p(x_{2l}).$$

Из непрерывности q_{2l} следует, что существует константа $c > 0$, такая, что для всех $x_1, \ldots, x_{2l} \in H$

$$|q_{2l}(x_1, \ldots, x_{2l})| \leqslant c\|x_1\| \ldots \|x_{2l}\|.$$

Пусть дан произвольный оператор $R \in B(H)$. Тогда через $q_{2l}(x, \ldots, x, R\cdot)$ обозначим такой вектор из H, что для любых $y \in H$

$$(q_{2l}(x, \ldots, x, R\cdot), y) = q_{2l}(x, \ldots, x, Ry).$$

Введём пространство $F(H)$, состоящее из функций $f\colon H \to \mathbb{C}$, для каждой из которых существует аналитическое продолжение $\widetilde{f}\colon H^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, такое, что для некоторых констант $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leqslant 2l$ и всех $z \in H^{\mathbb{C}}$

$$|\widetilde{f}(z)| \leqslant C_1 \exp\left\{C_2 \|z\|^{2l-\varepsilon}\right\}.$$

При этом предполагается, что для всех $y \in H$

$$|f(y)| \leqslant C_1 \exp\left\{C_2 (p(y))^{2l-\varepsilon}\right\}.$$

Будем рассматривать вещественное гильбертово сепарабельное пространство Q, наделенное скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_q$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|_q$. Пусть $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — ортонормированный базис в этом пространстве.

Далее считаем, что $p_k\colon Q \times \ldots \times Q \to \mathbb{R}$ — k-линейная непрерывная симметричная форма, $k = 1, \ldots, 2l$. Пусть для всех ненулевых $q \in Q$

$$p_{2l}(q, \ldots, q) > 0.$$

Обозначим

$$\widehat{l}(q) = (p_{2l}(q, \ldots, q))^{\frac{1}{2l}}.$$

Предположим, что

$$\widehat{l}(q_1 + q_2) \leqslant \widehat{l}(q_1) + \widehat{l}(q_2)$$

для произвольных векторов $q_1, q_2 \in Q$ и найдутся $m_k > 0$ такие, что

$$|p_k(q_1, \ldots, q_k)| \leqslant m_k \widehat{l}(q_1) \ldots \widehat{l}(q_k) \; \forall q_1, \ldots, q_k \in Q, \; k = 1, \ldots, 2l.$$

Продолжим все полиномы p_k на комплексные аргументы по линейности. Определим функционал $v\colon Q^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ равенством

$$v(q) = \sum_{i=1}^{2l} p_i(q, \ldots, q).$$

Обозначим через $G(Q)$ пространство функций $w\colon Q \to \mathbb{C}$, для каждой из которых существует аналитическое продолжение $\widetilde{w}\colon Q^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, и при этом найдутся константы $K > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что для любых z из $Q^{\mathbb{C}}$

$$|\widetilde{w}(z)| \leqslant K \exp\left\{\varepsilon \|z\|_q{}^2\right\}.$$

Пусть $t > 0$. Положим

$$E = \{x \in C([0,t], Q) : x(t) = 0\}.$$

Выберем произвольное $0 < \delta < 1/2$ и определим пространство H_δ следующим образом. Любой элемент $x \in E$ может быть представлен в виде

$$x(\tau) = h(\tau) + e(\tau)x(0),$$

где $e(\tau) = (t - \tau)/t$. При этом

$$h(0) = h(t) = 0 \text{ и } h(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n \tau}{t}\right)$$

для некоторых $b_n \in Q$ и всех $\tau \in [0,t]$.

Пусть H_δ обозначает пространство функций $h \in C([0,t], Q)$, для каждой из которых

$$h(0) = h(t) = 0 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\delta} \|b_n\|_q{}^2 < \infty.$$

Пространство H_δ будет гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(h_1, h_2)_\delta = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\delta} \left(b_n^1, b_n^2\right)_q$$

для $h_i(\tau) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^i \sin(\pi n\tau/t)$, $i = 1, 2$. Соответствующую норму обозначим через $\|\cdot\|_\delta$. Система

$$\left\{ \frac{1}{i^\delta} \sin\left(\frac{\pi i \tau}{t}\right) f_j \right\}_{i,j=1}^{\infty}$$

образует ортонормированный базис пространства H_δ.

