Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.667

Мухатов Руслан Бактылбаевич

Строение полупростых алгебр Хопфа

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры
Механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Артамонов Вячеслав Александрович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Туганбаев Аскар Аканович, ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»; кандидат физико-математических наук Облезин Сергей Викторович, ФГБУ «ГНЦ РФ ИТЭФ», старший научный сотрудник.
Ведущая организация:	ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Защита диссертации состоится 5 апреля 2013 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 5 марта 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук, профессор ____________ А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию в области теории алгебр Хопфа. Рассматривается структура конечномерных полупростых алгебр Хопфа при некоторых ограничениях на количество и размерность их неприводимых представлений как алгебр.

Понятие алгебры Хопфа было введено и изучалось алгебраическими топологами как обобщение структуры из работы Хайнца Хопфа[1] о многообразиях, допускающих операцию умножения (таких, как группы Ли). И большинство изучаемых в то время алгебр Хопфа представляли либо коммутативный, либо кокоммутативный случай. Но с появлением теории квантовых групп в 1980-х годах важной задачей стало изучение некоммутативных и некокоммутативных алгебр Хопфа.

Математический объект под названием «квантовая группа» появился в работах П.П. Кулиша, Н.Ю. Решетихина,[2] Е.К. Склянина[3] и Л.Д. Фадеева, Л.А. Тахтаджяна[4]. Квантовые группы применяются как в конкретных вычислительных приложениях в некоторых моделях статистической физики и квантовой механики, так и в крайне абстрактных приложениях в теории алгебраических групп, комбинаторике и геометрии над полями простой характеристики.

[1] Hopf H. Uber die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen // Ann. of Math. 1941. Vol. 42. P. 22–52.

[2] Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордона и высшие представления // Зап. научн. семин. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. 1981. Т. 101. С. 101–110.

[3] Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 4. С. 27–34.

[4] Faddeev L. D., Takhtajan L. A. A Liouville modell on the lattice // Lect. Notes Math. Phys. 1986. Vol. 246. P. 166–179.

В работах В.Г. Дринфельда[5,6,7,8] квантовые группы рассмотрены как объекты, полученные в результате квантования групп Ли, так превращенных в пуассоново многообразие, что скобка Пуассона согласована с групповым умножением. Также в результате применения этого подхода был получен обширный запас так называемых квантовых R-матриц, т.е. матриц размера $n^2 \times n^2$, удовлетворяющих квантовому уравнению Янга-Бакстера

$$R^{12}R^{23}R^{12} = R^{23}R^{12}R^{23},$$

где $R^{12} = R \otimes 1$ и $R^{23} = 1 \otimes R$.

Результаты применения этого подхода удобно формулировать в терминах алгебр Хопфа.

В диссертации рассматриваются алгебры Хопфа над алгебраически замкнутым полем k. По определению, кроме умножения $m : H \otimes H \to H$ и единицы $u : k \to H$ в алгебре Хопфа H заданы k-линейные операции коумножения $\Delta : H \to H \otimes H$, согласованного с m, и коединицы $\varepsilon : H \to k$, а также антипода $S : H \to H$, согласованного с умножением и коумножением.

Наряду с содержательными (топологическими) примерами алгебр Хопфа имеются и тривиальные примеры, а именно, с каждой группой G ассоциируется ее групповая алгебра kG, с каждой алгеброй Ли L ассоциируется ее универсальная обертывающая алгебра $U(L)$. В первом случае коумножение Δ получается продолжением по линейности соотношений $\Delta(g) = g \otimes g$, $S(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G$, а во втором случае для каждого x из L полагаем

[5] Дринфельд В. Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга-Бакстера // Доклады АН СССР. 1983. Т. 268, № 2. С. 285–287.

[6] Дринфельд В. Г. О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга-Бакстера // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, № 3. С. 531–535.

[7] Дринфельд В. Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга-Бакстера // Доклады АН СССР. 1985. Т. 283, № 5. С. 1060–1064.

[8] Дринфельд В. Г. Квантовые группы // Зап. научн. семин. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. 1986. Т. 155. С. 19–49.

