Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Лапин Николай Иванович

Применение метода неприводимых тензоров в задачах динамики твердого тела

01.02.01. – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре физики и физического образования Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования Нижегородского государственного педагогического университета им. Козьмы Минина

Научный руководитель:
Урман Юрий Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:
Кобрин Александр Исаакович,
доктор физико-математических наук, профессор

Буров Александр Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Ведущая организация: Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

Защита состоится 26 апреля 2013 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, 1, Главное здание МГУ ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций (Ломоносовский проспект, 27, Фундаментальная библиотека, сектор А - 8 этаж, к.812).

Автореферат разослан 26 марта 2013 г.

Учёный секретарь диссертационного совета Д 501.001.22,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.А. Прошкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Актуальность исследования обусловлена развитием устройств, использующих бесконтактное вывешивание твердого тела в магнитном или электрическом поле, исследование динамики космического аппарата в гравитационном и магнитном полях Земли, разработки новых технологических процессов и систем, технические характеристики которых определяются динамическим поведением твердого тела при взаимодействием с неоднородным силовым полем. Задача описания взаимодействия твердого тела с неоднородным полем имеет свою специфику, приводящая к существенному усложнению структуры взаимодействия тела с полем, по сравнению с классической постановкой задачи о движении твердого тела с закрепленной точкой в однородном гравитационном поле. Принципиальным в данных задачах является особый вид сил и моментов сил, возникающих при рассмотрении взаимодействия.

В связи с изложенным, возникает проблема описания взаимодействия в наиболее удобном для исследования виде. Так как силы и моменты сил имеют свою специфику, то точное аналитическое решение задачи о движении твердого тела недостижимо. Поэтому форма описания такого взаимодействия должна быть удобна для нахождения приближенных уравнений, описывающих динамику.

Актуальным становится задача создание такого математического аппарата, который позволил бы учесть всю сложность описания взаимодействия и специфику сил и моментов сил, возникающих при рассмотрении взаимодействия твердого тела с неоднородным силовым полем.

Таким требованиям отвечает математический аппарат неприводимых тензоров. Применение этого математического аппарата позволяет записать силовую функцию взаимодействия твердого тела с неоднородным силовым полем в инвариантном виде, определить ясный физический смысл сложных взаимодействий, легко проводить преобразование силовой функции из одной системы координат в другую, повернутой относительно первой, представлять силовую функцию сложного взаимодействия в фазовых переменных задачи, использовать наличие симметрии как формы твердого тела, так и структуры силового поля.

Данный метод развивается в диссертационной работе и демонстрируется на примерах получения инвариантного разложения силовой функции попарного взаимодействия произвольных зарядовых и токовых распределений, на изучении взаимодействия произвольного по форме однородного по составу диамагнитного тела с магнитным полем произвольной конфигурации, получения осредненных уравнений динамики твердого тела.

Использование математического аппарата неприводимых тензоров позволяет рассматривать сложные задачи динамики твердого тела в неоднородных силовых полях различной физической природы, например задачи исследования движения космического аппарата в гравитационном и магнитном поле Земли, транспортировки и установки деталей, при создании сложных технических устройств электрическим и магнитным полем, создании центрифуг, создающих при вращение поля в десятки миллионов g, применяемых в ядерных исследованиях, создании высокоскоростного транспорта, исследование динамики левитирующего диамагнитного тела в магнитном поле.

Левитация диамагнитных тел в магнитном поле важна для множества практических приложений. Она открывает новые возможности для управления биологическими объектами, для сепарации нанотрубок, полимеров, обладающих различной плотностью, выращивания белковых кристаллов до 1 cm, для синтеза новых материалов и многого другого. Наиболее отличительная черта и преимущество диамагнитной левитации по сравнению с другими известными или возможными схемами, включая сверхпроводящую левитацию, есть то, что для однородного материала существуют магнитные поля с определенным профилем квадрата магнитной индукции, когда гравитация скомпенсирована фактически на уровне отдельных атомов и молекул. Это делает возможным симулировать состояние невесомости в очень хорошем приближении прямо на Земле, что нашло свое применение в медико-биологических исследованиях, пищевой промышленности, здравоохранении и многих других приложениях.

Так как интерес к различным применениям диамагнитного подвеса колоссально возрос, и с каждым годом будет расти все больше и больше (в настоящее время созданы электромагниты, генерирующие магнитные поля с индукцией B$\sim$ 26,8 T, и не за горами разработка магнитов, создающих поля с индукцией B$\sim$ 30-50 T), появилась настоятельная необходимость в теоретическом осмыслении динамики различных слабых диамагнитных тел в магнитном поле.

Цель диссертационной работы. Целью работы является развитие общих методов описания и исследования взаимодействия твердого тела с неоднородным силовым полем произвольной физической природы. Развитие аналитических и качественных методов исследования эволюционных движений твердого тела. Изучение причин, влияющих на устойчивость в неконтактном подвесе диамагнитного тела произвольной формы в произвольном магнитном поле.

Методы исследования. В диссертации используется математический аппарата неприводимых тензоров. Применении математического аппарата неприводимых тензоров позволило: а) записать силовую функцию взаимодействия твердого тела с полем; б) выявить явный физический смысл членов разложения скалярного и векторного полей; в) получить теорему сложения для тензорных решений уравнения Гельмгольца, которая позволила получить разложение силовой функции при трансляциях и поворотах; г) получить осредненные уравнения движения твердого тела под действием моментов сил; д) построить силовую функцию взаимодействия диамагнитного ротора произвольной формы с магнитным полем подвеса, получить условия устойчивости, определить область устойчивости диамагнитного эллипсоида в поле кругового тока; е) проанализировать движения ротора при периодическом изменении формы.

Научная новизна. I. Обосновано использование математического аппарата неприводимых тензоров при описании и исследовании сложных взаимодействий твердого тела с силовым полем произвольной природы.

II. Представлены и проанализированы инвариантное разложение силовой функции взаимодействия пространственных зарядовых и токовых произвольных распределений.

III. Построена теория расчета силовых характеристик подвеса диамагнитного ротора произвольной формы в неконтактном подвесе.

IV. Найдены условия консервативной устойчивости и определена область устойчивости диамагнитного симметричного эллипсоида в поле кругового тока.