Доказывается следующее утверждение:

Предложение 4. *Существует $0 < \delta < 1/2$ такое, что полином*

$$\int\limits_0^t \left(\widehat{l}(h(\tau))\right)^{2l} d\tau$$

непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_\delta$.

В **второй главе** доказывается существование интеграла Фейнмана в смысле аналитического продолжения в пространстве операторов на гильбертовом пространстве от функционала экспоненциального вида с полиномом в показателе.

Пусть π_n — ортогональный проектор на пространство $H_n =< e_1, \ldots, e_n >$; I — единичный оператор в H; и, наконец, μ — гауссовская мера с нулевым средним и корреляционным оператором T. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть $f \in F(H)$; $A, C \in B(H^{\mathbb{C}})$ — обратимые операторы. Пусть существуют $B \in B(H^{\mathbb{C}})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, такие, что $AC^{-1} = \lambda I + TB$, $|\lambda| > \|T\|\|B\|$. Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A таков, что существует аналитическая кривая $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, такая, что $\varphi(\tau) \notin \sigma(A)$ для любого $\tau \in [0,1]$, $\varphi(0) = 0$ и $|\varphi(1)| > \|A\|$. Тогда существует интеграл Фейнмана*

$$\int\limits_H \widetilde{f}(Cx) \exp\left\{-(p(Cx))^{2l}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}Ax, Ax)\right\} dx, \qquad (1)$$

и существуют $S \in B(H)$ и $\omega > 1$, такие, что имеет место равенство

$$\int\limits_H \widetilde{f}(Cx) \exp\left\{-(p(Cx))^{2l}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}Ax, Ax)\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{1 + \det\left(I + \frac{1}{\lambda}TB\right)} \int\limits_H \widetilde{f}\left(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\left(p\left(CA^{-1}x-\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}Sx\right)\right)^{2l}\right\}\times$$
$$\times \exp\Bigg\{\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}(T^{-1}AC^{-1}Sx,x)-$$
$$-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4}(T^{-1}AC^{-1}Sx,AC^{-1}Sx)\Bigg\}J(x)\mu(dx), \tag{2}$$

где

$$J(x)=\lim_{n\to\infty}\det\Bigg(I-\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\pi_nAC^{-1}S_n-$$
$$-\pi_nAC^{-1}S_nx\otimes\frac{2\omega}{(p(Sx))^2}\pi_nx+\pi_nAC^{-1}S_nx\otimes$$
$$\otimes\frac{2\omega\|x\|^2}{(p(Sx))^{2l+2}}q_{2l}(Sx,Sx,\ldots,Sx,S_n\cdot)\Bigg)\ \forall x\neq 0,\ S_n=S\pi_n.$$

Основная идея доказательства теоремы 4 состоит в следующем. В интеграле (1) при вещественных операторах A и C последовательно производятся две замены:

$$x=A^{-1}y,$$
$$y=x-\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}AC^{-1}Sx.$$

В результате приходим к интегралу (2). Оператор S и константа ω подбираются так, чтобы интеграл (2) сходился в комплексной области. Значение этого интеграла при комплексных A и C будет являться величиной искомого интеграла Фейнмана.