$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$, $S(x) = -x$ и продолжаем Δ на всю алгебру $U(L)$ по мультипликативности. Таким образом, мы получаем примеры кокоммутативных алгебр Хопфа. Кроме того, алгебраические группы могут быть описаны в терминах алгебр Хопфа регулярных функций. Такие алгебры Хопфа являются коммутативными. Некоммутативной алгебре Хопфа отвечает «некоммутативное многообразие», удовлетворительно описать которое с топологической точки зрения пока не представляется возможным.

Теория квантовых групп дает примеры некоммутативных и некокоммутативных алгебр Хопфа, являющихся в некотором смысле деформациями коммутативных алгебр функций на группах и, соответственно, кокоммутативных универсальных обертывающих алгебр Ли этих групп. Популярность теории квантовых групп повлияла на развитие теории алгебр Хопфа и ее приложений. В частности, весьма актуальной задачей стало описание и классификация конечномерных алгебр Хопфа, не являющихся ни коммутативными, ни кокоммутативными.

Среди алгебр Хопфа выделяются два больших класса — точечные и полупростые алгебры. В классификации конечномерных точечных алгебр Хопфа получен существенный прогресс Н. Андрушкиевичем и Х.Ю. Шнейдером. В настоящей работе рассматриваются полупростые конечномерные алгебры Хопфа, имеющие как алгебры неодномерные неприводимые представления разных размерностей. В некотором смысле это минимальный некоммутативный и некокоммутативный случай.

В области описания и классификации полупростых конечномерных алгебр Хопфа уже получено много существенных результатов. Из работ таких ученых, как П. Этингоф[9], С. Желаки[10], А. Масуока[11] и Й. Жу[12], известно, что полупростые алгебры Хопфа размерности p, q^2 и pq, где p, q — различные простые числа, над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики являются тривиальными, то есть изоморфны либо некоторой групповой алгебре, либо дуальной к групповой алгебре. В работе А. Масуока[13] показано, что полупростые алгебры Хопфа размерности p^3 распадаются на $p + 8$ классов изоморфизма.

Классификация полупростых алгебр Хопфа размерности pqr над полем $\mathbb{C}$, где p, q, r — различные простые числа, получена в работе П. Этингофа, Д. Никшича и В. Острика[14].

Полупростая алгебра Хопфа H называется фробениусовой, если размерность любого простого H-модуля делит размерность алгебры H. И. Капланский выдвинул гипотезу о том, что все полупростые алгебры Хопфа являются Фробениусовыми. В общем случае эта задача остается открытой, хотя П. Этингофом и С. Желаки[15] получен утвердительный ответ в квазитреугольном случае. В следующих работах, классифицирующих полупростые алгебры Хопфа определенных размерностей, предположение о том, что алгебра является фробениусовой, играет существенную роль.

В статьях С. Натале[16,17] классифицированы фробениусовы полупростые

---

[9] Hopf Algebras of Dimension pq are Trivial // J. Algebra. 1998. Vol. 210. P. 66–669.

[10] Gelaki S., Westreich S. On semisimple Hopf algebras of dimension pq // Proc. Amer. Math. Soc. to appear.

[11] Masuoka A. Semisimple Hopf algebras of dimension $2p$ // Comm. Algebra. 1995. Vol. 23. P. 1931–1940.

[12] Zhu Y. Hopf algebras of prime dimension // Internat. Math. Res. Notices. 1994. Vol. 1. P. 53–59.

[13] Masuoka A. Self-dual Hopf algebras of dimension p^3 obtained by extension // J. Algebra. 1995. Vol. 178. P. 791–806.

[14] Etingof P., Nikshych D., Ostrik V. Weakly group-theoretical and solvable fusion categories // ArXiv e-prints. 2008. arXiv/0809.3031.

[15] Etingof P., Gelaki S. Some properties of finite-dimensional semisimple Hopf algebras // Math. Res. Lett. 1998. Vol. 5. P. 191–197.

[16] Natale S. Semisimple Hopf algebras of dimension pq^2 // J. Algebra. 1999. Vol. 221. P. 242–278.

[17] Natale S. On Semisimple Hopf Algebras of Dimension pq^2, II // Algebras and Representation Theory.

алгебры Хопфа размерности pq^2, где p, q — различные простые числа.

Алгебра Хопфа H называется полуразрешимой снизу, если существует конечная последовательность подалгебр Хопфа $H_{n+1} = k \subseteq H_n \subseteq \ldots \subseteq H_1 = H$, такая что H_{i+1} — нормальная подалгебра Хопфа в H_i для всех i, и все факторалгебры $\overline{H_i} := H_{i+1}/H_{i+1}H_i^+$ тривиальны.