V. Показана эффективность использования неприводимых тензоров для построения эволюционных уравнений движения твердого тела и их осреднения.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическую и практическую значимость представляют предложенные в работе методы построения и исследования силовой функции взаимодействия твердого тела с неоднородным силовым полем. Практическая значимость этих результатов обусловлена возможностью их применения для решения задач связанных с изучением при: движении космического аппарата в гравитационном и магнитном поле Земли, транспортировки и установки деталей, при создании сложных технических устройств электрическим и магнитным полем, создании центрифуг, создающих при вращение поля в десятки миллионов g, применяемых в ядерных исследованиях, создании высокоскоростного транспорта, левитации диамагнитных тел в магнитном поле. В качестве конкретного практического применения полученных результатов можно рассматривать результаты нахождения области устойчивости диамагнитного эллипсоида в поле кругового тока и результаты анализа при рассмотрении поведения диамагнитного эллипсоида в поле кругового тока при периодическом изменении формы эллипсоида.

Основные результаты диссертационной работы являются частью исследований, проводимых при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31133 мол-а на 2012-2013 годы, № 08-01-00333-а на 2008-2010 годы).

Апробация работы. Результаты исследования докладывались на X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2011); на Международной конференции Устойчивость, управление и динамика твердого тела (Донецк, 2011); на X Международной молодежной научно-технической конференции "Будущее технической науки"(Нижний Новгород, 2011); на Международной конференции "Тараповские чтения"(Харьков, 2011); на Международной конференции "XI математическая Белорусская конференция"(Минск, 2012); на IV Всероссийской молодежной научно-инновационной школе "Математика и математическое моделирование"(Саров, 2010); на Нижегородской сессии молодых ученых (Нижний Новгород, 2006–2010).

По теме диссертации были сделаны доклады на семинаре "Математическое моделирование динамических систем и процессов управления"в НИИ ПМК ННГУ имени Н.И. Лобачевского (рук. проф. Д.В. Баландин), семинаре кафедры физики и физического образовании НГПУ им. Козьмы Минина (рук. проф. Ю.М. Урман).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 15 печатных работах. В том числе из них 4 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. В конце автореферата приведены наиболее значимые публикации по теме диссертации.

Личный вклад. В публикациях, выполненных совместно с научным руководителем Ю.М. Урманом, соискателю принадлежит качественный и численный анализ результатов полученных выражений, обоснование возможности использования методов при рассмотрении сложных взаимодействий, выведение конечных выражений необходимых для численного анализа, Ю.М. Урману принадлежат постановки задачи, формулировки утверждений, участие в обсуждении результатов и общее руководство работой.

Диссертация является продолжением работ, проводившихся в НИИ ПМК ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения, списка литературы, содержит 124 страницы основного текста, 20 рисунков, библиографию 59 названий.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

Введение содержит обзор литературы и краткое содержание работы.

В первой главе представлены необходимые сведения из теории групп, определены основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения результатов работы. Введены матрицы конечных вращений, на основе которых дано определение неприводимых тензоров. Приведена тензорная алгебра и примеры неприводимых тензоров.

Математический аппарат неприводимых тензоров создавался для нужд квантовой механики и оказался весьма универсальным. Насколько известно автору в механике этот аппарат в первые был применен в работах Ю.М. Урмана и Г.Г. Денисова. Его использование позволяет увидеть ясный физический смысл сложных взаимодействий, выражать эти взаимодействия в инвариантном виде, легко проводить преобразования из одной системы координат в другую, повернутую относительно первой, рассматривать довольно сложные взаимодействия, давая им компактную форму записи и явную зависимость от фазовых переменных задачи, легко использовать наличие симметрии как формы твердого тела, так и структуры силового поля, проводить процедуру осреднения не покомпонентно, а всего объекта целиком. Это имеет значительное преимущество при рассмотрении динамики твердого тела в полях различной природы.

Неприводимым тензором ранга l будем называть всякую физическую величину которая при вращении пространства преобразуется по неприводимому представлению D^l группы вращений. Из определения следует, что при повороте системы координат, определяемом углами Эйлера α, β, γ, компоненты неприводимого тензора преобразуются линейно. Коэффициенты этого преобразования являются матрицы D^l представления

$$\acute{\mathfrak{M}}_{lq} = \sum_p \mathfrak{M}_{lq} D^l_{pq}(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{M}_{lq} = \sum_q \acute{\mathfrak{M}}_{lq} D^{l*}_{pq}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Для неприводимых тензоров вводится алгебра аналогично алгебре декартовых тензоров. Для декартовых тензоров определены три типа операций: сложение, умножение и свертка по паре индексов. Для неприводимых тензоров вводится сложение двух неприводимых тензоров, а вместо операции умножения и свертки определяется операция неприводимого тензорного произведения $\mathfrak{L}$ ранга j двух неприводимых тензоров $\mathfrak{M}_{j_1}$ $\mathfrak{N}_{j_2}$

$$\mathfrak{L}_{jM} = \{\mathfrak{M}_{j_1} \otimes \mathfrak{N}_{j_2}\} = \sum_{M_1 M_2} C^{jM}_{j_1 M_1 j_2 M_2} \mathfrak{M}_{j_1 M_1} \mathfrak{N}_{j_2 M_2}.$$

На основе неприводимого тензорного произведения, можно построить неприводимое тензорное произведение трех и более неприводимых тензоров.

Вторая глава посвящена получению формульных преобразований тензорных решений уравнения Гельмгольца при трансляциях, что находят свое применение при решении задач, в которых необходимо связать граничные условия двух или большего числа пространственных тел.

Ряд задач теоретической и математической физики приводит к необходимости представить решения уравнений Гельмгольца или Лапласа, записанные в одной системе координат, через решения того же уравнения в другой системе координат, сдвинутой относительно первой. Такая проблема возникает, когда нужно связать краевые условия для двух или большего числа тел в задачах электродинамики и теплопроводности, в задачах квантовой механики, при разложении по мультиполям энергии взаимодействия гравитирующих тел либо зарядовых или токовых пространственных распределений. Для всех задач такого типа необходимо знать оператор сдвига, преобразующий решение из одной системы координат в другую.

