

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 539.3



САВЕНКОВА МАРГАРИТА ИВАНОВНА

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ
К МАТЕРИАЛАМ С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА 2013 г.

Работа выполнена на кафедре механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	Шешенин Сергей Владимирович <i>доктор физико-математических наук, профессор</i>
Официальные оппоненты:	Димитриенко Юрий Иванович <i>доктор физико-математических наук, профессор</i> Лурье Сергей Альбертович <i>доктор технических наук, профессор</i>
Ведущая организация:	Институт механики сплошных сред УрО РАН

Защита состоится 17 мая 2013 года в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Главное здание, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 15 апреля 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.91,
доктор физико-математических наук, профессор



С.В. Шешенин

Общая характеристика работы

Перспективное развитие моделирования в механике композитов связано с необходимостью в эффективном описании нелинейных свойств композиционных материалов на уровне структуры материала. Среди нелинейных свойств можно выделить пластические свойства, а также нелинейные свойства, вызванные поврежденностью. Наиболее строгим, с математической точки зрения, и широко используемым подходом для анализа деформирования на уровне структуры композита является асимптотический метод осреднения, основанный на комбинировании решения локальных задач, определенных на уровне структурной неоднородности материала, с решением глобальной (осредненной) задачи для эквивалентной однородной среды. Главной целью данной работы является разработка эффективного подхода для решения нелинейных квазистатических задач и задач для макроскопически однородных непериодических сред на основе асимптотического метода осреднения.

Ввиду особенности представления искомого решения наибольшее распространение метод осреднения получил для линейных задач, описывающих периодически неоднородную среду. Представительной областью такой среды служит ячейка периодичности, а условия на ее границе определяются условиями периодичности структуры. В этом случае эффективность метода основывается на том, что локальные задачи достаточно решать только на одной ячейке.

Однако линейность физических свойств, как и периодичность структуры, является всего лишь частным случаем, далеко не всегда выполняющимся на практике. В случае нелинейной задачи средние по представительным областям свойства материала зависят от глобального решения как от параметра, что при численной реализации влечет за собой сложности практической реализации. Для случая непериодической среды к тому же возникает вопрос о формулировке условий на границе представительной области.

Поэтому **актуальность исследования**, проведенного в данной работе, обу-

словлена потребностью в развитии и эффективном применении асимптотического метода осреднения для нахождения напряженно-деформированного состояния композитов с непериодической структурой и физической нелинейностью материальных свойств.

Цели работы

1. Развитие варианта асимптотического метода осреднения, удобного для численной реализации на случай композиционных материалов с физически нелинейными свойствами, в том числе для случая поперечного упругопластического изгиба композиционных пластин, периодических в плане.
2. Создание численной реализации предложенной методики осреднения с использованием технологии параллельного программирования MPI.
3. Представление варианта метода осреднения для неоднородных сред с непериодической структурой.
4. Исследование эффективности разработанной численной реализации метода осреднения на примере ее применения для исследования упругих эффективных модулей сплава и решения краевой задачи упругопластического изгиба неоднородных по толщине пластин.

Научная новизна

1. Обоснован новый вариант асимптотического метода осреднения для решения нелинейных задач и эффективный численный алгоритм его реализации. Предложенный вариант асимптотического метода осреднения развит на случай пластин из композиционных материалов, периодических в плане и обладающих физически нелинейными свойствами.
2. Разработана эффективная численная реализация предложенной методики осреднения с использованием технологии параллельного программирования MPI.
3. Предложен вариант асимптотического метода осреднения на случай неоднородных непериодических структур на основе метода перехлеста областей.

Достоверность полученных результатов

Все результаты представленной диссертационной работы получены с использованием строго обоснованных математических и численных методов, а также методов механики твердого деформируемого тела. Достоверность результатов определяется кроме того физической и математической корректностью постановок задач, а также математической строгостью асимптотического метода осреднения. Достоверность полученных результатов обосновывается, в том числе сравнением с результатами других вычислительных программ.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит как теоретический, так и прикладной характер. Разработанные методы имеют важное прикладное значение для отраслей науки и техники, использующих композиционные материалы, так как позволяют быстро и точно определять их напряженно-деформированное состояние.

Созданные автором алгоритм и программная реализация метода осреднения могут самостоятельно применяться для расчета свойств пластин из композиционных материалов, в частности, обладающих свойством пластичности или наличием поврежденности. Алгоритм и его программная реализация могут служить моделью для разработки аналогичных параллельных программных реализаций методики осреднения, представленной в диссертации, для ряда других задач.

Апробация результатов

Основные результаты и положения диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах и конференциях:

- Вторая международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы», МГСУ, г. Москва, 2009 г.
- Научная конференция «Ломоносовские чтения» МГУ им. М.В. Ломоносова, секция механики, г. Москва, 2009-2012 гг.
- Семинар Технического Университета Берлина TU Berlin «Mechanik-Seminar» под

руководством проф. Müller W.H., 16 июня 2010 г.

- Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством доктора физ.-мат. наук, проф. Победри Б.Е.
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН, доктора физ.-мат. наук, проф. Ломакина Е.В.
- Научно-исследовательский семинар им. А.А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством доктора физ.-мат. наук, проф. Кийко И.А.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Первая глава включает 3 параграфа, вторая глава – 4 параграфа и третья глава – 4 параграфа. Общий объем работы составляет 131 страницу, включает 63 рисунка, 10 таблиц, 234 библиографические ссылки в списке использованной литературы.

Содержание работы

Введение

Введение работы посвящено описанию предметной области диссертации, обзору развития и применения асимптотического метода осреднения для описания свойств композиционных материалов. Также во введении сформулированы основная цель диссертации и ее актуальность. Дополнительные ссылки на другие работы в этой области даны в главах по ходу изложения материала.

1. Эффективные свойства сплавов

Глава 1 посвящена изучению упругих эффективных свойств сплавов, использующихся в процессе монтажа печатных плат.

1.1. Процесс диффузии в двухфазных сплавах

Параграф является вводным и описывает процессы, происходящие в двухфазном

сплаве после его затвердевания и приводящие к изменению его структуры. Для их исследования профессором Müller W.H. и его коллегами из Технического университета Берлина TU Berlin была разработана численная модель, основанная на уравнении диффузии. На рисунках ниже представлены примеры смоделированных процессов изменения структуры сплава: Рис. 1.1(а) и Рис. 1.1(б) – для оловянно свинцового, Рис. 1.1(в) – для сплава меди и серебра.

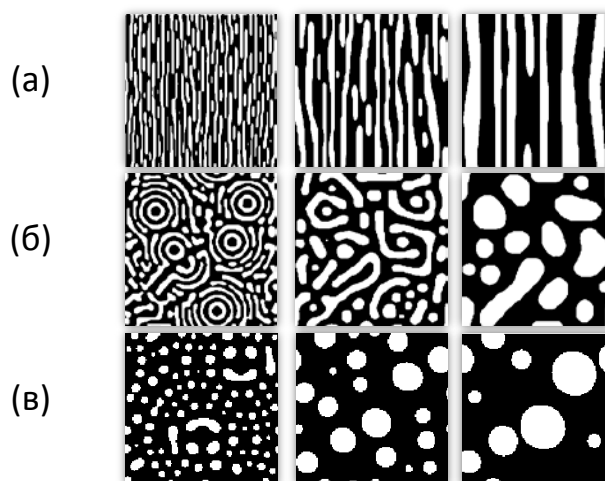


Рис. 1.1 Модельный процесс изменения микроструктуры в сплавах

Указанные рисунки иллюстрируют представительные области сплава, характерный размер которых составляет 1.5 микрона, а размер всего образца – 0.5 см (1 микрон составляет 0.0001 см).