Аналогично, алгебра Хопфа H называется полуразрешимой сверху, если существует конечная последовательность факторалгебр Хопфа $H_{(0)} = H \to H_{(1)} \to \ldots \to H_{(n)} = k$, такая что каждое из отображений $H_{(i-1)} \to H_{(i)}$ нормально, и все факторалгебры $H_i := H_{(i-1)}^{co\pi_i}$ тривиальны. Здесь, $H_{(i-1)}^{co\pi_i}$ — пространство коинвариантов отображения π_i.

В работе С. Натале[18] описаны возможные конструкции алгебр Хопфа размерности, меньшей 60, и показано, что все они являются полуразрешимыми сверху или снизу с точностью до перестановки коцикла.

В статьях Д. Донга[19,20] получены результаты, касающиеся классификации полупростых алгебр Хопфа размерности pq^3.

Тем не менее задача описания полупростых алгебр Хопфа в общем виде еще далека от полного разрешения. В связи с этим важной задачей является получение различных примеров полупростых алгебр Хопфа.

В настоящей работе изучаются алгебры Хопфа, обладающие как алгебры одним неприводимым неодномерным представлением и максимальным порядком группы групповых элементов в дуальной алгебре Хопфа. Изучение таких алгебр Хопфа мотивировано следующим результатом, полученным Я. Берковичем, Д. Чиллагом и М. Герцогом[21] в теории комплексных представлений

2001. Vol. 4, no. 3. P. 277–291.

[18] Natale S. Semisolvability of semisimple Hopf algebras of low dimension. Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 2007.

[19] Dong J., Dai L. Semisimple Hopf algebras of dimension $2q^3$ // ArXiv e-prints. 2011. arXiv/1105.4398.

[20] Dong J. Structure theorems for semisimple Hopf algebras of dimension pq^3 // ArXiv e-prints. 2011. arXiv/1102.3770.

[21] Berkovich Y., Chillag D., Herzog M. Finite Groups in which the Degrees of the Nonlinear Irreducible

конечных групп.

p-группа G называется экстраспециальной, если $|Z(G)| = p$ и $G/Z(G)$ является нетривиальной элементарной абелевой p-группой, то есть p-группой, каждый нетривиальный элемент которой имеет порядок p.

Группа G называется группой Фробениуса, если она является транзитивной группой перестановок на конечном множестве, такой что ни один нетривиальный элемент не оставляет неподвижной более, чем одну точку, и при этом некоторый нетривиальный элемент оставляет неподвижной ровно одну точку. Фробениусовым дополнением называется подгруппа группы G, состоящая из элементов, оставляющих неподвижной хотя бы одну точку. Фробениусовым ядром называется подгруппа группы G, состоящая из единичного элемента и всех элементов группы G, не попадающих ни в одну из подгрупп группы G, сопряженных с фробениусовым дополнением.

Теорема 1. *Пусть G — неабелева группа, такая что для любого $n > 1$ существует не более одного неприводимого представления группы G размерности n. Тогда G является одной из следующих групп.*

1. *G является экстраспециальной 2-группой порядка 2^{2m+1}, обладающей ровно одним неприводимым представлением размерности 2^m.*

2. *G является 2-транзитивной фробениусовой группой порядка $q^f(q^f - 1)$, где q — простое число, с фробениусовым ядром G' порядка q^f. Группа G имеет $q^f - 1$ одномерных представлений и одно представление размерности $q^f - 1$.*

3. *G является 2-транзитивной фробениусовой группой порядка 72 с фробениусовым ядром F. Группа G/F — группа кватернионов порядка 8.*

Characters are Distinct // Proceedings of the American Mathematical Society. 1992. Vol. 115, no. 4. P. 955–959.

Группа G имеет 4 одномерных представления и два неприводимых представления размерностей 2 и 8.

