МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА.

На правах рукописи
УДК 512.725+519.116

Буряк Александр Юрьевич.

Когомологии квазиоднородных компонент в пространстве модулей пучков

Специальность
01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2013

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Гусейн-Заде Сабир Меджидович
Официальные оппоненты:	Казарян Максим Эдуардович доктор физико-математических наук, (ФГБУН “Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук”, ведущий научный сотрудник)
	Эстеров Александр Исаакович кандидат физико-математических наук, (ФГАОУ ВПО “Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, доцент)
Ведущая организация:	ФГБУН “Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук”

Защита диссертации состоится 31 мая 2013 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 30 апреля 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена различным задачам геометрии схем Гильберта точек на комплексной плоскости, а также их обобщений – пространств модулей оснащённых пучков на проективной плоскости.

Схема Гильберта n точек на плоскости – это алгебраическое многообразие, параметризующее идеалы коразмерности n в кольце полиномов от двух переменных. Это пространство интенсивно изучается на протяжении последних 25 лет и является очень интересным объектом по многим причинам. Во-первых, его геометрия весьма нетривиальна и наделена разнообразными глубокими алгебраическими структурами. Во-вторых, это пространство богато связями с комбинаторикой, теорией представлений и математической физикой.

Первым толчком к изучению схем Гильберта точек на плоскости послужила работа Эллингсруда и Стромма[1], где были вычислены их числа Бетти. Оказалось, что производящий ряд многочленов Пуанкаре схем Гильберта точек на плоскости очень красиво разлагается в бесконечное произведение. Кольцевая структура в когомологиях схем Гильберта была определена в другой работе Эллингсруда и Стромма[2] с помощью образующих и неявного описания соотношений.

Далее Накаджима[3] с помощью изящных геометрических конструкций построил действие алгебры Гейзенберга в когомологиях схем Гильберта, тем самым получив глубокую интерпретацию с точки зрения теории представлений результата первой работы Эллингсруда и Стромма. За этим последовала серия работ разных авторов, нацеленная на более явное описание кольцевой структуры в когомологиях схем Гильберта. В статье Лена[4] кольцо когомологий было отождествленно с некоторой явно описанной алгеброй дифференциальных операторов в кольце полиномов от бесконечного числа переменных. В работах Лена и Соргера[5] и Вассеро[6] кольцевая структура была описана в терминах кольца функций на симметрической группе. Наконец, Окуньковым

[1] G. Ellingsrud, S. A. Stromme. On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane. *Inventiones Mathematicae* **87** (1987), 343-352.

[2] G. Ellingsrud, A. Stromme, Towards the Chow ring of the Hilbert scheme of $\mathbb{P}^2$. *J. reine angew. Math.* **441** (1993), 33-44.

[3] H. Nakajima. Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces. *Annals of Mathematics* **145** (1997), 379-388.

[4] M. Lehn. Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces. *Inventiones Mathematicae* **136** (1999), no. 1, 157-207.

[5] M. Lehn and C. Sorger. Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes. *Duke Mathematical Journal* **110** (2001), no. 2, 345-357.

[6] E. Vasserot. Sur l'anneau de cohomologie du schema de Hilbert de $\mathbb{C}^2$. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I - Mathematics* **332** (2001), no. 1, 7-12.

и Пандхарипанде[7] было получено описание квантовых когомологий схемы Гильберта.

Геометрия схем Гильберта тесно связана с богатой теорией (q,t)-чисел Каталана. (q,t)-число Каталана – это многочлен от двух переменных с неотрицательными целами коэффициентами, причём его значение при $q=t=1$ равно обычному числу Каталана. Эти многочлены были впервые введены в работе Гарсии и Хаймана[8], точнее говоря, они были определены как рациональные функции, тот факт, что это многочлены был высказан в качестве гипотезы. Определение было мотивировано серией гипотез про диагональные гармоники и тесно связано с теорией многочленов Макдональда. В работе Хаймана[9] было доказано, что (q,t)-число Каталана совпадает с характером действия тора $(\mathbb{C}^*)^2$ в глобальных сечениях некоторого расслоения над схемой Гильберта. Этот глубокий результат позволил наконец доказать ряд гипотез про (q,t)-числа Каталана.