Известно, что группа движений пространства $E(3)$, состоящая из вращений относительно начала координат и сдвигов, является группой симметрии уравнения Гельмгольца. Она отображает решения уравнения Гельмгольца снова в решения.

Пусть $\psi(\mathbf{r})$–решение уравнения

$$(\Delta+\omega^2)\psi(\mathbf{r})=0.$$

Преобразование Фурье

$$\psi(\mathbf{r})=\iint\limits_{S_2}\exp(i\omega\mathbf{r}\mathbf{k})h(\mathbf{k})d\Omega=I(h)$$

также удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Здесь $\mathbf{k}$–единичный вектор $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\ =\ 1$, пробегающий единичную сферу S_2: $k_1^2+k_2^2+k_3^2=1$, $d\Omega$–обычная мера телесного угла на этой сфере и h–произвольная комплекснозначная измеримая функция на S_2 (относительно $d\Omega$) такая, что

$$\iint\limits_{S_2}h(\mathbf{k})^2d\Omega(\mathbf{k})<\infty.$$

Множество $L_2(S_2)$ таких функций h образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(h_1,h_2)=\iint\limits_{S_2}h_1(\mathbf{k})h_2^*(\mathbf{k})d\Omega(\mathbf{k}).$$

Следовательно, данное пространство можно разложить на неприводимые, в каждом из которых найдется оператор $\hat{T}(g)$, который, действуя на функции $\psi(\mathbf{r})$, индуцируют операторы, действующие на функции h. Таким образом, операторы $\hat{T}(g)$ определяют неприводимые представления группы $E(3)$ на пространстве функций $L_2(S_2)$.

Если же рассмотреть пространство H, состоящее из решений уравнения Гельмгольца $\psi(\mathbf{r})$, определенных формулой преобразования Фурье, то для $\psi(\mathbf{r}) = I(h)$ и некоторого $h \in L_2(S_2)$ пространство H является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\psi_1, \psi_2^*) = (h_1, h_2^*), \psi_j = I(h_j).$$

Следовательно, $I(h)$ является унитарным преобразованием из $L_2(S_2)$ в H. Существование унитарного отображения дает нам возможность переходить в задачах от пространства H к пространству $L_2(S_2)$.

В задачах, связанных с решением уравнения Гельмгольца, большое значение имеет получение формул, дающих разложение базисных функций с разделяющимися переменными $\psi_n^{(j)}$ в одной криволинейной системе координат в виде суммы или интеграла от базисных функций $\psi_m^{(l)}$ в другой криволинейной системе координат. Часто бывает необходимо применить евклидово преобразование к функции $\psi_n^{(j)}$ и затем осуществить разложение по базису $\psi_m^{(l)}$. Поскольку h–гильбертово пространство, мы имеем

$$\hat{T}(g)\psi_n^{(j)} = \sum_m (\hat{T}(g)\psi_n^{(j)}, \psi_m^{(l)})\psi_m^{(l)},$$

где сумма заменяется интегралом, если $\psi_m^{(l)}$–собственные функции непрерывного спектра. Следовательно, мы можем найти коэффициенты разложения в пространстве $L_2(S_2)$ вместо того, чтобы искать их в пространстве h.

Рассмотрим неприводимое представление $\hat{T}(g)$ группы $E(3)$ в $L_2(S_2)$. Если ограничить $\hat{T}$ на подгруппу SO_3, то оно становится приводимым и разбивается на прямую сумму

$$\hat{T} \mid SO_3 \cong \sum_{l=0}^{\infty} \oplus D_l,$$

где D_l–унитарные неприводимые представления группы SO_3. Таким образом $L_2(S_2)$ можно разложить на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств V_l. Элементы h из этих подпространств являются собственными функциями оператора Лапласа на сфере S_2 и совпадают со сферическими функциями (орты канонического базиса неприводимого представления с целым весом l). Следовательно, базис для пространств V_l состоит из собственных функций

$$f_m^l(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos(\theta)),$$

где $P_l^m(\cos(\theta))$–нормированная присоединенная функция Лежандра.

Матричные элементы операторов переноса $\hat{T}(E, \mathbf{a}) = exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})$ на базисных функциях $L_2(S_2)$ определяются формулой

$$T_{lm,l'm'}(\mathbf{a}) = (\hat{T}(E, \mathbf{a}) f_{m'}^{(l')}, f_m^{(l)}) = \iint\limits_{S_2} exp(i\omega \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) Y_{l'm'}(\mathbf{k}) Y_{l'm'}^*(\mathbf{k}) d\Omega(\mathbf{k})$$

для вычисления интеграла используем формулу разложения плоской волны:

$$e^{i\mathbf{kr}} = \sum_{l,m} i^l (2l+1) J_l(\mathbf{kr}) Y_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}^*(\mathbf{r})$$

и значение интеграла

$$\int Y_{lm}^*(\mathbf{k}) Y_{l_1 m_1}(\mathbf{k}) Y_{l_2 m_2}(\mathbf{k}) d\Omega = C_{l_1 0 l_2 0}^{l0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{lm}$$

где $J_l(\mathbf{kr})$–сферическая функция Бесселя, $C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{lm}$–коэффициент Глебша-Гордана для SO_3, тогда получим

$$(\hat{T}(E, \mathbf{a}) Y_{l'm'}, Y_{lm}) = \sum_{s,q} i^s (2s+1) J_s(\omega a) Y_{sq}^*(\mathbf{a})$$

$$\int Y_{sq}(\mathbf{k}) Y_{l'm'}(\mathbf{k}) Y_{lm}(\mathbf{k}) d\Omega = \sum_{s,q} i^s (2s+1) J_s(\omega a) C_{s0l'0}^{l0} C_{sql'm'}^{lm} Y_{sq}^*(\Omega_a).$$

Таким образом, матричные элементы оператора трансляции имеют вид

$$T_{lm,l'm'}(\mathbf{a}) = \sum_{s,q} i^s (2s+1) J_s(\omega a) C_{s0l'0}^{l0} C_{sql'm'}^{lm} Y_{sq}^*(\Omega_a).$$