Цель работы

Цель диссертации состоит в получении новых примеров полупростых конечномерных алгебр Хопфа, классификации полученных алгебр и более глубоком изучении структуры полупростых алгебр Хопфа, а также в развитии старых и создании новых универсальных методов исследования полупростых алгебр Хопфа. Основными задачами диссертации являются: получение описания полупростых конечномерных алгебр Хопфа с одним или несколькими неприводимыми неодномерными представлениями разных размерностей и максимальным порядком группы групповых элементов в дуальной алгебре Хопфа; получение новых серий алгебр Хопфа из подалгебр Хопфа и факторалгебр Хопфа вышеописанных алгебр Хопфа; изучение структуры групповых элементов вышеописанных алгебр Хопфа.

Методы исследования

В работе используются методы теории алгебр Хопфа, теории представлений групп, теории градуированных алгебр. Также автором разработаны некоторые новые методы исследования строения полупростых алгебр Хопфа с использованием матричных градуировок.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Описание полупростых конечномерных алгебр Хопфа с одним неприводимым неодномерным представлением и максимальным порядком группы групповых элементов в дуальной алгебре Хопфа в терминах неприводимых проективных представлений абелевых групп.

2. Описание их факторалгебр Хопфа и групповых элементов при некоторых условиях на антипод. Получение новых серий алгебр Хопфа при рассмотрении подалгебр Хопфа вышеуказанных алгебр Хопфа.

3. Характеризация групповых элементов полупростых конечномерных алгебр Хопфа, у которых неодномерные неприводимые H-модули одной размерности изоморфны. Описание факторалгебр Хопфа таких алгебр. Уточнение описания в случае с двумя неодномерными неприводимыми H-модулями разных размерностей.

4. Разработка новых методов исследования строения полупростых алгебр Хопфа с использованием матричных градуировок.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в различных областях высшей алгебры, алгебраической геометрии, линейной алгебры, теории групп.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

- «Научно-исследовательский семинар по алгебре» под руководством проф. В.Н. Латышева, проф. А.В. Михалева, проф. В.А. Артамонова, проф. Э.Б. Винберга, проф. Е.С. Голода; кафедра Высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ — неоднократно с 2010 года по 2012 год;

- Семинар «Кольца и модули» под руководством проф. А.В. Михалева; кафедра Высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ — в 2010 году;

- Семинар «Модули над групповыми кольцами» под руководством Р. Визбауэра; отделение математики Факультета математических и естественных наук Университета Генриха Гейне (Дюссельдорф, ФРГ) — в 2010 году;

- Международная конференция «Ломоносов-2011», г. Москва, 11-15 апреля 2011 года, МГУ, Москва.

Публикации

Основные результаты опубликованы в 4-х работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 3 глав, разбитых на параграфы (нумерация параграфов подчинена нумерации глав, нумерация теорем подчинена нумерации глав) и списка литературы. Полный объем диссертации — 72 страницы, библиография включает 40 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации изложена краткая история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Также описана структура и краткое содержание диссертации, а также приведены выносимые на защиту научные положения.

В диссертации рассматриваются полупростые конечномерные алгебры Хопфа над алгебраически замкнутым полем k, характеристика которого $\operatorname{char} k$ либо нулевая, либо взаимно проста с $\dim H$.

По определению, кроме умножения $m : H \otimes H \to H$ и единицы $u : k \to H$ в алгебре Хопфа H заданы k-линейные операции коумножения $\Delta : H \to H \otimes H$, согласованного с m, и коединицы $\varepsilon : H \to k$, а также антипода $S : H \to$

H, согласованного с умножением и коумножением, а именно, коммутативны следующие диаграммы.

Ассоциативность алгебры с единицей:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes H \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"] & H \otimes H \arrow[d, "m"] \\
H \otimes H \arrow[r, "m"] & H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[dd, "m"] & \\
k \otimes H \arrow[ur, "u\otimes id"] \arrow[dr] & & H \otimes k \arrow[ul, "id\otimes u"'] \arrow[dl] \\
 & H &
\end{tikzcd}$$

Коассоциативность коалгебры с коединицей:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & H \otimes H \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\
H \otimes H \arrow[r, "id\otimes\Delta"] & H \otimes H \otimes H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dl, "1\otimes"'] \arrow[dr, "\otimes 1"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k \otimes H & & H \otimes k \\
 & H \otimes H \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id"] \arrow[ur, "id\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Согласованность умножения и коумножения:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & H \arrow[r, "\Delta"] & H \otimes H \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "id\otimes\tau\otimes id"] & & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[u, "m\otimes m"']
\end{tikzcd}$$