Схема Гильберта n точек на плоскости имеет естественное обобщение – пространство модулей оснащённых пучков без кручения на проективной плоскости. Эти пространства нумеруются двумя целыми числами: рангом r и вторым классом Черна n. Схеме Гильберта соответствует случай $r=1$. Числа Бетти пространств модулей пучков были вычислены в работе Накаджимы и Йошиоки[10]. Ряд результатов про схемы Гильберта может быть обобщён для пространств модулей пучков. Пространство модулей пучков является частичной компактификацией пространства модулей инстантонов на сфере размерности четыре. Это является одной из причин того, что эти пространства представляют большой интерес с точки зрения физики. С ними связаны гипотезы Некрасова[11], а также гипотеза АГТ[12]. Эти гипотезы являются объектами активных иссследований в последние годы как среди математиков, так и среди физиков.

Пространство модулей пучков является источником большого семейства очень интересных пространств – так называемых колчанных многообразий. На пространстве модулей пучков имеется естественное действие группы $GL_2(\mathbb{C})$.

[7] A. Okounkov, R. Pandharipande. Quantum cohomology of the Hilbert scheme of points in the plane. *Inventiones Mathematicae* **179** (2010), no. 3, 523-557.

[8] A. Garsia, M. Haiman. A remarkable q,t-Catalan sequence and q-Lagrange inversion. *Journal of Algebraic Combinatorics* **5** (1996), no. 3, 191–244.

[9] M. Haiman. q,t-Catalan numbers and the Hilbert scheme. Selected papers in honor of Adriano Garsia (Taormina, 1994). *Discrete Mathematics* **193** (1998), no. 1-3, 201-224.

[10] H. Nakajima, K. Yoshioka. Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory. *Inventiones Mathematicae* **162** (2005), no. 2, 313-355.

[11] H. Nakajima, K. Yoshioka. Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory. *Inventiones Mathematicae* **162** (2005), no. 2, 313-355.

[12] O. Schiffmann, E. Vasserot. Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on $\mathbb{A}^2$. arXiv:1202.2756.

Возьмём конечную подгруппу в $SL_2(\mathbb{C})$ и рассмотрим множество неподвижных точек её действия на пространстве модулей пучков. Компоненты этого множества являются колчанными многообразиями аффинного типа. Они были впервые рассмотрены Накаджимой[13]. В когомологиях этих колчанных многообразий реализуются представления аффинных алгебр Ли[14], а также соответствующих янгианов[15].

Двумерный комплексный тор действует на плоскости перемаштабированием координат, таким образом индуцируется его действие на схеме Гильберта. Это действие играет ключевую роль в изучении этих пространств. Множество неподвижных точек действия двумерного тора на схеме Гильберта конечно. Если же выбрать какой-либо одномерный подтор в двумерном торе, то множество неподвижных точек действия этого подтора на схеме Гильберта уже не будет нульмерным. Это множество называется квазиоднородной схемой Гильберта.

Впервые квазиоднородные схемы Гильберта рассматривались в работе Йарробино[16], там были описаны неприводимые компоненты в частном случае, когда веса действия одномерного тора на плоскости равны 1. В общем случае неприводимые компоненты были описаны в работе Эвана[17]. В этом плане квазиоднородная схема Гильберта существенно отличается от обычной схемы Гильберта точек на плоскости. Последняя неприводима, в то время как первая обладает большим числом неприводимых компонент. Числа Бетти неприводимых компонент квазиоднородной схемы Гильберта в случае, когда веса равны 1, были вычислены в статье Йарробино и Йамеого[18].

Данная диссертация посвящена изучению квазиоднородных схем Гильберта и их непосредственных обобщений в пространстве модулей пучков на проективной плоскости.

Цель работы.

Целью работы является вычисление когомологий квазиоднородных компонент в пространстве модулей пучков на проективной плоскости и исследование связей с комбинаторикой и теорией представлений.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие основные результаты:

[13] H. Nakajima. Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras. *Duke Mathematical Journal* **76** (1994), 365-416.

[14] H. Nakajima. Quiver varieties and Kac-Moody algebras. *Duke Mathematical Journal* **91** (1998), 515-560.

[15] M. Varagnolo. Quiver varieties and Yangians. *Letters in Mathematical Physics* **53** (2000), 273-283.