Данные матричные элементы используются для получения теоремы сложения решений уравнения Гельмгольца в сферической системе координат. В общем виде это выражается через формулу

$$\psi_M^L(\mathbf{R}) = \sum_{l,m} T_{lm,LM}(\mathbf{a}) \psi_m^l(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{a}.$$

В явном виде теорема сложения может быть выражена как разложение через биполярные гармоники (неприводимые тензорные произведения сферических функций).

$$Z_j(\omega R) Y_{jM}(\Omega_R) = \sum_{l,Q} i^{l+Q-j} \frac{(2l+1)(2Q+1)}{2j+1} C_{l0Q0}^{j0} \times$$
$$\times J_l(\omega a) Z_Q(\omega r) \{Y_l(\Omega_a) \otimes Y_Q(\Omega_r)\}_{jM}; a < r$$

Выбирая в представленной формуле в качестве $Z_l(\omega r)$ сферическую функцию Бесселя $j_L(\omega r)$ и устремляя $\omega \to 0$, учитывая при этом, что $j_L(x) \Rightarrow \frac{2^L L!}{2L+1} x^L$ получаются формулы для преобразования при трансляциях решений уравнений Лапласа не имеющих особенности в нуле

$$\Im_j(\mathbf{r}+\mathbf{a}=\mathbf{R}) = \sum_{l,Q=0,l+Q=j} \sqrt{\frac{(2j)!}{(2l)!(2Q)!}} \{\Im_l(\mathbf{a}) \otimes \Im_Q(\mathbf{r})\}_j.$$

Аналогично, если в качестве $Z_L(\omega r)$ выбрать функцию Неймана $n_L(\omega r)$ и устремляя $\omega \to 0$ будем иметь, учитывая, что $n_L(\omega r) \Rightarrow -(2L-1)!!x^{-(L+1)}$ решение уравнения Лапласа имеющих особенности в нуле

$$\Re_j(\mathbf{R}) = \sum_{l,Q=0,Q-l=j}^{\infty} \sqrt{\frac{(2Q+1)!}{(2l)!(2j+1)!}} \{\Im_l(\mathbf{r}) \otimes \Re_Q(\mathbf{a})\}_j.$$

В представленных формулах

$$\Im_n(\mathbf{r}) \to \Im_{nm}(\mathbf{r}) = r^n Y_{nm}(\Omega_r)$$

$$\Re_n(\mathbf{r}) \to \Re_{nm}(\mathbf{r}) = r^{-(n+1)} Y_{nm}(\Omega_r)$$

регулярные и иррегулярные (в соответствии с их поведением в точке $r = 0$) шаровые функции.

Для получения формул преобразований при трансляциях тензорных решений уравнения Гельмгольца $Z_L(kr)Y_{jM}^{LS}$ используем изменение схемы связи в неприводимых тензорных произведениях и теорему сложения для скалярных волн. Формула преобразования сферических тензорных волн при трансляциях имеет вид

$$Z_L(\omega R)Y_{jM}^{LS}(\Omega_R) = \sum_{Q,h,l} i^{l+Q-L}(-1)^{S+Q-j}(2l+1)\sqrt{(2h+1)(2Q+1)}C_{l0L0}^{Q0} \times$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} L & l & Q \\ h & S & j \end{matrix} \right\} J_l(\omega a) Z_Q(\omega r) \{Y_l(\Omega_a) \otimes Y_h^{QS}(\Omega_r)\}_{jM}$$

Аналогично получению формул для трансляций скалярных решений уравнения Лапласа, получим формулы для тензорных решений уравнения Лапласа.

$$\Im_{jM}^{LS}(\mathbf{R}) = \sum_{l,Q,h,l+Q=h} (-1)^{S+l+h} \sqrt{\frac{(2L+1)!(2h+1)!}{(2l)!(2Q)!}} \left\{ \begin{matrix} l & Q & L \\ j & S & h \end{matrix} \right\} \{\Im_h^{lS}(\mathbf{r}) \otimes \Im_Q(\mathbf{a})\}_{jM}$$

$$\Re^{LS}_{jM}(\mathbf{R}) = \sum_{l,Q,h,l+Q=h} (-1)^{S+l+h} \sqrt{\frac{(2L+1)!(2h+1)!}{(2l)!(2Q)!}} \left\{ \begin{matrix} l & Q & L \\ j & S & h \end{matrix} \right\} \{\Im^{lS}_{h}(\mathbf{r}) \otimes \Re_{Q}(\mathbf{a})\}_{jM}$$

Здесь

$$\Im^{LS}_{jM}(\mathbf{r}) = r^{L} Y^{LS}_{jM}(\theta, \varphi), \Re^{LS}_{jM}(\mathbf{r}) = r^{-(L+1)} Y^{LS}_{jM}(\theta, \varphi),$$

частные тензорные решения уравнения Лапласа с особенностью на бесконечности и с особенностью в нуле соответственно.

В третьей главе на основе результатов, полученных в предыдущих строятся инвариантные разложения силовых функций электромагнитного взаимодействия пространственных зарядовых и токовых распределений. Где зарядовое распределение представляет скалярное взаимодействие, а токовое распределение - векторное. Исследуются свойства силовой функции, зависящие как от симметрии тела, так и от симметрии структуры силового поля. Для попарного взаимодействия зарядовых распределений строятся инвариантные представления силы и момента сил.

Используя теорию потенциала и разложение функции Грина скалярного уравнения Лапласа в ряд на регулярные и иррегулярные функции, опираясь на свойства скалярного произведения двух неприводимых тензоров и применяя теорему сложения для скалярных решений уравнения Гельмгольца удается представить выражение силовой функции взаимодействия в виде, который удобен для исследования

$$U_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{l,n}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{(2l+2n)!}{(2l)!(2n)!}} \left(\{I_l(1) \otimes I_n(2)\}_{l+n} \Re_{l+n}(\mathbf{R}) \right).$$

При получении данного выражения не вводилась система координат, и сам вид разложения - скалярное произведение инвариантных объектов - показывает, что они представляют собой инварианты. Каждый член в данном выражении можно трактовать как взаимодействие мультиполей разных порядков сгустков зарядов 1 и 2. Физический смысл неприводимого тензора I_l определяется при взятии интеграла

$$I_l = \int_V \rho J_l(\mathbf{r}) dV$$

при последовательной подстановки $l = 0, 1, 2$, получаем, что I_0 – заряд распределенный в объеме сгустка, I_1 – дипольный момент и так далее.

