Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи
УДК 512.64

Федотов Станислав Николаевич

Полуинварианты и пространства модулей представлений колчанов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Аржанцев Иван Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Зубков Александр Николаевич (ФГБОУ ВПО "Омский государственный университет им. Ф.М.Достоевского")
	кандидат физико-математических наук Шмелькин Дмитрий Альфредович (ООО "Техкомпания Хуавэй", старший инженер)
Ведущая организация:	Омский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита диссертации состоится 5 апреля 2013 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 5 марта 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению представлений, полуинвариантов и пространств модулей представлений колчанов методами геометрической теории инвариантов.

Колчаны предоставляют удобную интерпретацию многих классических задач линейной алгебры. Рассмотрим, к примеру, колчан $L_{q,k}$ с двумя вершинами, q петлями в первой вершине и k стрелками, ведущими из первой вершины во вторую. Нетрудно видеть, что задача классификации представлений этого колчана с вектором размерностей $(m, 1)$ равносильна задаче о классификации наборов из q линейных операторов и k линейных функций на m-мерном векторном пространстве.

Поскольку проблема классификации представлений колчана Q с вектором размерности α сводится к изучению действия редуктивной группы $\mathrm{GL}(\alpha)$ на аффинном пространстве $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$, в её рамках находят применение различные методы теории инвариантов. В первую очередь для этого нужно уметь находить инварианты действия $\mathrm{GL}(\alpha)$ на $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$. Важные результаты были получены К. Прочези[1] и Ю.П. Размысловым[2], которые описали соответственно порождающие алгебры инвариантов для действия группы GL_n на наборах операторов в n-мерном векторном пространстве и соотношения между ними. Для произвольного колчана и алгебраически замкнутого поля порождающие алгебры инвариантов были описаны Л. Ле Брюном и К. Прочези[3]; тем не менее, их результат известен как теорема Прочези-Размыслова. Её обобщения для произвольных бесконечных полей были получены С. Донкиным[4] и А.Н. Зубковым[5].

Точки категорного фактора $\mathcal{M}(Q, \alpha) := \mathrm{Rep}(Q, \alpha) /\!\!/ \mathrm{GL}(\alpha)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с замкнутыми $\mathrm{GL}(\alpha)$-орбитами. Нетрудно показать, что это в точности орбиты полупростых представлений колчана Q с вектором размерности α. Более того, единственной замкнутой орбитой в замыкании орбиты представления колчана является орби-

[1] C. Procesi, *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, Adv. Math., 19, 1976, 306-381

[2] Ю. П. Размыслов, *Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 38:4, 1974, 723-756

[3] L. Le Bruyn, C. Procesi, *Semisimple representations of quivers*, Trans. Amer. Math. Soc., 317, 1990, no. 2, 585-598

[4] S. Donkin, *Polynomial invariants of representations of quivers*, Comment. Math. Helv., 69, 1994, no.1, 137-141

[5] А. Н. Зубков, *Теорема Размыслова–Прочези для представлений колчанов*, Фундам. прикл. матем., 7:2, 2001, 387–421

та прямой суммы композиционных факторов его фильтрации Жордана-Гёльдера.

Из теоремы Прочези-Размыслова следует, что для колчанов без ориентированных циклов непостоянных инвариантов нет, то есть категорный фактор есть точка. С другой стороны, можно непосредственно убедиться, что у такого колчана имеется лишь одно α-мерное полупростое представление, в котором все отображения вдоль стрелок нулевые. С увеличением числа ориентированных циклов число порождающих алгебры инвариантов и соотношений между ними растёт очень быстро, так что уже для колчанов $L_{2,k}$ чрезвычайной сложно использовать категорный фактор как средство классификации.

Это заставляет искать другие, более эффективные способы классификации орбит. Одним из них является переход к открытому подмножеству, на котором алгебра инвариантов будет богаче. Другим — рассмотрение расширенного пространства представлений, когда удаётся добиться большей точности за счёт добавления новой информации. Ярким представителем первого подхода является конструкция А.Д. Кинга; второй же вырос в теорию оснащённых представлений.