[16] A. Iarrobino. Punctual Hilbert schemes. *Memoirs of the American Mathematical Society* **188** (1977).

[17] L. Evain. Irreducible components of the equivariant punctual Hilbert schemes. *Advances in Mathematics* **185** (2004), no. 2, 328-346.

[18] A. Iarrobino, J. Yameogo. The family G_T of graded artinian quotients of $k[x, y]$ of given Hilbert function. Special issue in honor of Steven L. Kleiman. *Communications in Algebra* **31** (2003), no. 8, 3863-3916.

1. Получена формула для производящего ряда многочленов Пуанкаре квазиоднородных схем Гильберта точек на плоскости.
2. В случае, когда один из весов равен 1, вычислены многочлены Пуанкаре всех неприводимых компонент квазиоднородной схемы Гильберта.
3. Установлено, что производящий ряд чисел квазиоднородных компонент в пространстве модулей пучков совпадает с характером аффинной алгебры Ли.
4. Обнаружена новая геометрическая интерпретация q, t-чисел Каталана.
5. Получена геометрическая интерпретация обобщения тождества Мак-Магона.

Основные методы исследования.
В работе используются методы алгебраической геометрии, топологии, комбинаторики и теории представлений.

Теоретическая и практическая ценность.
Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов по алгебраической геометрии, комбинаторике и теории представлений.

Апробация результатов.
Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

- Семинар "Алгебраическая топология и приложения" (рук. чл.-корр. РАН В .М. Бухштабер, проф. А. В. Чернавский, проф. И. А. Дынников, проф. Т. Е. Панов, доц. Л. А. Алания); Механико-математический факультет МГУ, Москва – 2012 г.
- Семинар "Топология особенностей" (рук. проф. С. М. Гусейн-Заде); Механико-математический факультет МГУ, Москва – неоднократно в 2011 и 2012 гг.
- Семинар "Характеристические классы и теория пересечений" (рук. проф. М.Э.Казаряна и проф. С.К.Ландо); Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва – в 2012 г.
- Семинар "Algebra and Geometry"; институт Кортевега-де Фриза университета Амстердама – неоднократно в 2010 и 2011 гг.
- Международная конференция "Conference on Singularities, Geometry and Topology", El Escorial, Spain, October 11-16, 2010.
- Международная конференция "Alexandroff Readings", Moscow, May 21-25, 2012.
- Международная конференция "Analysis and Singularities", Moscow, December 17-21, 2012.

Публикации.
Основное содержание диссертации опубликовано в трёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1-3].

Структура диссертации.
Диссертация состоит из введения, пяти глав, двух дополнений и списка литературы. Полный объем диссертации – 69 страниц, библиография включает 57 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении мы приводим мотивацию наших исследований и объясняем основные результаты и структуру работы.

Содержание главы 1. В Главе 1 мы напоминаем основные определения и результаты, касающиеся схемы Гильберта точек на плоскости и пространства модулей пучков.
Схемой Гильберта n точек на плоскости $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ называется множество идеалов коразмерности n в кольце полиномов от двух переменных, то есть

$$(\mathbb{C}^2)^{[n]} = \{I \subset \mathbb{C}[x,y] | I \text{ – идеал и } \dim \mathbb{C}[x,y]/I = n\}.$$

На $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ имеется естественная структура комплексного алгебраического многообразия, относительно которой $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ является гладким квазипроективным многообразием размерности $2n$.
Пространство модулей $\mathcal{M}(r,n)$ определяется следующим образом.

$$\mathcal{M}(r,n) = \left\{ (E,\Phi) \,\middle|\, \begin{matrix} E\text{: пучок без кручения на } \mathbb{P}^2 \\ \operatorname{rank} E = r, c_2(E) = n \\ \Phi\colon E|_{l_\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{l_\infty}^{\oplus r}\text{: оснащение} \end{matrix} \right\} \Big/ \text{изоморфизмы},$$