1.2. Зависимость эффективных модулей сплава от изменения микроструктуры

В данном параграфе описывается схема нахождения упругих эффективных модулей сплава, основанная на методе осреднения (в нулевом приближении) и лежащая в основе авторской вычислительной программы.

Для получения эффективных модулей в представительной области сплава V_{RV} решалась стандартная задача

$$\begin{aligned} (C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l})_{,j} &= 0, \\ u_i|_{\partial V_{RV}} &= \varepsilon_{ij}^0 x_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где ∂V_{RV} – граница представительной области V_{RV} , ε_{ij}^0 – компоненты симметрично-

го тензора-константы, причем $\langle \underline{\varepsilon} \rangle_{V_{RV}} = \underline{\varepsilon}^0$. Задача (1) может быть сформулирована в любой другой области материала, превышающей V_{RV} .

Тогда эффективные модули сплава $\underline{C}^{eff}$ находятся из

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_{V_{RV}} = \underline{C}^{eff} : \langle \underline{\varepsilon} \rangle_{V_{RV}} \quad (2)$$

Полученные численные результаты для оловянно свинцового сплава (Рис. 1.1(a)) сравнивались с результатами аналитических формул модели слоистого композита, исходя из очевидной схожести их структур. Исследование показало слабую зависимость эффективных модулей от процесса изменения структуры сплава, а также близость численных и аналитических результатов. В работе приведены многочисленные графики, подтверждающие приведенные выводы.

1.3. Зависимость эффективных модулей от типа микроструктуры

Для дальнейшего исследования эффективных модулей в зависимости от структуры автором была написана программа моделирования представительной области двухфазного композита с различными типами структуры: регулярной и нерегулярной (Рис. 1.2(1)). Здесь под регулярными понимаются такие структуры, где центры включений (непересекающихся кругов белого цвета) расположены в узлах квадратной (Рис. 1.2(1a)) и треугольной сеток (Рис. 1.2(1б)). Под нерегулярными – структуры, где центры включений случайным образом отклонялись от узлов квадратной сетки (Рис. 1.2(1в)). В качестве компонентов композита рассматривались линейно упругие материалы, свойства которых отличались в 10 раз.

Идея моделирования процесса изменения структуры была такова, что одному и тому же значению концентрации материала включений соответствовали различные типы сеток и размеры включений. Например, в каждом столбце на Рис. 1.2(1) концентрация и размер включений одинаковы, но структура материала различна, а в каждой строке – структура одинакова, но различны концентрация и размер включений. Для каждого полученного таким образом набора образцов композита определялись эффективные модули.

В результате проведенного исследования, получено, что эффективные модули материала слабо зависят от рассматриваемых изменений структуры, но сильно зависят от изменения концентрации материала включений. Типичный график такой зависимости представлен на Рис. 1.2(2).

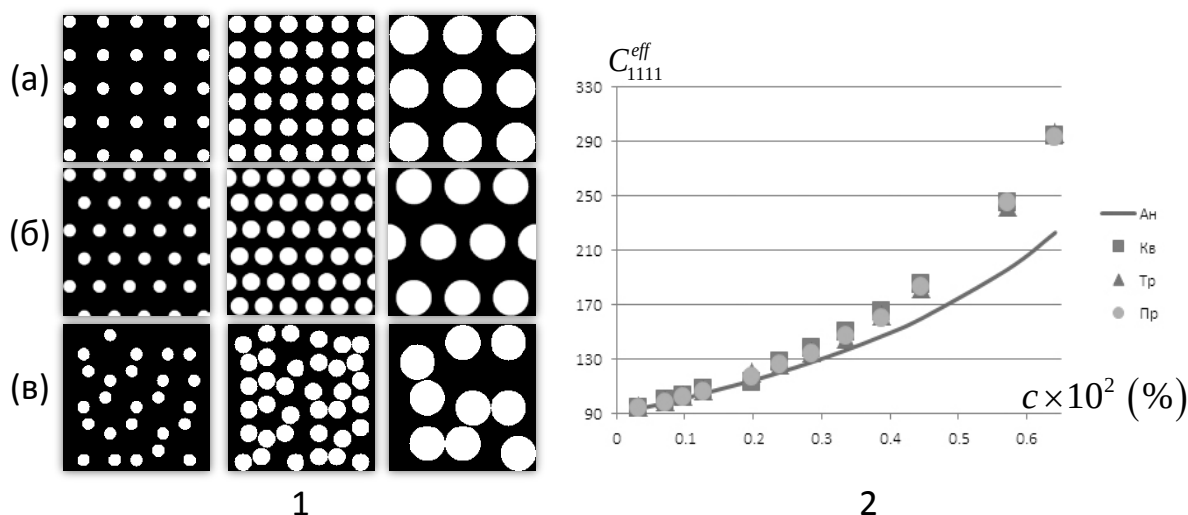


Рис. 1.2 (1) Структура модельных материалов; (2) Зависимость эффективных жесткостей композита от концентрации материала включения

В том числе было произведено сравнение полученных численных результатов с результатами аналитических формул, в качестве которых рассматривались формулы для волокнистых композитов. В результате получена их близость (около 5%) при концентрации материала включений не превышающей 20%.

Также произведено исследование, целью которого являлось изучение зависимости размера представительной области материала от его структуры. Получено, что область материала сохраняет свои представительные свойства в случае нерегулярной структуры при почти любом количестве включений. Для квадратной сетки это количество равно 4, а для треугольной – точного вывода сделать нельзя, но, зачастую, количество включений должно быть не меньше 4. В работе представлены графики, иллюстрирующие полученные результаты.

2. Вариант асимптотического метода осреднения для нелинейных задач

Глава 2 посвящена изложению варианта асимптотического метода осреднения для случая сред с физически нелинейными свойствами.

2.1. Постановка задачи

Рассматривался материал с определяющими соотношениями вида

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon) \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (3)$$

где точка обозначает дифференцирование по параметру нагружения. Тогда смешанная краевая нелинейная задача в области материала V с границей $\partial V = \partial V_1 \cup \partial V_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} (C_{ijkl}(\varepsilon) \dot{u}_{k,l})_{,j} + \dot{F}_i &= 0, \\ \dot{u}_i|_{\partial V_1} &= \dot{u}_i^0, \quad (C_{ijkl}(\varepsilon) \dot{u}_{k,l})|_{\partial V_2} = \dot{S}_i^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Подобная постановка возможна для теории течения, к ней также можно свести соотношения деформационной теории пластичности

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon}) \quad (5)$$

дифференцированием их по времени

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (6)$$

где $C_{ijkl}(\varepsilon) = \frac{\partial \sigma_{ij}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{kl}}$.

С помощью процедуры дискретизации по параметру нагружения задачу (4) можно свести к линейной относительно скоростей на каждом шаге нагружения. В этом случае для ее решения применим асимптотически метод осреднения.