Условия на единицу и коединицу:

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dd, "\varepsilon"] \\
H \otimes H \arrow[ur, "m"] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & \\
 & k \otimes k \cong k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dl, "\Delta"'] \\
H \otimes H & \\
 & k \otimes k \cong k \arrow[uu, "u"'] \arrow[ul, "u\otimes u"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "\mathrm{id}"'] & \\
 & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
k &
\end{tikzcd}$$

Условия на антипод:

$$\begin{tikzcd}
& H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes id"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & k \arrow[rr, "u"] & & H \\
& H \otimes H \arrow[rr, "id\otimes S"] & & H \otimes H \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Далее, на алгебре Хопфа H определяются левое и правое действия $f \rightharpoonup x$ и $x \leftharpoonup f$ элементов $f \in H^*$ на $x \in H$, которые задаются по следующему правилу: если

$$\Delta(x) = \sum_x x_{(1)} \otimes x_{(2)},$$

то $f \rightharpoonup x = \sum_x x_{(1)} \left\langle f, x_{(2)} \right\rangle, \quad x \leftharpoonup f = \sum_x \left\langle f, x_{(1)} \right\rangle x_{(2)}$.

В первой главе рассмотрены полупростые конечномерные алгебры Хопфа с одним неприводимым неодномерным представлением и максимальным порядком группы групповых элементов в дуальной алгебре Хопфа.

Обозначим через G группу групповых элементов дуальной алгебры Хопфа H^*. Тогда алгебра H имеет полупростое разложение

$$H = \oplus_{g\in G} k e_g \oplus \mathrm{Mat}(n, k), \tag{1}$$

где $\{e_g,\ E \mid g \in G\}$ — система центральных ортогональных идемпотентов в H, E — единичная матрица в $\mathrm{Mat}(n, k)$.

В разделе 1.1 вводится конструкция алгебры Хопфа, полученная в работе В.А. Артамонова. А именно, было показано, что в случае, когда порядок группы G максимален и равен n^2, алгебра H принадлежит одной из двух серий.

Теорема 2. *Пусть H — алгебра вида (1). $G = G(H^*)$ и $|G| = n^2$. Рассмотрим матрицы U и V из $\mathrm{GL}(n,k)$, такие что $V = \frac{1}{n}U^{-1}$ и либо $U = E$, $V = \frac{1}{n}E$, либо $U = \mathcal{S}$, $V = -\frac{1}{n}\mathcal{S}$, где*

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда в обоих случаях коумножение Δ, коединица ε и антипод S задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta(e_g) &= \sum_{h\in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} + \Delta_g, \quad \Delta_g \in \mathrm{Mat}(n,k)\otimes \mathrm{Mat}(n,k), \\ \Delta(x) &= \sum_{g\in G} [(g \rightharpoonup x)\otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)], \quad x \in \mathrm{Mat}(n,k), \\ \varepsilon(e_g) &= \delta_{g,1}, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad x \in \mathrm{Mat}(n,k), \\ S(y) &= \begin{cases} e_{g^{-1}}, & y = g \in G \\ nU\,{}^t\!yV = U\,{}^t\!yU^{-1}, & y \in \mathrm{Mat}(n,k), \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\Delta_g = \sum_{i,j,p,q} (E_{ij} \leftharpoonup g^{-1}) \otimes u_{ip}v_{qj}E_{pq} = \sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes u_{ip}v_{qj}(g^{-1} \rightharpoonup E_{pq}) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes (g^{-1} \rightharpoonup S(E_{ji})).$$

Более того, существует проективное представление $g \mapsto A_g = (a_{ij}(g)) \in \mathrm{GL}(n,k)$ группы G размерности n, такое что:

$$\begin{aligned} & g \rightharpoonup x = A_g x A_{g^{-1}}, \\ & x \leftharpoonup g = n^2 U\,{}^tA_g V x U\,{}^tA_{g^{-1}} V = U\,{}^tA_g U^{-1} x U\,{}^tA_{g^{-1}} U^{-1}, \\ & A_g U\,{}^tA_h U^{-1} A_g^{-1} U\,{}^tA_h^{-1} U^{-1} = [A_g, U\,{}^tA_h^{-1}U^{-1}] = \mu_{g,h}E, \quad \mu_{g,h} \in k^*, \\ & \Delta_g = \sum_{i,j,p,q,r,s=1}^{n} E_{ij} \otimes u_{ip}a_{rp}(g^{-1})a_{qs}(g)v_{qj}E_{rs} \end{aligned}$$

для всех $g \in G$. Кроме того, $\operatorname{tr} A_g = n\delta_{g,1}$ *и*

$$\mathcal{R} = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji} = \sum_{g \in G} U\, {}^t\!A_{g^{-1}} \otimes\ {}^t\!A_g V.$$

Также в этом разделе описывается структура дуальной алгебры Хопфа H^*.