Сила и момент, действующие в системе двух сгустков зарядов получается нахождением вариации силовой функции при бесконечно малом изменении, соответственно сила получается после нахождения вариации при бесконечно малом изменении δR,

$$F_l = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{l,n}(-1)^n\sqrt{\frac{(2l+2n+1)!(l+n+1)(2l+2n+3)}{3(2l)!(2n)!}}$$
$$\{\{I_l(1)\otimes I_n(2)\}\cdot\Re_{l+n+1}(\mathbf{R})\}_l,$$

а момент сил при нахождении вариации силовой функции при бесконечно малом повороте

$$M_1(1) = \frac{i}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{l,n}(-1)^n\sqrt{\frac{(2l+2n+1)!l(l+1)(2l+1)}{3(2l+1)!(2n)!}}$$
$$\{I_l(1)\otimes\{I_n(2)\otimes\Re_{l+n}(\mathbf{R})\}_l\}_1.$$

Для нахождения инвариантного разложения силовой функции взаимодействия двух объемных токовых распределений (что представляет собой векторное взаимодействие) используется разложение функции Грина векторного уравнения Лапласа на регулярные $\Im^L_{lq}(\mathbf{r})$ и иррегулярные $\Re^L_{lq}(\mathbf{r})$ шаровые векторы, понятие векторного мультипольного момента

$$\mathfrak{M}^L_{lq}(1) = \int(\mathbf{j}(1)\Im^L_{lq}(\mathbf{r}))dv,$$

и применяется теорема сложения тензорных решений уравнения Гельмгольца.

Общее выражении для энергии взаимодействия токовых распределений имеет вид

$$V_M = -\frac{\mu_0}{8\pi}\sum_{l,n}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{(2l+2n)!ln}{(2l+1)!(2n)!(l+1)(n+1)}}$$
$$(\{\mathfrak{M}_l(1)\otimes\mathfrak{M}_n(2)\}_{l+n}\cdot\Re_{l+n}(\mathbf{R})),$$

которое можно трактовать как взаимодействие векторных мультиполей одного токового распределения с полем, создаваемым другим токовым распределением. Это выражение можно обобщить на попарное взаимодействие N

пространственных токовых распределений. В качестве примера рассматривается задача о взаимодействие произвольно расположенных витков с током.

Выражение энергии для случая произвольного расположения токовых витков представляется в компактном виде:

$$V_M = \frac{\mu_0 \pi I_a I_b}{2} \sum_{l,n,q} (-1)^{n-q} \frac{(l+n)!}{l!} \sqrt{\frac{ln}{(l+1)(n+1)(n+q)(n-q)}} \frac{a^{l+1} b^{n+1}}{r^{l+n+1}} \times$$
$$\times Y_{l1}(\frac{\pi}{2}, 0) Y_{n1}(\frac{\pi}{2}, 0) Y_{nq}(\mathbf{e}_2) Y_{l+n-q}(\mathbf{e}_r).$$

Четвертая глава посвящена демонстрации использования математического аппарата неприводимых тензоров при построении силовой функции взаимодействия твердого тела с полем произвольной физической природы и получении осредненных эволюционных уравнений динамики твердого тела в силовых полях произвольной природы.

В общем случае, движение твердого тела описывается системой уравнений

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}, m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{M}$ – момент внешних сил, $\mathbf{F}$ – внешние силы, $\mathbf{v}$ – скорость центра масс, $\mathbf{K}$ – кинетический момент.

Законы связаны, так как не могут применяться независимо один от другого. Действительно, сила $\mathbf{F}$ зависит от углов поворота тела, от угловых скоростей, определенных законом кинетического момента и, наоборот, момент сил $\mathbf{M}$ зависит от положения центра масс, его скорости, которые определяются из закона движения центра масс.

Силовая функция, описывающая движение твердого тела под действием произвольных моментов сил M_i, имеет вид

$$V(\alpha', \beta', \gamma') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^{l} \sum_{n=-l}^{l} a_{mn}^{*l} D_{mn}^{l}(\alpha', \beta', \gamma'),$$

где

$$a_{mn}^{*l} = \frac{2l+1}{8\pi^2} \int V(\Theta) D_{mn}^{*l}(\Theta) d\Theta.$$

Процедура выведения уравнений движений твердого тела в переменных K – вектор кинетического момента, ρ, σ – сферические углы, характеризующие положение вектора кинетического момента и углы Эйлера α, β, γ, состоит в следующем:

- Определение проекции уравнения движения вектора кинетического момента на оси координат системы, связанной с кинетическим моментом;

- Нахождение проекции абсолютной угловой скорости тела на оси координат, связанной с твердым телом.

С учетом того, что моменты сил порождаются силовой функцией, система уравнений в общем виде:

$$\dot{K} = \frac{\partial V}{\partial \alpha}; K \sin \rho \dot{\rho} = \frac{\partial V}{\partial \alpha} \cos \rho - \frac{\partial V}{\partial \sigma}; K \sin \rho \dot{\sigma} = \frac{\partial V}{\partial \rho};$$

$$\dot{\beta} = K \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) + \frac{1}{K \sin \beta} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{\partial V}{\partial \gamma} \right);$$

$$\dot{\gamma} = K \cos \beta \left(\frac{1}{I_3} - \frac{\cos^2 \gamma}{I_1} - \frac{\sin^2 \gamma}{I_2} \right) + \frac{1}{K \sin \beta} \frac{\partial V}{\partial \beta};$$

$$\dot{\alpha} = K \left(\frac{\cos^2 \gamma}{I_1} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_2} \right) - \frac{1}{K} \frac{\partial V}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \rho - \frac{1}{K} \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial V}{\partial \beta}.$$

Первые три уравнения системы описывают изменение вектора кинетического момента по величине и направлению, остальные три – движение тела относительно кинетического момента.

Данные выражения применяются в задаче исследования Лунно-Солнечной прецессии и нутации земной оси, как пример задачи о движении твердого тела под действием сил и моментов сил потенциального характера.