Конструкция Кинга является частным случаем конструкции Мамфорда из геометрической теории инвариантов. Её идея состоит в том, чтобы рассмотреть тривиальное линейное расслоение над $\mathrm{Rep}(Q,\alpha)$, подкрученное на характер χ группы $GL(\alpha)$, а затем ограничиться рассмотрением открытого подмножества в $\mathrm{Rep}(Q,\alpha)$, состоящего из χ-полустабильных представлений. Кинг показал, что это понятие (полу-)стабильности может быть переформулировано на языке характеров абелевых категорий и обосновал существование грубого многообразия модулей для полустабильных представлений. Его подход был обобщён и переформулирован А.Н. Рудаковым[6], вместо характеров абелевых категорий использовавшим наклоны.

Для того, чтобы применять конструкцию Кинга, необходимо уметь вычислять полуинварианты представлений весов, кратных данному. Эта задача является частным случаем более общей проблемы, связанной с нахождением алгебры полуинвариантов. На данный момент для неё нет аналога теоремы Прочези-Размыслова. Имеются лишь описания порождающих алгебры $\Bbbk[\mathrm{Rep}(Q,\alpha)]^{SL(\alpha)}$ как векторного пространства, предложенные в работах Х. Дерксена и Дж. Веймана[7], М. Домокоса и А.Н. Зубкова[8], а также

[6]A. Rudakov, *Stability for an abelian category*, J. Algebra, 197, 1997, no. 1, 231-245

[7]H. Derksen, J. Weyman *Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood-Richardson coefficients*, J. Amer. Math. Soc., 13, 2000, no. 3, 467-479

[8]M. Domokos, A.N. Zubkov, *Semi-invariants of quivers as determinants*, Transformation Groups,

М. Ван дер Берга и А. Схофилда[9].

Оснащённые представление впервые появились в работе Х. Накаджимы[10] в качестве одного из шагов в построении многообразий Накаджимы. Пусть Q — некоторый колчан и α — вектор размерности. Зафиксируем дополнительный вектор размерности ζ и рассмотрим расширенное пространство представлений $\mathrm{Rep}(Q,\alpha,\zeta) := \mathrm{Rep}(Q,\alpha) \oplus \bigoplus_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\alpha_i}, \Bbbk^{\zeta_i})$. Элементы $\mathrm{Rep}(Q,\alpha,\zeta)$ называются оснащёнными представлениями колчана Q. Если дополнительно зафиксировать набор $\Bbbk$-векторных пространств V_i размерностей $\dim V_i = \zeta_i$, то элементы $\mathrm{Rep}(Q,\alpha,\zeta)$ можно понимать как пары (M,f), где M — представление колчана Q с вектором размерностей α, а $f = (f_i : M_i \to V_i)_{i\in Q_0}$ — набор линейных отображений (который также можно рассматривать как отображение Q_0-градуированных векторных пространств). Условие стабильности оснащённых представлений изначально было сформулировано на языке теории представлений: пара (M,f) стабильна, если никакое собственное ненулевое подпредставление $N \subseteq M$ не лежит в ядре f. Однако легко показать, что оно равносильно стабильности относительно некоторого наклона. Из этого сразу следует, что для множества стабильных оснащённых представлений существует геометрический фактор. Более того, если колчан не содержит ориентированных циклов, то факторпространство является проективным многообразием. Для колчанов без ориентированных циклов М. Райнеке удалось[11] реализовать пространство модулей оснащённых представлений как грассманиан подпредставлений в некотором инъективном представлении.

Й. Энгель и М. Райнеке предложили также другой подход к изучению пространств модулей оснащённых представлений колчанов[12]. Напомним, что, будучи фактором Мамфорда, они допускают расслоение над стандартным категорным фактором. Если Q — колчан без ориентированных циклов, то категорный фактор будет точкой для любого вектора размерностей. В противном случае геометрию многообразия модулей можно изучать, рассматривая отдельные слои отображения указанной выше проекции. Й. Энгель и М. Райнеке показали, что они могут быть охарактеризованы как

6, 2001, no. 1, 9-24

[9]A. Schofield, M. Van den Bergh, *Semi-invariants of quivers for arbitrary dimension vectors*, Indag. Math. (N.S.) 12, 2001, 125-138

[10]H. Nakajima, *Varieties associated with quivers*, in: Representation Theory of Algebras and Related Topics, Mexico City, 1994, in: CMS Conf. Proc., vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 139-157

[11]M. Reineke, *Framed quiver moduli, cohomology, and quantum groups*, J. Algebra, 320, 2008, no. 1, 94-115

[12]J. Engel, M. Reineke, *Smooth models of quiver modui*, Math. Z., 262, 2009, 817-848

нуль-слои аналогичной проекции для другого колчана и другой пары векторов размерностей.