В разделе 1.2 рассматривается обратная задача построения алгебры Хопфа с использованием данных отображений. Получены условия на представления группы G, при которых конструкция задает алгебру Хопфа.

В разделе 1.3 получено описание всех алгебр Хопфа вида (1) с использованием неприводимых проективных представлений абелевых групп и указан критерий изоморфизма таких алгебр Хопфа, полученный в работе В.А. Артамонова.

Теорема 3. *Пусть G — абелева группа симметрического типа с разложением $G = K_1 \times \ldots \times K_m, \quad K_i = \langle a_i \rangle_{n_i} \times \langle b_i \rangle_{n_i}, n_i = p_i^{\alpha_i}$, и точным неприводимым проективным представлением ψ вида $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_m$, где $\psi_t(a_t^i b_t^j) = \sum_{p=1}^{n_t} E^{(t)}_{p+i,p} \omega_t^j \eta_t^{-j(p-1)} \in \mathrm{GL}(n_t, k), \quad \omega_t, \eta_t$ — первообразные корни степени n_t из единицы. Тогда на векторном пространстве $H = \oplus_{g \in G} k e_g \oplus Mat(n,k)E$ корректно задаются алгебры Хопфа при помощи следующих отображений.*

- $g \rightharpoonup x = A_g x A_g^{-1}$;
- $x \leftharpoonup g = (U\, {}^t\!A_g U^{-1}) x (U\, {}^t\!A_{g-1} U^{-1})$;
- $\Delta_g = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes (g^{-1} \rightharpoonup S(E_{ji}))$;
- $\Delta(e_g) = \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} + \Delta_g$;
- $\Delta(x) = \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)]$;
- $\epsilon(e_g) = \delta_{g,1}$;

- *$\epsilon(x) = 0$;*

- *$S(x) = U\,{}^t\!xU^{-1}$.*

Здесь $A_g = \psi(g)$. Если n нечетно, то матрица U симметрична. Если n четно, то матрица U либо симметрична, либо кососимметрична. При этом в качестве матрицы U можно взять любую матрицу, при которой для любого $g, h \in G$ в $\mathrm{PGL}(n, k)$ выполняется равенство

$$[\psi(g), U\,{}^t\psi(h)U^{-1}] = 1. \tag{2}$$

В случае, когда группа G представляется в виде произведения двух циклических групп $G = \langle a \rangle_n \times \langle b \rangle_n$, это условие эквивалентно следующему: для любого $g \in G$ найдется элемент $\widetilde{g} \in G$, такой что выполняется равенство:

$$U\,{}^t\psi(g)U^{-1} = C_g\psi(\widetilde{g}), \quad C_g \in k^*.$$

При этом отображение, переводящее элементы g в $\widetilde{g}$, является автоморфизмом группы G порядка 2.

Теорема 4. *Пусть H и H_1 — алгебры Хопфа, построенные в теореме 3 для матриц U и U_1 соответственно. Они изоморфны тогда и только тогда, когда существует матрица $Z \in \mathrm{GL}(n, k)$, такая что:*

- *$ZU\,{}^tZ = U_1$.*

- *$\forall g \in G \quad ZA_gZ^{-1} = \xi_g A_g, \quad \xi_g \in k^*$.*

Во второй главе рассматриваются подалгебры Хопфа и фактор-алгебры Хопфа алгебр Хопфа, описанных в теореме 3.

Подалгебра H_1 алгебры Хопфа H называется подалгеброй Хопфа, если $\Delta(H_1) \subseteq H_1 \otimes H_1$ и $S(H_1) \subseteq H_1$.