где $l_\infty = \{[0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2\} \subset \mathbb{P}^2$ – прямая на бесконечности. На $\mathcal{M}(r,n)$ имеется естественная структура комплексного алгебраического многообразия. Относительно этой структуры $\mathcal{M}(r,n)$ является гладким квазипроективным многообразием размерности $2rn$.
Пространства модулей $\mathcal{M}(r,n)$ являются обобщением схемы Гильберта $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$, так как нетрудно показать, что $\mathcal{M}(1,n)$ изоморфно $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$.
Числа Бетти многообразия $\mathcal{M}(r,n)$ описываются следующей формулой. Многочлен Пуанкаре $P_q(X)$ топологического пространства X мы определяем как $P_q(X) = \sum_{i\geq 0} \dim H_i(X;\mathbb{Q}) q^{\frac{i}{2}}$. Накаджимой и Йошиокой был получен следующий результат.

$$\sum_{n\geq 0} P_q(\mathcal{M}(r,n)) t^n = \prod_{i=1}^{r} \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - q^{rn-i} t^n}.$$

Содержание главы 2. В Главе 2 мы напоминаем определение циклических колчанных многообразий и докажем ряд утверждений, которые нам понадобятся в последующих главах. Эти утверждения носят вспомогательный характер, поэтому мы не будем подробно на них останавливаться в рамках автореферата.

Содержание главы 3. Глава 3 содержит результаты, касающиеся квазиоднородных схем Гильберта.

Дадим определение квазиоднородной схемы Гильберта. Зададим $(\mathbb{C}^*)^2$-действие в алгебре полиномов $\mathbb{C}[x,y]$ равенством $(t_1,t_2)\cdot P(x,y) = P(t_1^{-1}x, t_2^{-1}y)$. Это действие индуцирует $(\mathbb{C}^*)^2$-действие на множестве идеалов. Значит, мы получаем $(\mathbb{C}^*)^2$-действие на схеме Гильберта $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$. Зафиксируем теперь два положительных взаимно простых целых числа α и β и определим одномерный подтор $T_{\alpha,\beta}\subset(\mathbb{C}^*)^2$ равенством

$$T_{\alpha,\beta} = \{(t^\alpha, t^\beta)\in(\mathbb{C}^*)^2 | t\in\mathbb{C}^*\}.$$

Квазиоднородная схема Гильберта определяется как множество неподвижных точек $\left((\mathbb{C}^2)^{[n]}\right)^{T_{\alpha,\beta}}$.

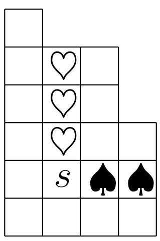
Одним из основных результатов диссертации является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Имеет место разложение в бесконечное произведение.*

$$\sum_{n\ge 0} P_q\left(\left((\mathbb{C}^2)^{[n]}\right)^{T_{\alpha,\beta}}\right)t^n = \prod_{\substack{i\ge 1\\ (\alpha+\beta)\nmid i}}\frac{1}{1-t^i}\prod_{i\ge 1}\frac{1}{1-qt^{(\alpha+\beta)i}}.$$

В качестве следствия из этой теоремы можно вывести нетривиальное чисто комбинаторное тождество. Теорема Бялыницки-Бируля позволяет построить клеточное разбиение квазиоднородной схемы Гильберта. Это даёт комбинаторную формулу для чисел Бетти квазиоднородной схемы Гильберта. Если теперь применить Теорему 3.1, то получится следующий результат.

Через $\mathcal{Y}$ мы обозначаем множество всех диаграмм Юнга. Для диаграммы Юнга Y и клетки $s\in Y$ определим числа $l_Y(s)$ и $a_Y(s)$, см. Рис. 1.



Y

$l_Y(s)$ = количество ♠
$a_Y(s)$ = количество ♡

Рис. 1

Теорема 3.13. *Пусть α и β – произвольная пара положительных взаимно простых целых чисел. Имеет место тождество*

$$\sum_{Y\in\mathcal{Y}} q^{\sharp\{s\in Y \mid \alpha l_Y(s)=\beta(a_Y(s)+1)\}} t^{|Y|} = \prod_{\substack{i\geq 1\\(\alpha+\beta)\nmid i}} \frac{1}{1-t^i} \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-qt^{(\alpha+\beta)i}}.$$