Исследуются угловые движения твердого тела в гравитационном поле N – притягивающих центров, которые двигаются по разным эллиптическим орбитам и не взаимодействуют друг с другом.

Силовая функция взаимодействия твердого тела с двигающимися точечными массами с точностью до кубов обратных расстояний до притягивающих масс имеет вид:

$$V = f \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{R_i^3} \left(I_2 \cdot Y_2 \left(\mathbf{e}_{R_i} \right) \right) = \sum_{i=1}^{N} V_i.$$

В формуле f– гравитационная постоянная, M_i– масса i притягивающей точки, I_2 – неприводимый тензор инерции несферичного тела, $Y_2(\mathbf{e}_{R_i})$ – сферическая функция, определяющая положение радиус-вектора $\mathbf{R}_i$ материальной точки. Выражение в круглых скобках скалярное произведение неприводимых тензоров.

Выражение силовой функции через фазовые переменные задачи имеет вид:

$$V_i = \frac{M_i f (1 + e\cos\nu_i)^3}{P_i^3} \sum_{m,n,p,s} I_{2p}^{*} D_{mn}^{2}(\sigma,\rho,0) D_{mn}^{2}(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$D_{ms}^{2*}(\Omega_i - \pi/2, I_i, \omega_i + \pi/2) Y_{2s}(\pi/2, \nu_i),$$

здесь a–большая полуось эллипса, P – фокальный параметр, e - эксцентриситет эллипса орбиты, Ω_i – долгота восходящего узла, I_i – наклон орбиты к экватору, ω_i – аргумент перигея, ν_i – истинная аномалия, $\mathbf{K}$ – модуль вектора кинетического момента, углы ρ и σ, характеризующие положение вектора кинетического момента относительно опорной системы координат.

После процедуры осреднения по свободному движению твердого тела Эйлера -Пуансо, осредненная функция примет вид:

$$\langle V_i\rangle = \frac{M_i f (1 + e\cos\nu_i)^3}{P_i^3} N_G \sum_{m,s} D_{m0}^{2}(\sigma,\rho,0) D_{ms}^{2*}(\Omega_i - \pi/2, I_i, \omega_i + \pi/2) Y_{2s}(\pi/2, \nu_i).$$

Уравнения, описывающие изменение вектора $\mathbf{K}$ в пространстве для i-го члена силовой функции с учетом эволюции орбит имеют вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = -K_{\Omega_i}\sin I_i \cos(\omega_i + \sigma) - \frac{1}{K\sin\rho}\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial\sigma},$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = K_{\Omega_i}(\sin I_i \operatorname{ctg}\rho \sin(\omega_i + \sigma) - \cos I_i) - K_{\omega_i} + \frac{1}{K\sin\rho}\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial\rho},$$

$$\frac{d\nu_i}{dt} = \frac{\sqrt{fP_i}}{(1 + e_i\cos\nu)^2}.$$

Эта система в общем случае не интегрируется. Поэтому функцию $\langle V_i\rangle$ необходимо осреднить по времени t. полученное выражение

$$\langle V_i\rangle_{A,t} = -\frac{\omega_i^2}{2(1-e_i^2)^{3/2}\omega_1} N_G \sum_{m} D_{mn}^{2}(\sigma,\rho,0)\, D_{mn}^{2}(\Omega_i - \pi/2, I_i, \omega_i + \pi/2) =$$
$$= -\frac{3}{4}\frac{\omega_i^2}{\omega_1}\frac{N_G}{(1-e_i^2)^{3/2}}\left[\cos\rho\cos I_i - \sin\rho\sin I_i\sin(\sigma + \Omega_i)\right]^2.$$

которое при подстановки в систему уравнений, описывающих изменение кинетического момента позволяет в явном виде получить эволюционные уравнения вектора кинетического момента в гравитационном поле N масс, которые движутся по эллиптическим орбитам разных форм.

Полученные выражения используются для определения Лунно-Солнечной прецессии и нутации земной оси. Влияние Солнца на Землю описывается выражением:

$$\langle V_{\odot}\rangle = -\frac{3}{4}\frac{\omega_{\oplus}^2}{\omega_L}N_G\frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}\cos^2\rho.$$

Влияние Луны на Землю:

$$\langle V_L\rangle = -\frac{3}{4}\frac{\omega_L}{(1-e^2)^{3/2}}\frac{m_L}{m_L+M_{\oplus}}N_G\left[\cos\rho\cos I_i - \sin\rho\sin I_i\sin(\sigma+\Omega_i)\right]^2.$$

Уравнение, описывающее прецессию земной оси вокруг оси эклиптики на постоянном расстоянии от оси эклиптики:

$$\rho = \rho_0, \frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = 2\left(K_L + K_{\odot}\right)\cos\rho_0,$$

где

$$K_L = \frac{3}{4}\frac{\omega_L}{(1-e^2)^{3/2}}\frac{m_L}{m_L+M_{\oplus}}N_G, K_{\odot} = \frac{3}{4}\frac{\omega_{\oplus}^2}{\omega_L}\frac{N_G}{(1-e^2)^{3/2}}$$

Из-за прецессии меняется положение небесного полюса - той точки, вокруг которой, как нам кажется, происходит суточное вращение звезд. В настоящее время небесный полюс близок к Полярной звезде. Период прецессии, найденный в работе, получается ≈ 25300 лет.

Нутация земной оси определяется формулами

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -2K_L\cos\rho_0\sin I\cos(\omega - K_{\Omega})\tau$$

$$\frac{d\delta\sigma}{d\tau} = 2K_L\sin I\frac{\cos 2\rho_0}{\sin\rho_0}\frac{\sin(\omega-K_{\Omega})\tau}{\omega - K_{\Omega}}.$$

Поскольку $\omega \ll |K_{\Omega}|$, нутация происходит с периодом $\sim \frac{2\pi}{|K_{\Omega}|}$, то есть с периодом прецессии лунной орбиты. Этот период равен $\sim 18,6$ лет. Если прецессия земной оси вызвана совместным влиянием гравитационных моментов Луны и Солнца, то нутация почти исключительно влиянием прецессии лунной орбиты.