Цель работы

Изучение представлений колчанов, их полуинвариантов и пространств модулей. Перед автором стояли следующие задачи:

- изучить структуру алгебры полуинвариантов представлений колчана с вектором размерности $(2, \ldots, 2)$;
- построить явную реализацию пространств модулей стабильных оснащённых представлений колчанов и конечномерных ассоциативных алгебр;
- получить явную классификацию стабильных оснащённых представлений колчанов.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Описана конечная система порождающих для алгебры полуинвариантов представлений колчанов с вектором размерностей $(2,\ldots,2)$.
- Построены явные реализации для пространств модулей стабильных оснащённых представлений конечномерных ассоциативных алгебр, а также для слоев проекции пространств модулей стабильных оснащённых представлений колчана на стандартный категорный фактор. Показано, что все они изоморфны грассманианам подмодулей в инъективных модулях над некоторыми конечномерными алгебрами. Для колчанов специального вида установлено, что эта алгебра может быть выбрана наследственной.
- В задаче классификации стабильных оснащенных представлений колчанов построен конечный набор нормальных форм.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории алгебраических групп преобразований и теории инвариантов, алгебраической геометрии, а также теории представлений колчанов и конечномерных ассоциативных алгебр.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам в теории инвариантов и теории представлений колчанов и конечномерных ассоциативных алгебр.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

(1) Семинар кафедры высшей алгебры МГУ им. М. В. Ломоносова «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством Э.Б. Винберга и А.Л. Онищика (2009);

(2) Совместный алгебраический семинар Киевского государственного университета и Московского государственного университета (Киев, Украина, 2009);

(3) Алгебраический семинар института математики национальной академии наук Украины (Киев, Украина, 2010);

(4) Семинар отдела алгебры и теории чисел Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (2010);

(5) "Algebraische Geometrie" под руководством Х. Фленнера в Рурском университете (Бохум, Германия, 2010);

(6) "Darstellungstheorie" под руководством К. Бонгартца и М. Райнеке в Университете Вупперталя (Вупперталь, Германия, 2010)

(7) Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова (2012);

а также на конференциях

(1) Летняя школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Самара, 2009);

(2) Вторая школа конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, 2011);

(3) Третья школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Тольятти, 2012);

(4) Международная конференция по представлениям алгебр "ICRA-2012" (Билефельд, Германия, 2012).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в трёх работах, список которых приводится в конце автореферата [1 - 3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 4 глав. Общий объём диссертации составляет 105 страниц. Список литературы содержит 33 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации изложена краткая история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Также описана структура и краткое содержание диссертации.

Первая глава

Первая глава посвящена изучению полуинвариантов 2-представлений колчанов, то есть представлений с вектором размерности $(2, 2, \ldots, 2)$. Основным результатом является описание порождающих алгебры полуинвариантов в духе теоремы Прочези-Размыслова.

В первом разделе напоминаются результаты, полученные М. Домокосом и А.Н. Зубковым[8].

Пусть $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$. Зафиксируем вектор размерности α и два таких набора $\bar{\imath} = (i_1, \ldots, i_k)$ и $\bar{\jmath} = (j_1, \ldots, j_l)$ чисел от 1 до n (возможно, повторяющихся), что $(\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}) = (\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_l})$ и рассмотрим всевозможные матрицы размера $(\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}) \times (\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_l})$ вида

$$A_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \quad := \quad \begin{array}{c} \\ j_1 \\ \vdots \\ j_r \\ \vdots \\ j_l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} i_1 & \ldots & i_s & \ldots & i_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} y_{11}F_{11} & \ldots & y_{1s}F_{1s} & \ldots & y_{1k}F_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{r1}F_{r1} & \ldots & y_{rs}F_{rs} & \ldots & y_{rk}F_{rk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{l1}F_{k1} & \ldots & y_{ks}F_{ls} & \ldots & y_{lk}F_{lk} \end{pmatrix} \end{array},$$