Имеют место следующие следствия теоремы 4 — теоремы 5 – 8:

Теорема 5. *В теореме 4 условие существования аналитической кривой $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{C}$, такой, что $\varphi(\tau)\notin\sigma(A)$ для любого $\tau\in[0,1]$, $\varphi(0)=0$ и $|\varphi(1)|>\|A\|$ можно заменить условием существования луча в комплексной плоскости, имеющего начало в нуле и не содержащего точек спектра оператора A.*

Частным случаем теоремы 4 является теорема о существовании интегралов Фейнмана в смысле аналитического продолжения по параметру, доказанная в статье О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[13]:

Теорема 6. *Если $f_1 \in F(H)$, то, каковы бы ни были ν, $\kappa \in \mathbb{C}$, $\nu \neq 0$, $\kappa \neq 0$, $Re\,\nu \geqslant 0$, $Re\,\kappa \geqslant 0$, существует интеграл Фейнмана*

$$\int\limits_H f_1(x)\exp\left\{-\nu(p(x))^{2l}\right\}\exp\left\{-\frac{\kappa}{2}\left(T^{-1}x,x\right)\right\}dx,$$

и для некоторой последовательности положительных чисел γ_n справедливо равенство

$$\int\limits_H f_1(x)\exp\left\{-\nu(p(x))^{2l}\right\}\exp\left\{-\frac{\kappa}{2}\left(T^{-1}x,x\right)\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_H \widetilde{f}_1\left(\sigma x - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}Sx\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\nu\left(p\left(\sigma x - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}Sx\right)\right)^{2l}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\omega}{\sigma}\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\left(T^{-1}Sx,x\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\kappa\omega^2}{2}\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4}\left(T^{-1}Sx,Sx\right)\right\}\widehat{J}\left(\frac{\omega}{\sigma},x\right)\mu(dx),$$

$$\text{где } \sigma = \kappa^{-\frac{1}{2}},\ \omega = 2^{4l}(|\nu|+|\kappa|+1)\left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{-\frac{1}{2l}},\ S \in B(H),$$

$$Se_n = \gamma_n e_n,\ \widehat{J}\left(\widehat{t},x\right) = \lim_{n\to\infty}\det\left(I - \widehat{t}\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}S_n - \right.$$

$$-S_n x\otimes\frac{2\widehat{t}}{(p(Sx))^2}\pi_n x + S_n x\otimes$$

$$\left.\otimes\frac{2\widehat{t}\|x\|^2}{(p(Sx))^{2l+2}}q_{2l}(Sx,Sx,\ldots,Sx,S_n\cdot)\right)\ \forall x\neq 0,\ S_n = S\pi_n.$$

Пусть $\widehat{T} \in B(Q)$ — самосопряжённый положительно-определённый ядерный оператор, I_q — единичный оператор в Q.

Теорема 7. *Пусть вектор $q \in Q$ и константа $t > 0$ фиксированы; $A, C \in B(Q^{\mathbb{C}})$ — обратимые операторы, при этом существуют*

$B \in B(Q^{\mathbb{C}})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, такие, что $AC^{-1} = \lambda I_q + \widehat{T}B$, $|\lambda| > \|\widehat{T}\|\|B\|$; в комплексной плоскости существует луч с началом в нуле, не содержащий точек спектра оператора A; $q_0 \in Q$ — произвольный вектор, $\psi_1 \in \mathbb{C}$, $\psi_2 \in \mathbb{C}$, $\psi_3 \in \mathbb{C}$, $\psi_4 \in \mathbb{C}$ — произвольные константы, а $u_1\colon E \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, определяемая формулой

$$u_1(x(\tau)) = \exp\left\{-\int_0^t v(C(q+x(\tau)))d\tau\right\}\times$$

$$\times\left[\psi_1 + \psi_2\int_0^t v'(C(q+x(\tau)))q_0 d\tau +\right.$$

$$+\psi_3\int_0^t v''(C(q+x(\tau)))(q_0,q_0)d\tau +$$

$$\left.+\psi_4\left(\int_0^t v'(C(q+x(\tau)))q_0 d\tau\right)^2\right];$$

$u_2\colon Q^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, $u_2 \in G(Q)$. Тогда существует интеграл Фейнмана

$$\int_E u_1(Cx)u_2(C(x(0)))\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\widehat{T}^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau)\right)_q d\tau\right\}dx.$$

Доказательство теоремы 7 опирается на предложение 4 главы 1.