2.2. Линеаризация и дискретизация по параметру нагружения

Для решения нелинейной задачи (4) использовался метод дискретизации по параметру нагружения, для чего перемещения $\vec{u}$ на шаге n определялись как

$$\vec{u}^{(n)}(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}, t_n), \quad (7)$$

тогда из (3)

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{(n)} \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad C_{ijkl}^{(n)} = C_{ijkl}(\varepsilon_u(\vec{u}^{(n)})). \quad (8)$$

Дискретизация процесса деформирования является фактически основным применяемым подходом при решении нелинейных задач в настоящее время.

В качестве примера в данной работе рассматривалась деформационная теория пластичности, определяющие соотношения которой имеют тип (5), но могут быть сведены к виду (6).

В этом случае для процесса активного нагружения на каждом шаге n верны соотношения

$$C_{ijkl}^{(n)} = \lambda^{(n)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^{(n)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} G \omega'^{(n)} \frac{e_{ij}^{(n)} e_{kl}^{(n)}}{\varepsilon_u^{(n)}}, \quad (9)$$

а для разгрузки

$$C_{ijkl}^{(n)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \text{const}, \quad (10)$$

где

$$\mu^{(n)} = G (1 - \omega^{(n)}), \quad 3\lambda^{(n)} = K - 2\mu^{(n)}, \quad \varepsilon_u^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij}^{(n)} e_{ij}^{(n)},$$

$$e_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)} - \frac{1}{3} \theta^{(n)}, \quad \theta^{(n)} = \varepsilon_{ii}^{(n)},$$

G – касательный модуль материала, K – модуль упругого расширения-сжатия, ω – функция малых упругопластических деформаций.

В результате после дискретизации по параметру нагружения на каждом шаге в области V , занимаемой материалом, имеем линейную относительно приращений вектора перемещений $\Delta \vec{u}$ задачу типа (дискретизация по явному методу Эйлера)

$$\left(C_{ijkl}^{(n)} \Delta u_k^{(n+1)}, l \right), j + \Delta F_i^{(n+1)} = 0,$$

$$\Delta u_i^{(n+1)} \Big|_{\partial V_1} = \Delta u_i^{0(n+1)}, \quad C_{ijkl}^{(n)} \Delta u_k^{(n+1)}, l n_j \Big|_{\partial V_2} = \Delta S_i^{0(n+1)}, \quad (11)$$

или (дискретизация по неявному методу Эйлера)

$$\left(C_{ijkl}^{(n+1)} \Delta u_k^{(n+1)}, l \right), j \Delta F_i^{(n+1)} = 0,$$

$$\Delta u_i^{(n+1)} \Big|_{\partial V_1} = \Delta u_i^{0(n+1)}, \quad C_{ijkl}^{(n+1)} \Delta u_k^{(n+1)}, l n_j \Big|_{\partial V_2} = \Delta S_i^{0(n+1)}, \quad (12)$$

где Δ означает приращение соответствующей величины.

Структура задач (11) или (12) такова, что на каждом шаге n может применяться метод осреднения, развитый для случая квазипериодических структур.

2.3. Развитие метода осреднения для квазипериодических структур

Краевая задача (4), решаемая, например, явным методом Эйлера (11), фактически сформулирована на ячейке периодичности $V_{\vec{\xi}}$ для фиктивной среды с определяющими соотношениями вида

$$\Delta \sigma_{ij}^{(n+1)} = C_{ijkl}^{(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \Delta \varepsilon_{kl}^{(n+1)}, \quad (13)$$

где $C_{ijkl}^{(n)}(\vec{x}, \vec{\xi})$ – известные функции быстрых и медленных координат. Поэтому она может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} & \left(C_{ijkl}^{(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \Delta u_k^{(n+1)},_l \right),_j + \Delta F_i^{(n+1)}(\vec{x}) = 0, \\ & \Delta u_i^{(n+1)} \Big|_{\partial V_1} = \Delta u_i^{0(n+1)}, \quad C_{ijkl}^{(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \Delta u_k^{(n+1)},_l n_j \Big|_{\partial V_2} = \Delta S_i^{0(n+1)}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (14)$$

что влечет за собой возможность применения асимптотического метода осреднения для ее решения.

Согласно методу осреднения решение (14) представляется в виде

$$\Delta u_k^{(n+1)}(\vec{x}, \vec{\xi}) = \Delta v_k^{(n+1)}(\vec{x}) + \sum_{m=1} \varepsilon^m N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \Delta v_{q_0}^{(n+1)},_{q_1 \dots q_m}(\vec{x}), \quad (15)$$

где $N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}$ – функции, описывающие локальные флуктуации на уровне структуры материала и подчиняющиеся условиям периодичности на границе области $V_{\vec{\xi}}$

$$\begin{aligned} & N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \Big|_{\partial V_{\vec{\xi}}^+} = N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \Big|_{\partial V_{\vec{\xi}}^-}, \\ & C_{ijkl}^{(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)},_l(\vec{x}, \vec{\xi}) n_j \Big|_{\partial V_{\vec{\xi}}^+} = C_{ijkl}^{(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)},_l(\vec{x}, \vec{\xi}) n_j \Big|_{\partial V_{\vec{\xi}}^-}. \end{aligned} \quad (16)$$

Главным отличием (14) и (15) от линейной задачи является зависимость функций $C_{ijkl}^{(n)}$ и $N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}$ от глобальных координат как от параметра. Средние свойства композита при этом, очевидно, также зависят от $\vec{x}$.

Подстановкой (15) в (14) получены локальные задачи для нахождения $N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}$ на ячейке периодичности для любого приближения метода m

$$P_{ijq_0 \dots q_{m+2}|j}^{(m+2)(n)} + P_{iq_{m+2}q_0 \dots q_{m+1}}^{(m+1)(n)} = h_{iq_{m+2}q_0 \dots q_{m+1}}^{(m+1)(n)}, \quad (17)$$

где приняты обозначения

$$P_{ijq_0 \dots q_{m+1}}^{(m+1)(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) = C_{ijkl}^{(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) N_{kq_0 \dots q_{m+1}|l}^{(m+1)(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) + C_{ijkq_{m+1}}^{(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}),$$

$$h_{ijq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}(\vec{x}) = \left\langle P_{ijq_0 \dots q_m}^{(m)(n)} \right\rangle_{V_{\vec{\xi}}}(\vec{x}),$$

$$g_{ijq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}(\vec{x}) = \left\langle C_{ijkl}^{(n)} N_{kq_0 \dots q_m}^{(m)(n)} \right\rangle_{V_{\vec{\xi}}}, l(\vec{x}).$$

Граничными условиями в (17) являются условия периодичности (16). Локальные задачи также зависят от $\vec{x}$ как от параметра, поэтому рассчитываются независимо друг от друга, что открывает возможность создания параллельного алгоритма их решения.