где y_{rs} — формальные переменные, а в качестве матрицы F_{rs} можно подставлять либо 0, либо матрицу какого-либо отображения, идущего из вершины i_s в вершину j_r, либо единичную матрицу, если $i_s = j_r$. Для конкретного представления (W, φ) матрица вида $A_{\overline{\imath}\overline{\jmath}}$ задает отображение из $W_{i_1} \oplus \ldots \oplus W_{i_k}$ в $W_{j_1} \oplus \ldots \oplus W_{j_k}$; кроме того, ее определитель будет многочленом относительно переменных y_{rs} с $SL(\alpha)$-инвариантыми коэффициентами: $|A_{\overline{\imath}\overline{\jmath}}| = \sum_{\overline{\mu}} y^{\overline{\mu}} h_{\overline{\mu}}(x^{rs}_{pq})$, где $\overline{\mu} = (\mu_{ij})^{k,l}_{i,j=1}$ — мультистепени, а x^{rs}_{pq} — матричные элементы матриц F_{rs}.

Теорема. *Алгебра $\Bbbk[\mathrm{Rep}(Q, \alpha)]^{SL(\alpha)}$ как линейное пространство порождена полуинвариантами вида $h_{\overline{\mu}}(x^{rs}_{pq})$.*

Таким образом, изучение полуинвариантов 2-представлений колчанов сводится к изучению определителей 2-блочных матриц.

Матрицей, *присоединенной* к данной квадратной матрице A, будем называть матрицу $\widehat{A}$, составленную из алгебраических дополнений к элементам A^T. Удобно считать, что матрица, присоединенная к матрице линейного отображения $F : U \to V$, определяет линейное отображение из V в U. Рассмотрим произвольный колчан Q. Пусть $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ и $Q_1 = \{a_1, \ldots, a_s\}$. Колчану Q сопоставим колчан $\widetilde{Q}$, в котором $\widetilde{Q}_0 = Q_0$ и $\widetilde{Q}_1 = \{a_1, \ldots, a_s\} \cup \{b_1, \ldots, b_s\}$, причем $hb_i = ta_i$, $tb_i = ha_i$. Представлением колчана $\widetilde{Q}$, *ассоциированным* с представлением (W, φ) колчана Q, назовем представление с теми же пространствами W_v и отображениями φ_{a_i} и $\varphi_{b_i} = \widehat{\varphi}_{a_i}$. *Маршрутом* в колчане Q назовем ориентированный цикл в колчане $\widetilde{Q}$. К примеру, любой ориентированный цикл в Q — это маршрут. Назовем маршрут *простым*, если в отвечающем ему ориентированном цикле ни одно ребро не повторяется дважды. *След маршрута* — это след композиции линейных отображений, идущих по стрелкам соответствующего цикла в колчане $\widetilde{Q}$ в ассоциированном представлении.

Второй и третий разделы посвящены доказательству того, что определители матриц вида $A_{\overline{\imath}\overline{\jmath}}$ выражаются как многочлены от следов простых маршрутов в колчане. Более точно, доказывается следующий результат. Рассмотрим колчан R_k с k вершинами, каждые две из которых соединены ровно одной стрелкой. В диссертации строится семейство $\mathcal{P}_k$ наборов маршрутов в колчане R_k, для которого верно следующее утверждение.

Утверждение 1.3. *Для 2-блочной матрицы*

$$Z = (X_{rs})^k_{r,s=1} \in \mathrm{Mat}_{2k \times 2k}(\Bbbk)$$

имеет место равенство

$$|Z| = \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_k} \prod_{P \in \mathcal{P}} (-1)^{\frac{1}{2} l(P) - 1} 2^{-\nu(P)} \operatorname{tr} P,$$

где $l(P)$ — количество элементов набора P, а

$$\nu(P) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } P \text{ \textit{имеет вид} } (\widehat{X}_{ij}, X_{ij}) \text{ \textit{или} } (X_{ij}, \widehat{X}_{ij}), \\ 0, & \text{\textit{в противном случае.}} \end{cases}$$

Наконец, четвёртый раздел посвящён доказательству основного результата главы.

Теорема 1.5. *Для произвольного колчана Q и вектора размерности $\alpha = (2, 2, \ldots, 2)$ алгебра полуинвариантов $\Bbbk[\mathrm{Rep}(Q, \alpha)]^{SL(\alpha)}$ порождена следами простых маршрутов.*

Кроме того, приводятся некоторые дополнительные соображения, позволяющие во многих случаях уменьшить число порождающих, и показано, что для векторов размерностей с компонентами, большими 2, теорема 1.5 неверна.