Идеал J алгебры Хопфа H называется идеалом Хопфа, если $\Delta(J) \subseteq H \otimes J + J \otimes H$, $\varepsilon(J) = 0$ и $S(J) \subseteq J$.

В разделе 2.2 получено описание фактор-алгебр Хопфа: они являются алгебрами Хопфа, дуальными к групповым, и поэтому не дают никаких новых примеров полупростых алгебр Хопфа.

Но при рассмотрении подалгебр Хопфа мы получаем новые серии алгебр Хопфа, а именно для каждой подгруппы N группы G, удовлетворяющей определенным условиям, мы строим идеал Хопфа J_N в дуальной алгебре H^*, который соответствует ровно одной подалгебре Хопфа $J_N^\perp$ в H, ортогональной к этому идеалу Хопфа по отношению к естественной билинейной форме.

Теорема 5. *Пусть $H^* = kG \oplus \mathrm{Mat}(n,k)$ — алгебра Хопфа, дуальная к алгебре H из теоремы 3, N — произвольная подгруппа группы G с образующими $g_1, \ldots, g_t$, $\widetilde{J}_N = \langle g - h \mid g^{-1}h \in N \rangle$ — соответствующий идеал Хопфа в kG, $J_N = \widetilde{J}_N * H^*$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) J_N — *идеал Хопфа в* H^*;

2) $\widetilde{J}_N * H^* = H^* * \widetilde{J}_N$;

3) $\widetilde{J}_N * \mathrm{Mat}(n,k) = \mathrm{Mat}(n,k) * \widetilde{J}_N$;

4) $S(\mathrm{Mat}(n,k) * \widetilde{J}_N) = \mathrm{Mat}(n,k) * \widetilde{J}_N$;

5) $S(\widetilde{J}_N * \mathrm{Mat}(n,k)) = \widetilde{J}_N * \mathrm{Mat}(n,k)$;

6) $\forall l = 1, \ldots, t \quad S((1 - g_l) * E_{ij}) \in \widetilde{J}_N * \mathrm{Mat}(n,k)$.

Здесь $*$ обозначает операцию умножения в H^*. Если J_{N_1}, J_{N_2} — идеалы Хопфа в H^*, построенные по подгруппам N_1, N_2 в группе G, то для $N = N_1 N_2$ подпространство J_N также является идеалом Хопфа в H^*.

Далее приведены примеры таких подгрупп N, для которых выполняется условие из этой теоремы, а также таких подгрупп N, для которых это условие не выполняется, и идеал Хопфа J_N нельзя корректно построить.

В разделе 2.3 описаны в явном виде групповые элементы алгебры Хопфа

H из теоремы 3 при некотором ограничении на антипод S алгебры H и порядок группы $G(H)$.

Теорема 6. *Пусть для алгебры Хопфа H из теоремы 3 выполнены условия: $U = E$ и $G(H)$ является абелевой группой.*

Тогда группа $G(H)$ изоморфна группе $A \times \mathbb{Z}_2$ и состоит из элементов

$$\omega = \sum_{g \in G} \chi^{(a)}_{g,\omega} e_g \pm A_a$$

В третьей главе рассматриваются полупростые конечномерные алгебры Хопфа, у которых неодномерные неприводимые H-модули одной размерности изоморфны.

$$H = (\oplus_{g \in G} k e_g) \oplus (\oplus_{j=1}^{n} Mat(d_j, k)), \tag{3}$$

В разделе 3.1 вводится конструкция алгебры Хопфа для случая нескольких неодномерных неприводимых H-модулей, полученная в работе В.А. Артамонова.

В разделе 3.2 получена характеризация групповых элементов таких алгебр.

Теорема 7. *Элемент*

$$\omega = \sum_{g \in G} \chi_{g,\omega} e_g + \sum_{i=1}^{n} Z_{i,\omega} \tag{4}$$

является групповым в том и только том случае, если:

1) $\chi_{g,\omega}\chi_{f,\omega} = \chi_{gf,\omega}$ для всех $f, g \in G$;

2) $g \rightharpoonup Z_{i,\omega} = \chi_{g,\omega} Z_{i,\omega} = Z_{i,\omega} \leftharpoonup g$ для всех $g \in G$ и для всех индексов i;

3) $\delta_{pq}(\sum_{g \in G} \chi_{g,\omega} \mathcal{D}_{g,p}) + \sum_i \Delta^i_{pq}(Z_{i,\omega}) = Z_{p,\omega} \otimes Z_{q,\omega}$ для любых индексов p, q.