Получены глобальные уравнения равновесия для всех приближений метода

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta \sigma_{ij}^{(n+1)} \right\rangle_{V_{\vec{\xi}}}, j(\vec{x}) &= \sum_{m=0} \varepsilon^m \left(h_{ijq_0 \dots q_{m+1}}^{(m+1)(n)}(\vec{x}) \Delta v_{q_0 \dots q_{m+1}}^{(n+1)}(\vec{x}) \right), j + \\ &+ \sum_{m=1} \varepsilon^m \left(g_{ijq_0 \dots q_m}^{(m)(n)}(\vec{x}) \Delta v_{q_0 \dots q_m}^{(n+1)}, j(\vec{x}) \right) + \Delta F_i^{(n+1)}(\vec{x}) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В представленном виде метод осреднения позволяет удовлетворить глобальным граничным условиям только в нулевом приближении (как и в стандартном варианте)

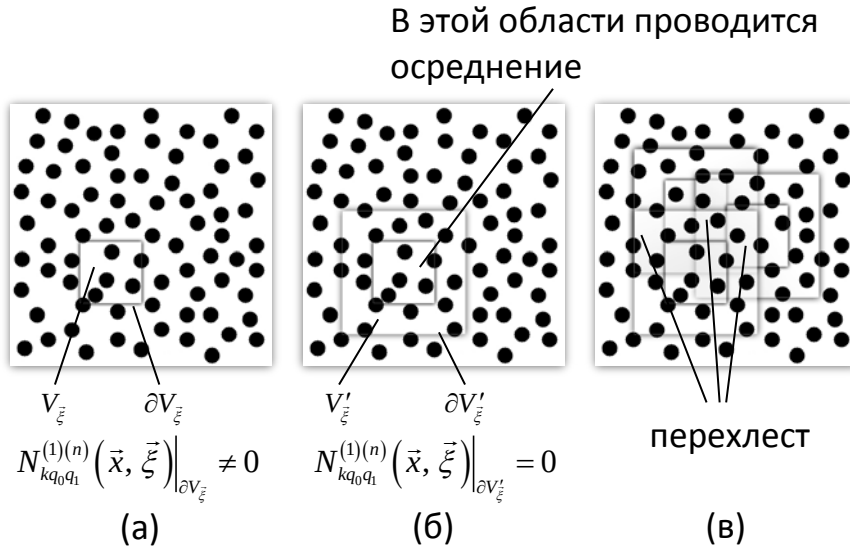
$$\begin{aligned} \Delta v_i^{(n+1)}(\vec{x}) \Big|_{\partial V_1} &= \Delta u_i^{0(n+1)}(\vec{x}), \\ h_{ijq_0 q_1}^{(1)(n)}(\vec{x}) \Delta v_{q_0 \dots q_1}^{(n+1)}, q_1(\vec{x}) n_j \Big|_{\partial V_2} &= \Delta S_i^{0(n+1)}(\vec{x}). \end{aligned} \quad (19)$$

В итоге, предлагаемая в работе методика осреднения для решения нелинейных задач, описывающих композиты с физически нелинейными свойствами, состоит в использовании линеаризации и дискретизации исходной задачи по параметру нагружения и применении к полученной задаче описанной процедуры асимптотического осреднения.

2.4. Вариант метода осреднения для макроскопически однородных непериодических структур

В работе предлагается также вариант метода осреднения в случае макроскопически однородного материала с непериодической структурой, удобный для численной реализации. Этот подход рассматривается в связи с проблемой постановки граничных условий для представительной области. В случае периодической структуры граничными условиями являются условия периодичности (16), для непериодической структуры они не имеют места.

Метод базируется на методе перехлеста областей и заключается в расширении представительной области $V_{\vec{\xi}}$ с границей $\partial V_{\vec{\xi}}$ до области $V'_{\vec{\xi}}$ с границей $\partial V'_{\vec{\xi}}$ (Рис. 2.1). При этом необходимая разница в размерах между $\partial V'_{\vec{\xi}}$ и $\partial V_{\vec{\xi}}$ зависит от структуры и должна определяться в расчетах. Для типа материала, рассмотренного на Рис. 2.1 она составляет несколько включений.



**Рис. 2.1 (а) Представительная область материала,
(б) ее расширенная область и (в) перехлест областей**

Рассматривается только нулевое приближение метода осреднения

$$\Delta u_k^{(n+1)}(\vec{x}, \vec{\xi}) = \Delta v_k^{(n+1)}(\vec{x}) + \varepsilon N_{kq_0q_1}^{(1)(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \Delta v_{q_0}^{(n+1)},_{q_1}(\vec{x}). \quad (20)$$

На «удаленной» границе $\partial V'_{\vec{\xi}}$ полагается, что

$$\Delta u_k^{(n+1)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \Big|_{\partial V'_{\vec{\xi}}} = \Delta v_k^{(n+1)}(\vec{x}), \quad (21)$$

при этом отбрасывается член порядка ε , что эквивалентно условию

$$N_{kq_0q_1}^{(1)(n)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \Big|_{\partial V_{\vec{\xi}}'} = 0.$$

Разница в граничных условиях порядка ε , она убывает вглубь области и на расстояниях порядка нескольких ε исчезает. При этом локальные задачи решаются в расширенной области $V_{\vec{\xi}}'$, но осреднение проводится без учета областей перехлеста в области $V_{\vec{\xi}}$.

Безусловно, такой подход увеличивает количество вычислений. Однако, использование современных вычислительных мощностей позволяет значительно ускорить процесс решения задач при реализации параллельного решения локальных задач.

3. Упругопластический изгиб пластин из композиционных материалов

Далее предложенная методика осреднения нелинейных задач развивается на случай упругопластического изгиба пластин, периодических в плане. Примерами таких пластин могут быть слоистые или гофрированные пластины.

3.1. Уравнения теории пластин

Рассмотрим пластину из композиционных материалов, обладающих свойством пластичности. Пусть на ее верхнюю поверхность действует сила $P(\vec{x})$. Пластина может быть закреплена, например, жестко или шарнирно.

Полагается, что процесс линеаризации задачи и ее дискретизации по параметру нагружения, описанный в §2 предыдущей главы, проведен вплоть до шага n . Тогда на шаге $n+1$ имеем уравнения равновесия для усилий и моментов в пластине в приращениях

$$\begin{aligned} \Delta T_{IJ}^{(n+1)},_J(\vec{x}) &= 0, \\ \Delta M_{IJ}^{(n+1)},_{IJ}(\vec{x}) &= \Delta P^{(n+1)}(\vec{x}), \end{aligned} \tag{22}$$

где $\Delta T_{IJ}^{(n+1)}$ и $\Delta M_{IJ}^{(n+1)}$ – приращения усилий и моментов в пластине, а $\Delta P^{(n+1)}$ – приращение силы, действующей на верхнюю плоскость пластины. Усилия и моменты получаются осреднением напряжений по ячейке периодичности. Для слоистой

пластины – это вертикальный отрезок, и определения усилий и моментов совпадают с классическими.

3.2. Осреднение уравнений теории пластин, периодических в плане

Изложенный в предыдущей главе подход для решения нелинейных задач, основанный на асимптотическом методе осреднения, позволяет получить для задачи упругопластического изгиба пластины эффективные определяющие соотношения и глобальные уравнения равновесия (22) нулевого приближения. В работе показано, что в последующих приближениях метода осреднения быстрые и медленные координаты не разделяются в граничных условиях на верхней и нижней поверхностях пластины. В этом проявляется главное отличие от случая бесконечной среды.