Вторая глава

Во второй главе мы переходим к изучению пространств модулей оснащённых представлений колчанов и конечномерных ассоциативных алгебр с единицей. Основной целью является построение явной реализации пространства модулей оснащённых представлений конечномерной алгебры. Полученные результаты используются для описания слоёв проекции пространства модулей оснащённых представлений колчана на стандартный категорный фактор над алгебраически замкнутым полем.

Первый раздел второй главы вводный. Мы напоминаем основные факты, касающиеся связи между представлениями колчанов и конечномерных алгебр. Хорошо известно, что всякая конечномерная алгебра A, фактор которой по радикалу Джекобсона изоморфен прямому произведению нескольких экземпляров основного поля, изоморфна факторалгебре $\Bbbk Q/J$ алгебры путей некоторого колчана Q по допустимому идеалу $J \lhd \Bbbk Q$. Условие допустимости можно сформулировать следующим образом: идеал J порождён линейными комбинациями путей длины не меньше 2 и содержит все пути длины больше t для некоторого $t \gg 2$. При этом колчан Q однозначно определяется по исходной алгебре. Таким образом, левые модули над алгеброй A можно рассматривать как представления колчана Q, удовлетворяющие *соотношениям* из идеала J. Это позволяет рассматривать многообразие представлений алгебры A с вектором размерностей α как замкнутое по Зарисскому подмногообразие $\underline{\mathrm{Rep}}(A, \alpha)$ в пространстве представлений $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ колчана Q.

Во втором разделе вводится понятие оснащённого представление конечномерной алгебры.

Пусть ζ — дополнительный вектор размерности. Зафиксируем набор векторных пространств $V = (V_i)_{i \in Q_0}$ размерностей ζ_i. Мы можем определить многообразие $\underline{\mathrm{Rep}}(A, \alpha, \zeta)$ оснащённых представлений алгебры A как подмножество

$$\underline{\mathrm{Rep}}(A, \alpha) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\alpha_i}, \Bbbk^{\zeta_i}) \subseteq$$

$$\subseteq \mathrm{Rep}(Q, \alpha) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\alpha_i}, \Bbbk^{\zeta_i}) =: \mathrm{Rep}(Q, \alpha, \zeta).$$

Элементы этого множества мы будем понимать как пары (M, f), где M — α-мерное представление алгебры A, а $f = (f_i : M_i \to V_i)$ — набор линейных отображений.

Далее, пару (M, f) назовём *стабильной*, если никакой собственный ненулевой A-подмодуль $N \subseteq N$ не лежит в $\ker f$. Нетрудно показать, что множество $\underline{\mathrm{Rep}}^s(A, \alpha, \zeta)$ стабильных оснащённых представлений алгебры A допускает геометрический фактор

$$\underline{\mathrm{Rep}}^s(A, \alpha, \zeta) \to \mathcal{M}^s(A, \alpha, \zeta),$$

причём факторпространство является проективным многообразием.

В третьем разделе исследуется пространство модулей стабильных оснащённых представлений конечномерной алгебры и строится его явная реализация.

Легко видеть, что в $A \cong \Bbbk Q/J$ можно выбрать (конечный) базис Ξ, состоящий из образов путей в колчане. Обозначим через I_i инъективный A-модуль, соответствующий i-ой вершине колчана. Далее, рассмотрим инъективный модуль $J := \bigoplus_{i \in Q_0} I_i \otimes_{\Bbbk} V_i$. Как векторное пространство над $\Bbbk$ компонента J_i изоморфна

$$J_i \cong \bigoplus_{\Xi \ni \overline{\tau} : i \rightsquigarrow j} V_j.$$

Для каждой пары $(M, f) \in \underline{\mathrm{Rep}}(A, \alpha, \zeta)$ определим отображение $\Phi_{(M,f)} = (\varphi_i)_{i \in Q_0} : M \to J$ следующим образом:

$$\varphi_i = \bigoplus_{\Xi \ni \overline{\tau} : i \rightsquigarrow j} f_j \overline{\tau} : M_i \to \bigoplus_{\Xi \ni \overline{\tau} : i \rightsquigarrow j} V_j$$

Здесь мы рассматриваем $\overline{\tau}$ как элемент алгебры A, т.е. считаем, что $\overline{\tau}(m) = \overline{\tau} \cdot m$. Мы доказываем (следствие 2.4), что пара (M, f) стабильна тогда и только тогда, когда отображение $\Phi_{(M,f)}$ инъективно.