Теорема 8. *Теорема 7 верна в случае, когда пространство Q конечномерно.*

В **третьей главе** на основе результатов второй главы доказывается существование решений для класса эволюционных уравнений типа Шрёдингера с полиномиальными потенциалами и строятся представления этих решений в виде фейнмановских интегралов.

Для произвольного обратимого оператора $A \in B(Q^{\mathbb{C}})$ и функции $u\colon [0,+\infty)\times Q \to \mathbb{C}$ положим

$$\Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}}u(t,q) = \sum_{i,j=1}^{\infty}(A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}f_i, f_j)\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}u(t,q).$$

Для произвольных обратимых операторов $A, C \in B(Q^{\mathbb{C}})$ эволюционное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,q) = \frac{1}{2}\Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}}u(t,q) - v(Cq)u(t,q) \tag{3}$$

и начальное условие

$$u(0,q) = u_0(Cq) \tag{4}$$

определяют задачу Коши для данного уравнения. Решением поставленной задачи назовём функцию $u\colon [0,+\infty)\times Q \to \mathbb{C}$, дифференцируемую по t для любых $t \in (0,+\infty), q \in Q$, непрерывную по совокупности переменных на $[0,+\infty)\times Q$, для которой определено выражение $\Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}}u(t,q)$ при всех $t \in (0,+\infty)$, $q \in Q$.

Имеет место следующая теорема о свойствах решения задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера:

Теорема 9. *Если $u_0 \in G(Q)$; $A, C \in B(Q^{\mathbb{C}})$ — обратимые операторы, $AC^{-1} = \lambda I_q + \widehat{T}B$ для некоторых $B \in B(Q^{\mathbb{C}})$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, таких, что $|\lambda| > \|\widehat{T}\|\|B\|$; в комплексной плоскости существует луч с началом в нуле, не содержащий точек спектра оператора A, то задача Коши* (3), (4) *имеет решение, представимое интегралом Фейнмана,*

$$u(t,q) = \int\limits_E \exp\left\{-\int\limits_0^t v(C(q+x(\tau)))d\tau\right\} u_0(C(x(0)+q))\times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\widehat{T}^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau)\right)_q d\tau\right\} dx.$$

Далее в диссертации приводятся доказательство теоремы 9 и следующие следствия из неё (второе из этих утверждений было доказано в статье О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[13]):

Теорема 10. *Теорема 9 верна в случае, когда пространство Q конечномерно.*

Теорема 11. *Для любых $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \neq 0$, $Re\,\kappa \geqslant 0$, и $u_0 \in G(Q)$ существует решение „u“ задачи Коши*

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,q) = \frac{\kappa}{2}\Delta_{\widehat{T}}u(t,q) - \kappa v(q)u(t,q), \tag{5}$$
$$u(0,q) = u_0(q),$$

такое, что

$$u(t,q) = \int\limits_E \exp\left\{-\kappa \int\limits_0^t v(q+x(\tau))d\tau\right\} u_0(x(0)+q)\times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{\kappa}{2}\int\limits_0^t \left(\widehat{T}^{-1}x'(\tau), x'(\tau)\right)_q d\tau\right\} dx.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Евгению Тенгизовичу Шавгулидзе за постановку задач, за помощь и поддержку на протяжении всей научно-исследовательской деятельности.

Работы автора по теме диссертации

[1] А. К. Кравцева, *Формулы Фейнмана для решений уравнений типа Шредингера с полиномиальными потенциалами четвертого порядка*, Компьютерные исследования и моделирование, 2012, **4**, № 3, с. 497–507.

[2] А. К. Кравцева, *Фейнмановские интегралы от функционалов экспоненциального вида с полиномиальным показателем*, Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика, механика, 2012, № 6, с. 35–38.

[3] А. К. Кравцева, *Фейнмановские интегралы для функций, имеющих экспоненциальный рост с полиномиальным показателем*, Материалы 12-ой Международной междисциплинарной научно-практической школы-конференции, Евпатория, 2012, с. 116–117.