В результате получены эффективные определяющие соотношения для пластины, которые имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta T_{IJ}^{(0)(n+1)}(\vec{x}) &= A_{IJPQ_0}^{(0)(n)}(\vec{x}) \Delta v_P^{(n+1)},_{Q_0}(\vec{x}) - B_{IJPQ_0}^{I(0)(n)}(\vec{x}) \Delta w^{(n+1)},_{PQ_0}(\vec{x}), \\ \Delta M_{IJ}^{(0)(n+1)}(\vec{x}) &= B_{IJPQ_0}^{II(0)(n)}(\vec{x}) \Delta v_P^{(n+1)},_{Q_0}(\vec{x}) - D_{IJPQ_0}^{(0)(n)}(\vec{x}) \Delta w^{(n+1)},_{PQ_0}(\vec{x}),\end{aligned}\quad (23)$$

и глобальные уравнения равновесия (при использовании явного метода Эйлера), вид которых

$$\begin{aligned}\left(A_{IJPQ_0}^{(0)(n)}(\vec{x}) \Delta v_P^{(n+1)},_{Q_0}(\vec{x}) \right),_J - \left(B_{IJPQ_0}^{I(0)(n)}(\vec{x}) \Delta w^{(n+1)},_{PQ_0}(\vec{x}) \right),_J &= 0, \\ \left(B_{IJPQ_0}^{II(0)(n)}(\vec{x}) \Delta v_P^{(n+1)},_{Q_0}(\vec{x}) \right),_{IJ} - \left(D_{IJPQ_0}^{(0)(n)}(\vec{x}) \Delta w^{(n+1)},_{PQ_0}(\vec{x}) \right),_{IJ} &= \Delta P^{(n+1)}(\vec{x}),\end{aligned}\quad (24)$$

здесь $A_{IJPQ_0}^{(0)(n)}$ – эффективные жесткости пластины на растяжение, $D_{IJPQ_0}^{(0)(n)}$ – эффективные жесткости пластины на изгиб, а $B_{IJPQ_0}^{I(0)(n)}$ и $B_{IJPQ_0}^{II(0)(n)}$ – эффективные жесткости взаимного влияния. В отличие от случая линейной задачи они зависят от глобальных координат как от параметра. В работе также получены разрешающие уравнения для неявного метода Эйлера и представлен алгоритм их решения.

3.3. Применение асимптотического метода осреднения для численного анализа изгиба многослойной пластины

В качестве иллюстрации применения изложенной методики осреднения для

пластин рассмотрим задачу об упругопластическом цилиндрическом изгибе многослойной симметричной пластины под воздействием поперечной нагрузки $P(\bar{x})$. Полагается, что до некоторого момента пластина подвергается активному нагружению, за которым следует разгрузка.

Здесь, как и везде, полагается также, что сцепление слоев идеально. Пусть пластина описывается в декартовой системе координат, начало которой находится в ее срединной плоскости (Рис. 3.1). Пусть безразмерная высота пластины $h=1$, а ее длина – l . В силу принятых условий напряженно-деформированное состояние пластины описывается двумя координатами (x, ξ) , где x – координата по горизонтальной оси, а ξ – по вертикальной. Пусть также пластина шарнирно закреплена, а на ее верхнюю плоскость действует сила $P(x)$.

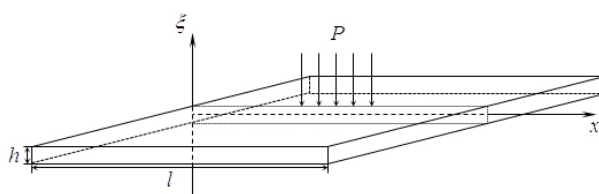


Рис. 3.1 схематичное изображение пластины бесконечной длины

В работе вычисления проведены для двух случаев: для трехслойной пластины длины $l=10$, и для пятислойной пластины длины $l=50$ (Рис. 3.2). Таким образом, в случае трехслойной пластины имеем для малого параметра $\varepsilon = h/l = 0.1$, а для пятислойной – $\varepsilon = h/l = 0.02$.

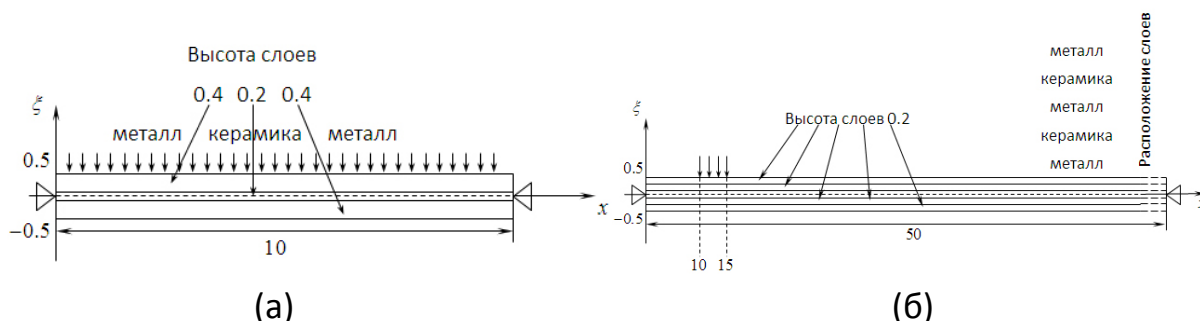


Рис. 3.2 (а) трехслойная пластина и (б) – пятислойная

Полагается, что слои пластины состоят из абсолютно упругого материала (например, керамики) и пластического (например, металла). При этом, металл полагается

линейно упрочняющимся материалом. В случае трехслойной пластины слой керамики является центральным и его высота 0.2 (Рис. 3.2(а)). В случае пятислойной пластины материалы в слоях чередуются, как указано на Рис. 3.2(б). Высота каждого слоя при этом равна 0.2.

Пусть трехслойная пластина изгибается под воздействием силы, равномерно распределенной по ее верхней поверхности, а пятислойная – под воздействием нагрузки, равномерно распределенной на центральном отрезке $x = [10, 15]$.

Осредненные определяющие соотношения в приращениях и уравнения равновесия на шаге нагружения n имеют вид

$$\Delta M_{11}^{(n+1)}(x) = D_{1111}^{(n)}(x) \Delta w^{(n+1)}{}_{,11}(x), \quad (25)$$

$$\left(D_{1111}^{(n)}(x) \Delta w^{(n+1)}{}_{,11}(x) \right)_{,11} = \Delta P^{(n+1)}(x), \quad (26)$$

При этом глобальные граничные и начальные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \Delta w^{(n+1)}(0) \Big|_{n \in [0, N]} &= \Delta w^{(n+1)}(10) \Big|_{n \in [0, N]} = 0, \\ \Delta w^{(n+1)}{}_{,11}(0) \Big|_{n \in [0, N]} &= \Delta w^{(n+1)}{}_{,11}(10) \Big|_{n \in [0, N]} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Delta w^{(1)}(x) \Big|_{x \in [0, 10]} = 0. \quad (28)$$

Для краткости мы не приводим здесь похожие соотношения, возникающие при использовании неявного метода Эйлера.

Для поставленной задачи был разработан параллельный алгоритм решения, использующий идею перехлеста областей. Для его численной реализации использовался программный стандарт параллельного обмена данными MPI. Полученная программа запускалась на кластере СКИФ МГУ «Чебышев», суперкомпьютерного комплекса Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова.