Следующая теорема является обобщением результата М. Райнеке[11].

Теорема 2.5. *Для конечномерной алгебры A и пары векторов размерностей α и ζ отображение $\Phi : (M, f) \mapsto \Phi_{(M,f)}$ индуцирует изоморфизм алгебраических многообразий*

$$\mathcal{M}^s(A, \alpha, \zeta) \cong \mathrm{Gr}^A_\alpha(J),$$

где $\mathrm{Gr}^A_\alpha(J)$ — грассманиан α-мерных A-подмодулей модуля J.

Вместе с результатом Й. Энгеля и М. Райнеке[12], это даёт следующее

Следствие 2.13. *Пусть $\Bbbk = \mathbb{C}$. Тогда для каждой точки $y \in \mathrm{Rep}(Q, \alpha)/\!\!/GL(\alpha)$ найдётся конечномерная алгебра A, инъективный A-модуль J и вектор размерности $\beta \in \mathbb{Z}^{Q(A)_0}$, для которых $\pi_s^{-1}(y) \cong \mathrm{Gr}^A_\beta(J)$.*

Третья глава

Третья глава посвящена изучению слоёв морфизма факторизации

$$\pi_s : \mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta) \to \mathcal{M}(Q, \alpha)$$

для колчанов с ориентированными циклами специального вида над произвольным бесконечным полем.

В первом разделе описывается обобщённая версия конструкции Райнеке.

Пусть Q — колчан с n вершинами, а α и ζ — два вектора размерностей. Как обычно, для каждой вершины $i \in Q_0$ обозначим через I_i следующее представление колчана Q. Положим

$$(I_i)_j = (\mathrm{span}\,\{\tau \mid \tau : j \rightsquigarrow i \text{ — путь в } Q\})^*,$$

где "$\tau : j \rightsquigarrow i$" означает, что путь τ начинается в j-й вершине и заканчивается в i-й, а $(\cdot)^*$ обозначает переход к двойственному векторному пространству. Далее, для стрелки $a : k \to l$ определим $((I_i)_a f)(\tau) = f(\tau a)$, где $\tau : l \rightsquigarrow i$, $f \in (I_i)_k$. Это можно переписать в более удобном виде с помощью элементов $(I_i)_j$, двойственных к путям. А именно, каждому пути $\tau : j \rightsquigarrow i$ в колчане Q сопоставим такой элемент τ^* пространства $(I_i)_j$, что для каждого $\sigma : j \rightsquigarrow i$ имеем

$$\tau^*(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau = \sigma, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что элементы $(I_i)_j$ могут быть записаны как (возможно, бесконечные) формальные линейные комбинации τ^* по всем $\tau : i \rightsquigarrow j$. В этих обозначениях отображения $(I_i)_a$, $a \in Q_1$, принимают следующий вид:

$$(I_i)_a(\tau^*) = \begin{cases} \lambda^*, & \text{если } \tau = \lambda a, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим представление $J := \bigoplus_{i \in Q_0} I_i \otimes_{\Bbbk} V_i$. Как векторное пространство над $\Bbbk$

$$J_i = e_i J \cong \prod_{\tau : i \rightsquigarrow j} V_j^{(\tau)}.$$

Теперь для каждой пары $(M, f) \in \mathrm{Rep}(Q, \alpha, \zeta)$ определим отображение $\Phi_{(M,f)} = (\varphi_i)_{i \in Q_0} : M \to J$ следующим образом:

$$\varphi_i = \prod_{\tau : i \rightsquigarrow j} f_j \tau : M_i \to \prod_{\tau : i \rightsquigarrow j} V_j^{(\tau)},$$

где $\tau(x) := M_{a_1} \dots M_{a_k}(x)$ для $x \in M_i$ и $\tau = a_1 \dots a_k$. При этом, как и в конечномерной ситуации, пара (M, f) стабильна тогда и только тогда, когда отображение $\Phi_{(M,f)}$ инъективно.

Во втором и третьем разделах строится явная реализация слоёв π_s для циклического колчана типа $\widetilde{A}_{n-1}$. Четвёртый раздел посвящён обобщению этого результата на более широкий класс колчанов с ориентированными циклами.