Пятая глава посвящена расчету силовых характеристик подвеса диамагнитного ротора произвольной формы в магнитном поле. Левитация предметов в магнитном поле важна для множества практических приложений.

Она открывает новые возможности для управления биологическими объектами, для сепарации нанотрубок, полимеров, обладающих различной плотностью, выращивания белковых кристаллов размерами до 1 cm, для синтеза новых материалов и многого другого.

Энергия взаимодействия диамагнитного ротора произвольной формы с магнитным полем произвольной конфигурации при условии, что магнитная восприимчивость диамагнетиков мала, находится по формуле:

$$W = -\frac{\chi\mu_0}{2}\int\limits_V H_0^2 dV,$$

в которой H_0^2 - квадрат напряженности магнитного поля, которое было до внесения в это поле диамагнитного ротора. Основная сложность состоит в вычислении величины напряженности магнитного поля при условии размеров ротора и произвольности поверхности ротора.

Напряженность магнитного поля удобно представить через скалярное произведение функций c_l, зависящих от коэффициентов разложения поля и и вектора смещения тела относительно центра подвеса

$$H_0^2 = \sum_{l,\acute{l},L}\sqrt{\frac{(l+\acute{l}+L+1)!(l+\acute{l}-L)!}{(l+\acute{l}+L-1)!(l+\acute{l}-L-2)}}C^{L0}_{l-10\acute{l}-10}r^{l+\acute{l}-2}\left(\left\{c_l\otimes c_{\acute{l}}\right\}_L\cdot Y_L(\acute{\mathbf{r}})\right).$$

При подстановки данного выражения в формулу для энергии, получается общее выражение энергии взаимодействия произвольного по форме и размерам диамагнитного ротора с произвольным магнитным полем

$$W = \frac{\mu_0\chi}{4}\sum_{l,\acute{l},L}\sqrt{\frac{(l+\acute{l}+L+1)!(l+\acute{l}-L)!}{(l+\acute{l}+L-1)!(l+\acute{l}+L-2)!}}C^{L0}_{l-10\acute{l}-10}r^{l+\acute{l}-2}$$
$$\left(\{c_l\otimes c_{\acute{l}}\}_L\cdot\int\limits_V \acute{r}^{l+\acute{l}-2}Y_L(\mathbf{e_r})dV\right),$$

где в круглых скобках приведено скалярное произведение двух неприводимых тензоров. Тензор $\{c_l\otimes c_{\acute{l}}\}_L$ - связан с полем, а $\int \acute{r}^{l+\acute{l}-2}Y_L(\mathbf{e_r})dV$ - с телом.

Потенциальную энергию удобно представить через сумму энергий

$$W = W_0(r) + W_\varepsilon(r,\theta),$$

где первый член суммы - это энергия взаимодействия сферического ротора с полем, а второй член - это энергия взаимодействия, обусловленная несферичностью. Оба слагаемых энергии выражаются через коэффициенты разложения поля, что удобно для нахождения области устойчивости при различных конфигурациях поля. Для симметричного эллипсоида, радиус средней сферы которого b, выражение для энергии через коэффициенты разложения поля:

$$W = -\frac{\mu_0 \chi}{2} \sum_{l} \frac{l}{2l+1} b^{2l+1} (a_l \cdot a_l) -$$

$$- \frac{\mu_0 \chi}{5} \sum_{l,\acute{l},s} \sqrt{\frac{(l+\acute{l}+3)!(l+\acute{l}-2)!}{(l+\acute{l}-3)!(l+\acute{l}+2)!}}$$

$$C^{20}_{l-10\acute{l}-10} b^{l+\acute{l}+1} \left(\{a_l \otimes a_{\acute{l}}\}_{2s} \cdot \varepsilon_{2s} \right),$$

здесь ε_{ks} - неприводимый тензор формы тела, который характеризует геометрию ротора. При этом ε_{2s} отвечает эллипсоидальности ротора, ε_{3s} – грушевидности ротора.

Устойчивость состояния равновесия определяется согласно теореме Лагранжа, следуя которой потенциальная энергия в состоянии равновесия должна иметь изолированный минимум. Требование минимума выполняется при условии положительной определенности матриц вторых производных функции потенциальной энергии в состоянии равновесия. Условия положительной определенности матриц вторых производных позволяет определить область устойчивости для диамагнитного эллипсоида. Для симметричного эллипсоида получено несколько состояний равновесия. Устойчивое состояние равновесия $\{x_0 = 0, z_0 = z_0, \beta_0 = \frac{\pi}{2}\}$ и неустойчивое $\{x_0 = 0, z_0 = z_1, \beta_0 = 0\}$. Для устойчивого состояния равновесия рассчитана область устойчивости. В терминах размеров витка и размеров средней сферы ротора она для отношения радиуса средней сферы ротора к радиусу токового витка $b/d = 0.8$ лежит в пределах $0.408d \leq z \leq 0.597d$. Данные результаты могут быть использованы для конструирования различных приборов, использующих явление левитации.

Использование общего выражения энергии взаимодействия диамагнитного ротора с магнитным полем подвеса удобно для вычисления силы, действующей со стороны ротора на диамагнитный ротор. Процедура вычисления силы основана на нахождении первой вариации энергии при малом смещении ротора из положения равновесия. Выражение силы действующей на диамагнитный эллипсоид представляется в виде:

$$F_{1\mu} = 2\sum_{l,\acute{l},L,h}(-1)^h\Big[\frac{(2h+1)(2L+1)(l+\acute{l}-h+2)!(l-\acute{l}+h+1)!}{3(\acute{l}-l+h-1)!(h-L+1)!(L-h+1)!}$$
$$\frac{(l+\acute{l}-h+1)!(h+L-1)!(\acute{l}-l+L)!}{(L+h+2)!(l+\acute{l}-L-2)!(l-\acute{l}+L)!(l+\acute{l}+L-1)!}\Big]^{1/2}$$
$$C^{L0}_{l-10\acute{l}-10}\acute{A}_{L0}\{\{c_{l+1}\otimes c_{\acute{l}}\}_h\otimes Y_L\}_{1\mu}.$$

Выражение силы, представленное в данном виде, удобно для определения перегрузочной способности ротора в магнитном поле, так как сила представляется через коэффициенты разложения поля, то данная формула применима для различных конфигураций поля. Это позволяет определить конфигурацию поля, обеспечивающую максимальную область устойчивости.