Кроме того, $S(Z_{i,\omega}) = Z^{-1}_{i,\omega}$.

В разделе 3.3 разработаны методы исследования строения полупростых алгебр Хопфа с использованием матричных градуировок. А именно, для произвольного характера λ группы G положим

$$A_\lambda^i = \{x \in \mathrm{Mat}(d_i, k) \mid g \rightharpoonup x = \lambda_g x \quad \forall g \in G\},$$
$$B_\lambda^i = \{x \in \mathrm{Mat}(d_i, k) \mid x \leftharpoonup g = \lambda_g x \quad \forall g \in G\}.$$

Тогда мы получаем разложение модуля M_i в прямую сумму эквивалентных неприводимых проективных представлений группы G.

Теорема 8. *Подпространства A_λ^i, B_λ^i инвариантны при действии операторов $t \rightharpoonup, \leftharpoonup t$ для всех $t \in G$. В частности,*

$$A_\lambda^i = \oplus_\mu (A_\lambda^i \cap B_\mu^i), \quad B_\lambda^i = \oplus_\mu (A_\mu^i \cap B_\lambda^i),$$

$$\mathrm{Mat}(d_i, k) = \oplus_{\lambda,\mu} (A_\lambda^i \cap B_\mu^i).$$

Для любых индексов $i, j, t = 1, \ldots, n$ справедливы включения

$$\Delta_{jt}^i (A_\lambda^i \cap B_\mu^i) \subseteq B_\mu^j \otimes A_\lambda^t.$$

Кроме того, размерности A_λ^i, B_λ^i совпадают и равны $\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2$ для любого характера λ группы G.

В разделе 3.4 описаны факторалгебры Хопфа исследуемых алгебр Хопфа.

Теорема 9. *Пусть в алгебре H вида (3) для любых $g \in G, \quad i = 1, \ldots, n$ $\mathcal{D}_{g,i} \neq 0$. Тогда факторалгебрами алгебры Хопфа H являются следующие алгебры Хопфа и только они.*

1. *Алгебры Хопфа, дуальные к групповым алгебрам, соответствующим всевозможным подгруппам N группы G.*

$$H/J = \oplus_{g \in N} k e_g \cong (kN)^*.$$

2. *Алгебры Хопфа вида* $(\oplus_{g \in G} k e_g) \oplus (\oplus_{t \in \{1,\dots,n\} \setminus T} \mathrm{Mat}(d_t, k))$, *где* T *— любое такое подмножество индексов в множестве* $\{1, \dots, n\}$, *что для любого* $t \in T, \quad i, j = 1, \dots, n$ *из условия* $\Delta^t_{ij} \neq 0$ *следует, что либо* i, *либо* j *принадлежит подмножеству* T.

А также получено уточнение для случая с двумя неодномерными неприводимыми H-модулями разных размерностей.

Теорема 10. *Факторалгебрами алгебры Хопфа* H *вида (3) с двумя неодномерными неприводимыми представлениями разных размерностей являются следующие алгебры Хопфа и только они.*

1. *Алгебры Хопфа, дуальные к групповым алгебрам, соответствующим всевозможным подгруппам* N *группы* G.

$$H/J = \oplus_{g \in N} k e_g \cong (kN)^*.$$

2. *Алгебры Хопфа вида* $\oplus_{g \in G} k e_g \oplus \mathrm{Mat}(d_1, k)$.

Автор благодарит своего научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Артамонова Вячеслава Александровича, за постановку интересной задачи и внимание к работе, а также всех сотрудников кафедры высшей алгебры за творческую атмосферу, способствующую научной работе.

Работы автора по теме диссертации

1. Мухатов Р. Б. О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2011. № 1. С. 60–63.

2. Мухатов Р. Б. Подалгебры и идеалы Хопфа некоторых полупростых алгебр Хопфа // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 6. С. 904–911.

3. Мухатов Р. Б. О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа // Фунд. и прикл. матем. 2009. Т. 15, № 2. С. 133–143.

4. Мухатов Р. Б. О структуре полупростых алгебр Хопфа // Рукопись деп. в ВИНИТИ 17.10.2012, № 405-B2012. – 17 с..