Назовём колчан Q *колчаном с последовательными циклами*, если любые два ориентированных цикла в Q, имеющие общую вершину, являются степенями одного и того же цикла. Иными словами, такой колчан может быть получен из некоторого колчана $\widehat{Q}$ без ориентированных циклов заменой части вершин на ориентированные циклы. Основным результатом третьей главы является следующая теорема.

Теорема 3.16. *Пусть Q — колчан с последовательными циклами. Пусть также α и ζ — два вектора размерности, а y — точка в $\operatorname{Spec} \Bbbk[\mathrm{Rep}(Q, \alpha, \zeta)]^{\mathrm{GL}(\alpha)}$. Тогда найдётся колчан $Q^{\spadesuit}$, вектор размерности $\widetilde{\alpha} \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^{Q_0^{\spadesuit}}$ и конечномерное представление $W^{\spadesuit}$ колчана $Q^{\spadesuit}$, для которого $\pi^{-1}(y) /\!\!/ GL(\alpha) \cong \mathrm{Gr}_{\widetilde{\alpha}}^{\Bbbk Q^{\spadesuit}}(W^{\spadesuit})$.*

Представленный подход, в отличие от подхода Й. Энгеля и М. Райнеке, работает лишь для ограниченного класса колчанов, но для любого бесконечного поля $\Bbbk$. Отметим, что результаты Й. Энгеля и М. Райнеке не могут быть обобщены на случай алгебраически незамкнутого поля (контрпример для $\Bbbk = \mathbb{R}$ приведён в разделе 3.3).

Четвёртая глава

В четвертой главе рассматривается наиболее общая ситуация. Поскольку не представляется возможным предъявить полный список полупростых представлений произвольного колчана, а используемая в третьей главе техника существенным образом использует данные об этом представлении, описать слои проекции π_s удаётся только для колчанов с последовательными циклами. Тем не менее, возможно построить явное вложение фактора.

Наша конструкция основывается на следующем соображении. Каков бы ни был колчан Q, по каждому стабильному оснащённому представлению $(M, f) \in \mathrm{Rep}(Q, \alpha, \zeta)$ отвечает вложение $\Phi_{(M,f)} : M \hookrightarrow J$ в некоторое представление J колчана Q, зависящее только от вектора размерности ζ. Если в колчане Q есть ориентированные циклы, представление J может быть бесконечномерным, и, соответственно, морфизм $\Phi_{(M,f)}$ запишется матрицами с бесконечным числом строк. При этом исходная пара (M, f) может быть восстановлена по композиции морфизма $\Phi_{(M,f)}$ и проекции J на некоторое его конечномерное Q_0-градуированное подпространство $\widehat{J}$. Структуры представления оно уже не несёт, но это позволяет нам реализовать пространство модулей $\mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta)$ как локально замкнутое подмногообразие в произведении грассманианов. С помощью дальнейшей редукции можно получить и более экономное вложение $\mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta)$ в проективное пространство.

Основным инструментом здесь становятся *J-скелеты оснащённых представлений*. Это понятие является упрощённой версией понятия скелета модуля. Назовём *абстрактным J-скелетом* набор путей $\mathfrak{S}$ в колчане Q^ζ с концом в вершине ∞, удовлетворяющий следующему условию: если $\tau a \in \mathfrak{S}$ для некоторого пути $\tau \neq e_\infty$ и стрелки $a \in Q_1$, то $\tau \in \mathfrak{S}$. Для $i \in Q_0$ обозначим $\mathfrak{S}_i := \{\tau \in \mathfrak{S} \mid \ t(\tau) = i\}$. Кроме того, положим $\underline{\dim}\mathfrak{S} := (|\mathfrak{S}_1|, \ldots, |\mathfrak{S}_n|)$ (где $n = |Q_0|$). Пусть теперь $(M, f) \in \mathrm{Rep}(Q, \alpha, \zeta)$ — оснащённое представление, а $\mathfrak{S}$ — абстрактный J-скелет. Если в путь $\tau \in \mathfrak{S}$ подставить матрицы отображений f_i, $i \in Q_0$, и M_a, $a \in Q_1$, то мы получим строку m_τ. Будем говорить, что $\mathfrak{S}$ является *J-скелетом пары* (M, f), если $\underline{\dim}\mathfrak{S} = \alpha$ и для каждого $i \in Q_0$ ранг набора векторов $\{m_\tau \mid \tau \in \mathfrak{S}_i\} \subseteq \Bbbk^{\alpha_i}$ равен α_i.