Эксперименты по вывешиванию живых организмов (живые организмы - диамагнитные тела) в магнитном поле указали на интересные закономерности поведения их в магнитном поле. Это позволило рассмотреть задачу о поведение ротора в поле подвеса при периодическом изменении формы ротора. То есть рассматривается диамагнитный эллипсоид, который меняет форму периодически с вытянутого на сплюснутый. В расчетах полагалось, что ось симметрии ротора совпадает с осью симметрии поля. Уравнение движения тела имеет вид:

$$m\ddot{z} = \frac{dW_0(z)}{dz} + \frac{dW_\varepsilon(z)}{dz}.$$

Исследование данного уравнения позволяет рассмотреть динамику диамагнитного эллипсоида в поле кругового тока при периодическом изменении формы тела. Начальное положение тела задается в точке состояния равновесия $z(0) = z_0$. Анализ графических зависимостей, отражающих динамику ротора при периодическом изменении формы ротора, показывает, что колебания формы являются причиной возбуждения колебательных движений тела, которые могут привести к выходу ротора из области устойчивости.

В заключении формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

На основе математического аппарата неприводимых тензоров приведено математическое описание и исследование взаимодействия твердого тела с силовым полем различной физической природы:

- Получена теорема сложения для тензорных решений уравнения Гельмгольца. Общие формулы преобразований для тензорных решений уравнения Гельмгольца позволяют в частном случае получить формулы преобразования для скалярных и векторных решений уравнения Гельмгольца.

- Записаны инвариантные разложения силовой функции взаимодействия объемных зарядовых и токовых распределений.

- Найдены инвариантные представления силы и момента силы попарного электромагнитного взаимодействия двух объемных зарядовых распределений.

- Записана силовая функция взаимодействия диамагнитного ротора произвольной формы с магнитным полем произвольной конфигурации.

- Найдена сила, действующая со стороны подвеса на произвольный по форме ротор.

- Найдена область устойчивости для диамагнитного симметричного эллипсоида однородного по составу в поле кругового тока.

- Проанализировано поведение ротора в поле подвеса при периодическом изменении формы ротора.

Список публикаций

[1] *Урман, Ю. М.* О левитации диамагнитных тел в магнитном поле / Ю. М. Урман, Н. А. Бугрова, Н. И. Лапин // *Журнал Технической Физики.* — 2010. — № 9. — С. 25–33.

[2] *Урман, Ю. М.* Применение метода неприводимых тензоров для вычислений силовых характеристик подвеса диамагнитного шара в магнитном поле произвольной конфигурации / Ю. М. Урман, Н. А. Бугрова, Н. И. Лапин // *Научное обозрение.* — 2010. — № 1. — С. 27–31.

[3] *Урман, Ю. М.* Динамика левитирующего ротора в магнитном поле / Ю. М. Урман, Н. А. Бугрова, Н. И. Лапин // Сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте 2011. Том 8. Физика и математика, Химия. — Одесса: Черноморье, 2011. — С. 63–65.

[4] *Бугрова, Н. А.* Устойчивое удержание диамагнитного шара в поле системы круговых токов / Н. А. Бугрова, Н. И. Лапин // Материалы VI международной научно–практической конференции Научный прогресс на рубеже тысячелетий–2010. — г. Прага, 2010. — С. 6–10.

[5] *Урман, Ю. М.* Проблемы левитации тел и ее применение / Ю. М. Урман, Н. И. Лапин // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2011. — № 4. — С. 339–341.

[6] *Урман, Ю. М.* Теоремы сложения тензорных решений уравнения Гельмгольца / Ю. М. Урман, Н. И. Лапин // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского серия Механика.* — 2011. — № 5(1). — С. 137–143.

[7] *Урман, Ю. М.* Динамика диамагнитных и свехпроводящих тел в магнитном поле / Ю. М. Урман, Н. И. Лапин // Устойчивость, управление и динамика твердого тела Тезисы докладов XI Международной конференции. — Донецк: Институт прикладной математики и механики НАНУ, 2011. — С. 116–117.

[8] *Лапин, Н. И.* Об устойчивом состоянии равновесия диамагнитного тела в поле магнитного подвеса / Н. И. Лапин // Подготовка специалистов на технологических факультетах педагогических вузов: Материалы Международной научнопрактической конференции, посвященной 25-летию технолого-экономического факультета НГПУ. — Н. Новгород, 2009. — С. 252–255.

[9] *Лапин, Н. И.* Безопорное удержание диамагнитного тела в магнитном поле / Н. И. Лапин // Современные проблемы математики и механики: Материалы Всероссийской молодежной научной конференции Томского государственного университета. — Изд-во Томского университета, 2010. — С. 105–108.

[10] *Лапин, Н. И.* Теоретическое исследование области устойчивости диамагнитных тел в магнитном поле / Н. И. Лапин // Сборник материалов Четвертой Всероссийской молодежной научно-инновационной школы Математика и математическое моделирование. — г. Саров, 2010. — С. 77–81.

[11] *Лапин, Н. И.* Применение метода неприводимых тензоров для описания взаимодействия диамагнитного тела с магнитным полем / Н. И. Лапин // XVI нижегородская сессия молодых учёных. Математические науки: материалы докладов. — Н. Новгород, 2010. — С. 34–35.

[12] *Лапин, Н. И.* Представление энергии взаимодействия токовых витков / Н. И. Лапин // ВНКСФ-17, Материалы Всероссийской конференции студентов физиков. — Екатеринбург, 2011. — С. 58–60.

[13] *Лапин, Н. И.* О левитации произвольного по форме диамагнитного тела в магнитном поле / Н. И. Лапин // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского серия Механика.* — 2011. — № 1. — С. 133–138.

[14] *Лапин, Н. И.* Метод вторичных источников для расчета силовых характеристик неконтактного подвеса тела в магнитном поле / Н. И. Лапин // Будущее Технической Науки Сборник материалов X международной молодежной научно-технической конференции. — НГТУ им. Р.Е. Алексеева.- Нижний Новгород, 2011. — С. 380.