В данной работе эффективность алгоритма измерялась соотношением

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}, \quad (29)$$

где T_1 – время, затрачиваемое для исполнения последовательной программы на

одном процессоре, T_p – время исполнения программы на P процессорах. В идеальном случае, при отсутствии накладных расходов на организацию параллелизма, эффективность алгоритма должна составлять $S_p = P$. В качестве P рассматривалось до 64 процессоров кластера. На Рис. 3.3 представлены графики, соответствующие результатам явного и неявного методов Эйлера. При практически полном совпадении численных результатов, неявный метод проявляет большую эффективность распараллеливания, нежели явный.

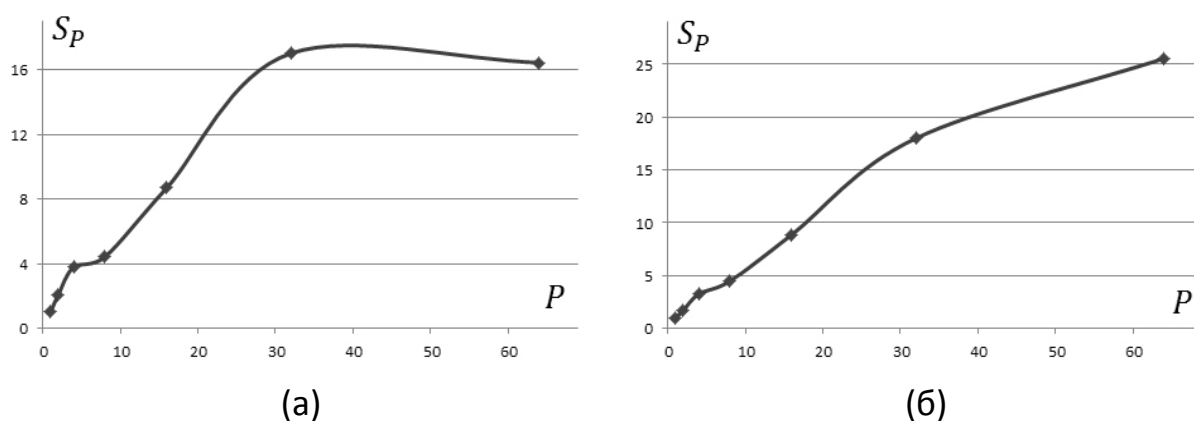
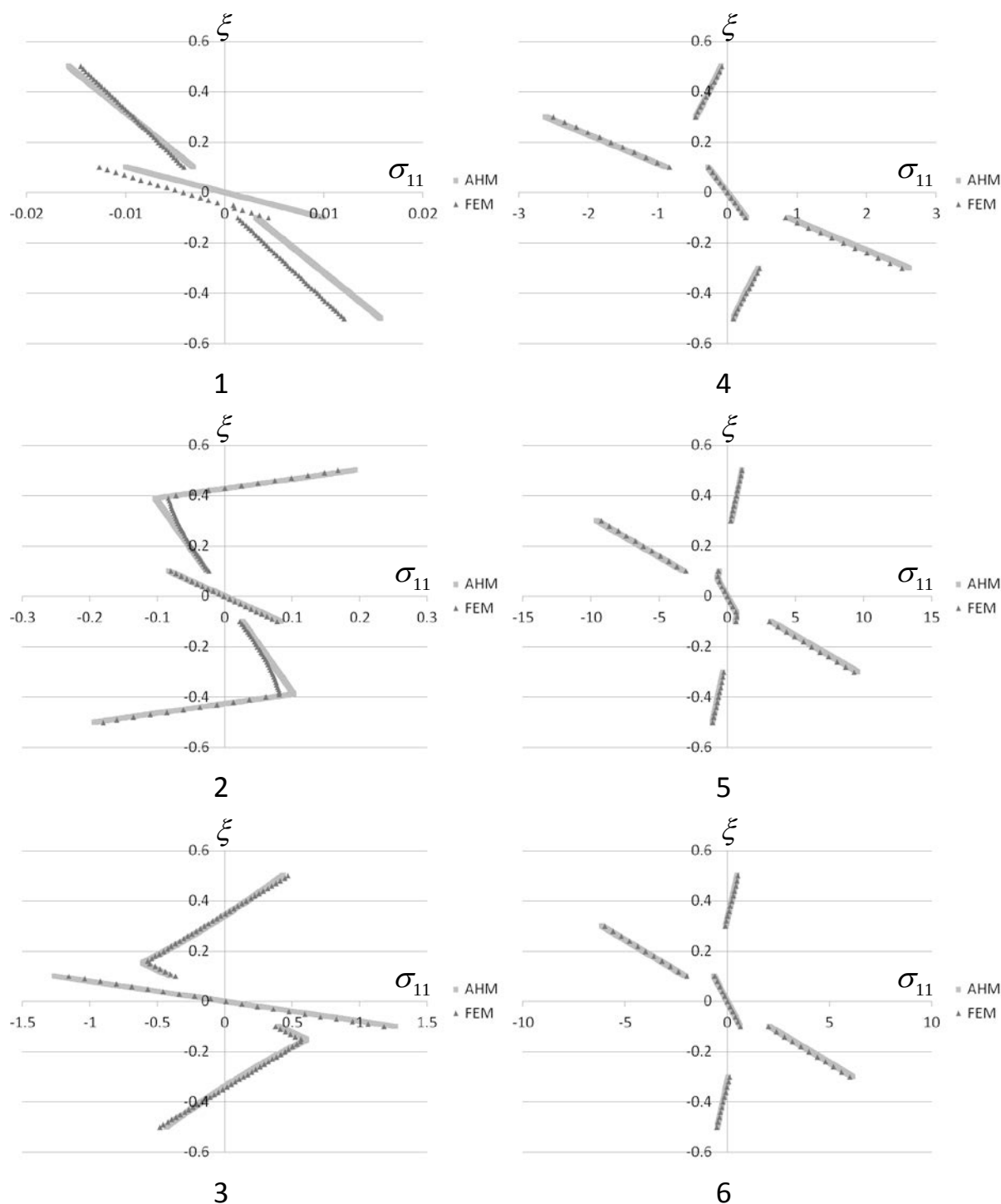


Рис. 3.3 Ускорение работы явного (а) и неявного (б) методов Эйлера

Таким образом, тесты показали хорошую эффективность распараллеливания развиваемого метода решения задач (Рис. 3.3).

На Рис. 3.4 приведены некоторые примеры полученных зависимостей продольного напряжения в процессе разгрузки пластины (горизонтальная ось) от вертикальной координаты в разных сечениях. Графики 1, 2, 3 соответствуют продольному напряжению в трехслойной пластине, а 4, 5, 6 – в пятислойной. Графики 1, 4 соответствуют сечению, близкому к точке закрепления пластины, а графики 3, 6 – ее центральному сечению. Сечение, соответствующее графикам 2, 5, находится между двумя обозначенными.

Полученные результаты, обозначенные на графиках как АНМ (Asymptotic Homogenization Method), сравнивались с результатами двумерного конечно-элементного анализа, обозначенными на графиках как FEM (Finite Element Method). Точки соответствующие результатам FEM обозначены треугольниками.