Результаты четвертой главы объединены в следующей теореме.

Теорема 4.8. *Во введённых выше обозначениях*

(1) имеем

$$\mathrm{Rep}^s(Q,\alpha,\zeta) = \bigcup_{\substack{\mathfrak{S}\ -\ J\text{-скелет} \\ \underline{\dim}\mathfrak{S}=\alpha}} X(\mathfrak{S}),$$

где $X(\mathfrak{S})$ — открытые по Зарисскому подмножества в $\mathrm{Rep}^s(Q,\alpha,\zeta)$, причём $X(\mathfrak{S}) \cong \mathrm{GL}(\alpha)\times\mathbb{A}^N$ для некоторого натурального N, а ограничение на $X(\mathfrak{S})$ морфизма факторизации есть проекция на второй сомножитель. В частности,

$$\mathcal{M}^s(Q,\alpha,\zeta) = \bigcup_{\substack{\mathfrak{S}\ -\ J\text{-скелет} \\ \underline{\dim}\mathfrak{S}=\alpha}} X(\mathfrak{S})/\!\!/\,\mathrm{GL}(\alpha)$$

является покрытием открытыми подмножествами, изоморфными аффинному пространству;

(2) пространство модулей $\mathcal{M}^s(Q,\alpha,\zeta)$ изоморфно локально замкнутому подмногообразию в $\mathrm{Gr}_\alpha(\widehat{J}) := \prod_{i\in Q_0}\mathrm{Gr}_{\alpha_i}(\widehat{J}_i)$;

(3) каждая из проекций

$$\pi_{\mathfrak{S}} : X(\mathfrak{S}) \cong \mathrm{GL}(\alpha)\times\mathbb{A}^N \to \mathbb{A}^N \cong X(\mathfrak{S})/\!\!/\,\mathrm{GL}(\alpha)$$

допускает сечение $s_{\mathfrak{S}} : c \mapsto (E,c)$. Таким образом, каждая пара $(M,f)\in\mathrm{Rep}^s(Q,\alpha,\zeta)$ обладает конечным набором нормальных форм

$$\{s_{\mathfrak{S}}(\pi_s(M,f)) \mid X(\mathfrak{S}) \ni (M,f)\}.$$

Этот результат верен над любым полем $\Bbbk$. Кроме того, наша конструкция предоставляет алгоритм, определяющий, изоморфны ли два заданных оснащённых представления. Отметим, что указанные выше нормальные формы, равно как и вложение фактора, строятся алгоритмически, и способ их получения может быть легко реализован в виде компьютерной программы.

Пусть теперь Q — это колчан L_q с одной вершиной и q петлями. Тогда оснащённые представления с векторами размерностей $\alpha=(m)$ и $\zeta=(k)$ — это наборы из q операторов и k линейных функций на m-мерном векторном пространстве. При этом набор $(a_1,\dots,a_q,f_1,\dots,f_k)$ является стабильным тогда и только тогда, когда никакое общее инвариантное пространство операторов a_i не содержится в пересечении ядер функций f_i. Из пункта (3) теоремы 4.8 следует возможность полной классификации стабильных наборов операторов и линейных функций. Более того, ответ может быть получен как в виде конечного набора нормальных форм, так и путём предъявления классифицирующего многообразия. В третьем разделе приводятся примеры для небольших q, m и k.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, доценту Ивану Владимировичу Аржанцеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Он также благодарен профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу, доценту Дмитрию Андреевичу Тимашёву, Матиасу Домокосу и Маркусу Райнеку за полезные обсуждения. Кроме того, он благодарит заведующего кафедрой высшей алгебры профессора Виктора Николаевича Латышева и всех сотрудников кафедры за творческую атмосферу, которая способствует научной работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] С. Н. Федотов, *Полуинварианты 2-представлений колчанов*, Математические заметки, 92:1, 2012, 106-115

[2] С. Н. Федотов, *Пространства модулей оснащённых представлений и наборы операторов*, Фундаментальная и прикладная математика, 17:5, 2012, 187-209

[3] С. Н. Федотов, *Оснащённые представления и грассманианы подпредставлений*, депонировано в ВИНИТИ РАН, №416-B2012 от 14.11.2012, 34 стр.