**Рис. 3.4 Графики продольного напряжения в пластинах:
1, 2, 3 – в трехслойной пластине, а 4, 5, 6 – в пятислойной**

Из графиков видно, что расхождение значений напряжений в трехслойной пластине в сечении, близком к закреплению, довольно велико. Такое различие возникает ввиду краевого эффекта. При удалении от границы пластины влияние краевого эффекта исчезает. В центральном сечении пластины напряжения практически совпадают. В случае пятислойной пластины при малом соотношении сторон

$\varepsilon = h/l = 0.02 \ll 1$ совпадение напряжений существенно лучше. Таким образом, расхождение в результатах уменьшается вместе со значением $\varepsilon = h/l \ll 1$.

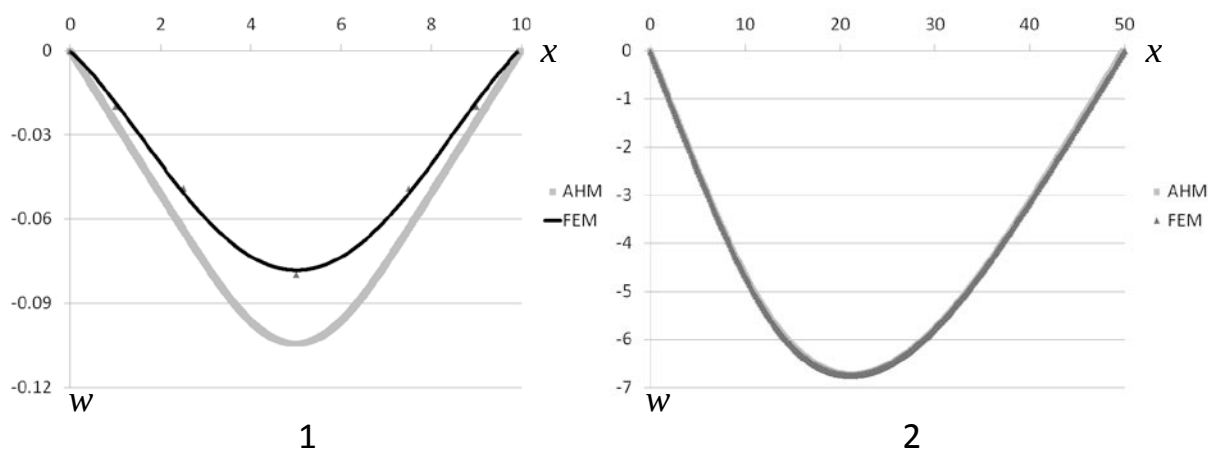


Рис. 3.5 График прогиба для 1 – трехслойной пластины, 2 - пятислойной

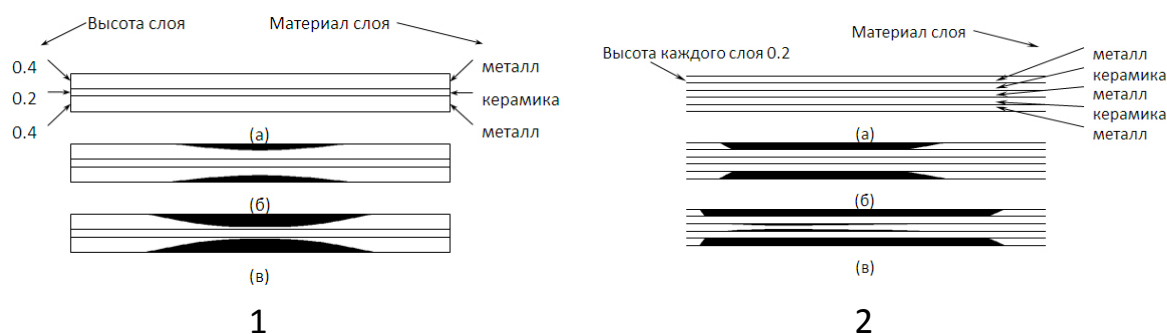


Рис. 3.6 Развитие зон пластичности в слоях пластины

На Рис. 3.6 представлено последовательное развитие зон пластичности (черный цвет) в слоях металла пластины (слои пластины обозначены контуром). Это рисунки строятся программой параллельно с вычислительным процессом и полностью соответствуют состоянию пластических зон на выбранных шагах нагружения.

В итоге, можно сделать вывод, что разработанный алгоритм решения нелинейных задач с помощью асимптотического метода осреднения в случае многослойных пластин дает достоверные результаты для тонких пластин. С увеличением значения малого параметра $\varepsilon = h/l$ точность ухудшается, а влияние краевого эффекта усиливается.

Эффективность разработанного алгоритма не зависит от количества слоев в пла-

стине. В дальнейшем он может быть использован в качестве основы для разработки алгоритмов решения более сложных задач, например, задач об изгибе гофрированных пластин. В данной работе он распространен также на случай пластин из функционально градиентного материала.

3.4. Применение асимптотического метода осреднения для численного анализа изгиба пластины из функционально градиентного материала

В текущем параграфе дается описание свойств функционально градиентных материалов (ФГМ) и проводится обзор используемых методов для получения их эффективных свойств.

ФГМ – это металлокерамический композит, структура которого представляет взаимное проникновение одного материала в другой. Пример такой структуры изображен на Рис. 3.7(а).

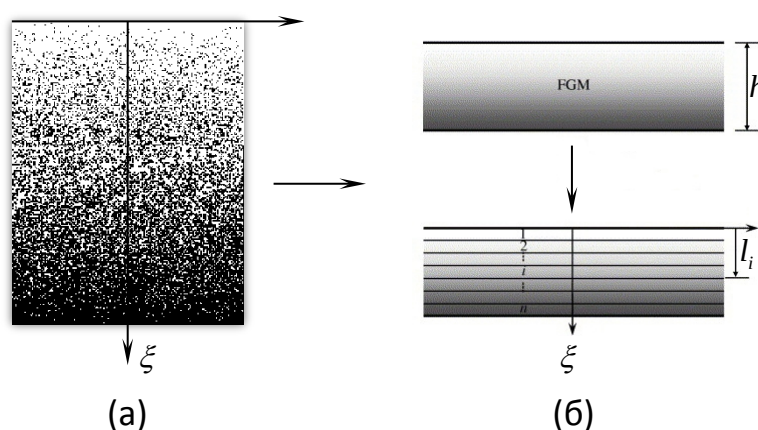


Рис. 3.7 Функционально градиентный материал (а) и его модель (б)

Представленная на Рис. 3.7(а) структура создана с помощью программы моделирования, разработанной автором, и учитывающей особенности строения материала. Черным цветом здесь обозначены зоны металла, белым – керамики.

Главным преимуществом ФГМ, в первую очередь перед слоистыми композитами, является непрерывное изменение свойств вдоль направления градиента по оси ξ Рис. 3.7(а). Этот градиент в большинстве случаев создается непрерывным изменением концентрации волокон или включений в матрице. Изменение концентрации при этом описывается соотношением

$$V = \left(\frac{\xi}{h} \right)^n, \quad (30)$$

где n – материальный параметр. Такая структура позволяет избежать разрывов напряжений, свойственных слоистым структурам, при переходе от одного компонента композита к другому. Однако она требует и особого подхода к определению эффективных свойств.

В большинстве современных работ методы, использующиеся для этого, базируются на правиле смесей, которое неточно при сравнительно одинаковых концентрациях компонентов композита. Обойти эту проблему позволяет описанный в главе способ вычисления эффективных свойств, позволяющий непосредственно решать локальные задачи в представительной области.

Рассмотрим шарнирно закрепленную металлокерамическую пластину с градиентной структурой (Рис. 3.8). Предположим, что пластина цилиндрически изгибается под воздействием равномерно распределенной по ее верхней поверхности силы P . Предположим также, что длина пластины $l = 10$, а ее высота $h = 1$, тогда $\varepsilon = 0.1$.

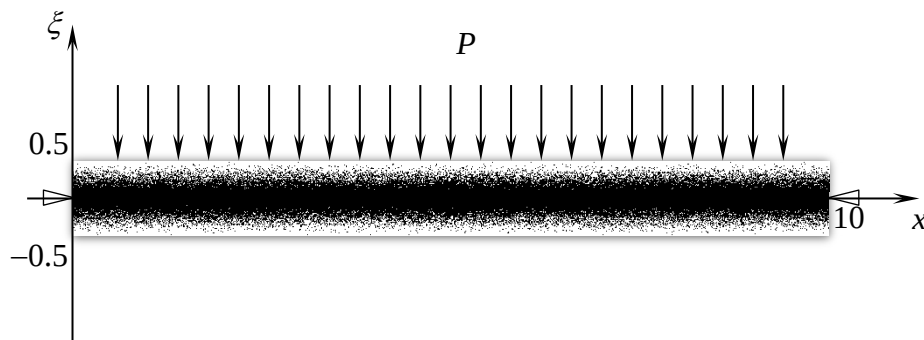


Рис. 3.8 Пластина из функционально градиентного материала

В качестве модели, описывающей структуру пластины, выбрана общепринятая модель слоистого композита (Рис. 3.7(б)). Идея такой модели заключается в рассмотрении очень большого количества тонких слоев, расположенных перпендикулярно направлению градиента ξ и обладающих свойствами, изменяющимися в соответствии с ним. Такой подход позволяет довольно точно дискретизировать градиент свойств, избежав детального рассмотрения сложной микроструктуры материала. При численной реализации такой модели высота каждого слоя может рав-

няться нескольким диаметрам включений. Однако, очевидно, количество слоев при этом может достигать нескольких тысяч.

В данной работе количество слоев полагалось равным 1000. На Рис. 3.9 представлены некоторые полученные результаты для продольного напряжения в центральном сечении пластины. Они соответствуют разным значениям материального параметра n , отвечающего за гладкость изменения свойств вдоль градиента.

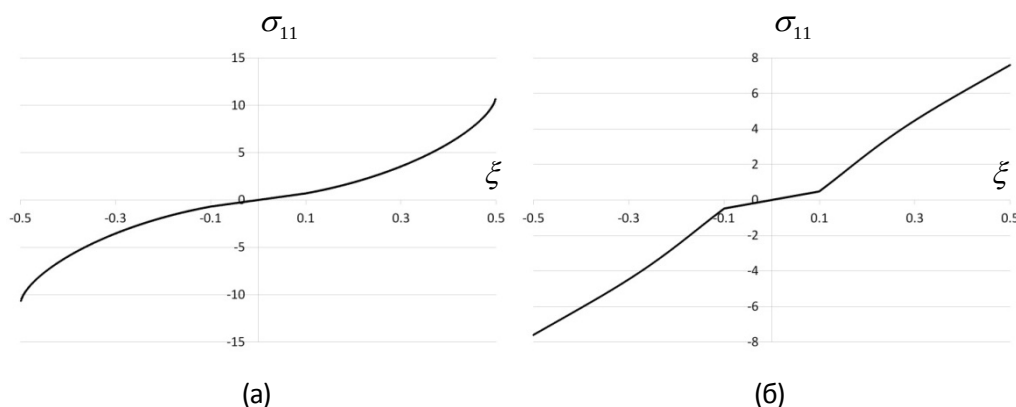


Рис. 3.9 Изменение микронапряжений при (а) $n = 0.5$ и (б) $n = 5$

В отличие от многих работ, использующих правило смесей или экспоненциальную зависимость материальных свойств от координаты вдоль градиента, здесь эффективные модули каждого слоя получены с помощью вычислительной программы, определяющей эффективные свойства двухфазных материалов. Результат этой программы не зависит от соотношения концентраций компонентов композита. Такой подход применялся в главе 1.

В результате показано, что разработанная методика осреднения применима и к функционально-градиентным материалам.

Основные результаты и выводы

В **заключении** сформулированы основные результаты представленной диссертационной работы:

1. Предложен новый вариант асимптотического метода осреднения для нелинейных задач и эффективный параллельный алгоритм его реализации. Предложенный вариант асимптотического метода осреднения развит для случая пери-

одических в плане пластин из физически нелинейных композиционных материалов и проиллюстрирован на примере упругопластического изгиба многослойных пластин и пластин из функционально градиентных материалов.

2. На примере численной реализации предложенного метода показана его хорошая степень параллелизма.
3. Предложенный вариант асимптотического метода осреднения обобщен на случай макроскопически неоднородных непериодических материалов. Обобщение основано на методе перехлеста областей.
4. При содействии профессора Технического Университета Берлина Müller W.H. и его коллег проведено практическое исследование упругих модулей сплавов. В результате проведенной работы сделан вывод о слабой зависимости свойств сплавов от диффузии их компонентов.
5. Для модельных материалов исследована зависимость размера их представительной области от структуры.

Результаты работы частично были использованы при выполнении работ по ГК № 07.524.11.4019 Министерства образования и науки РФ.

Публикации по теме диссертации

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК РФ [1], [2], [3], 3 тезисов докладов на научных конференциях [4], [5], [6], 1 публикация в сборнике научных трудов международной конференции [7], 1 публикация в сборнике материалов международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел [8], 1 публикация в зарубежном издании [9].

1. Шешенин С.В., Савенкова М.И. *Вычисление эффективных модулей сплавов* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2011. — №1. — С. 68-70.
2. Савенкова М.И., Шешенин С.В., Закалюкина И.М. *Применение метода осреднения в задаче упругопластического изгиба пластины* // Вестник МГСУ. — 2012. — №9. — С. 156-164.
3. Шешенин С.В., Савенкова М.И. *Осреднение нелинейных задач в механике композитов* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2012. — №5. — С. 58-61.
4. Савенкова М.И., Шешенин С.В. *Эффективные модули сплавов* // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. — Москва : Издательство Московского университета, 2009. — С. 137.
5. Савенкова М.И., Шешенин С.В. *Вычисление эффективных модулей сплавов* // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. — Москва : Издательство Московского университета, 2010. — С. 156.
6. Савенкова М.И., Шешенин С.В. *Параллельная реализация метода осреднения в задаче упругопластического изгиба пластины* // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. — Москва : Издательство Московского университета, 2012. — С. 143.
7. Шешенин С.В., Савенкова М.И., Воеhme Т. *Вычисление эффективных модулей сплавов* // Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Сборник трудов международной научно-практической конференции. — Москва : МГСУ, 2009. — С. 372-379.
8. Шешенин С.В., Савенкова М.И. *Об осреднении композитов при наличии нелинейности* // Упругость и неупругость: дополнительные материалы Международного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. — Москва : Издательство Московского университета, 2012. — С. 260-269.
9. Brandmair A., Müller W., Savenkova M., Sheshenin S. *A multi-scale homogenization technique applied to the elastic properties of solders* // Technische Mechanik. — 2011. — Vol. 31, №2. — P. 156-170.