В отличие от обычной схемы Гильберта $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$, которая неприводима, квазиоднородная схема Гильберта $\left((\mathbb{C}^2)^{[n]}\right)^{T_{\alpha,\beta}}$ обладает в общем случае большим числом неприводимых компонент. Ещё одним результатом Главы 3 является формула для многочленов Пуанкаре неприводимых компонент квазиоднородной схемы Гильберта в случае, когда $\alpha = 1$. Пусть $k \geq 1$. Неприводимые компоненты многообразия $\left((\mathbb{C}^2)^{[n]}\right)^{T_{1,k}}$ нумеруются последовательностями $H = (d_0, d_1, \ldots)$ из неотрицательных целых чисел d_i с суммой, равной n и удовлетворяющих некоторому дополнительному свойству, на котором мы не будем здесь подробно останавливаться. Мы называем эти последовательности допустимыми. Обозначим через $\left((\mathbb{C}^2)^{[n]}\right)^{T_{1,k}}_H$ неприводимую компоненту квазиоднородной схемы Гильберта $\left((\mathbb{C}^2)^{[n]}\right)^{T_{1,k}}$, соответствующую последовательности H.
Обозначим через $\eta(H)$ наибольшее i, такое что $d_i = \left[\frac{i}{k}\right] + 1$. Мы полагаем $\eta(H) = -1$, если $H = (0, 0, \ldots)$. Определим вспомогательную функцию τ равенством

$$\tau(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \mid i+1, \\ 0, & \text{если } k \nmid i+1. \end{cases}$$

Определим q-биномиальные коэффициенты равенством

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}_q = \frac{\prod_{i=1}^{M}(1-q^i)}{\prod_{i=1}^{N}(1-q^i)\prod_{i=1}^{M-N}(1-q^i)}.$$

Теорема 3.4. *Пусть $H = (d_0, d_1, \ldots)$ – допустимая последовательность неотрицательных целых чисел и $n = \sum\limits_{i\geq 0} d_i$, тогда*

$$P_q\left(\left((\mathbb{C}^2)^{[n]}\right)^{T_{1,k}}_H\right) = \prod_{i\geq\eta(H)} \begin{bmatrix} d_i - d_{i+1+k} + \tau(i) \\ d_{i+1} - d_{i+1+k} \end{bmatrix}_q.$$

Отметим, что случай, когда либо α, либо β равно 1, является по непонятным причинам особенным. В общем случае конкретные примеры показывают, что многочлены Пуанкаре неприводимых компонент квазиоднородных схем Гильберта не могут быть представлены ни в виде произведения q-биномиальных коэффициентов, ни даже в виде конечного произведения множителей вида $(1-q^i)^{a_i}$.

Содержание главы 4. В Главе 4 исследуется количество квазиоднородных компонент в пространстве модулей пучков на проективной плоскости. Двумерный комплексный тор действует на проективной плоскости: $(t_1, t_2)\cdot(x : y : z) = (t_1 x, t_2 y, z)$. Это действие индуцирует $(\mathbb{C}^*)^2$-действие на пространстве модулей $\mathcal{M}(r, n)$. Если фиксировать оснащённый пучок на проективной плоскости, то на его оснащении можно подействовать тором $(\mathbb{C}^*)^r$. Таким образом, на пространстве модулей $\mathcal{M}(r, n)$ действует $(r+2)$-мерный тор $(\mathbb{C}^*)^2 \times (\mathbb{C}^*)^r$. Пусть α и β – положительные взаимно простые числа и

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{Z}^r$$

произвольный вектор, удовлетворяющий условию $0 \leq \omega_i < \alpha+\beta$. Определим одномерный подтор $T^{\vec{\omega}}_{\alpha,\beta} \subset (\mathbb{C}^*)^2 \times (\mathbb{C}^*)^r$ равенством

$$T^{\vec{\omega}}_{\alpha,\beta} = \{(t^\alpha, t^\beta, t^{\omega_1}, t^{\omega_2}, \ldots, t^{\omega_r})\}.$$

Определим вектор $\vec{\rho} = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{\alpha+\beta-1}) \in \mathbb{Z}^{\alpha+\beta}_{\geq 0}$ равенством $\rho_i = \sharp\{j|\omega_j = i\}$, а вектор $\vec{\mu} \in \mathbb{Z}^{\alpha+\beta}_{\geq 0}$ формулой $\mu_i = \rho_{-i\alpha \bmod \alpha+\beta}$.
Обозначим через $E_k, F_k, H_k,\ k = 1, 2, \ldots, \alpha+\beta$, стандартные образующие алгебры Ли $\widehat{sl}_{\alpha+\beta}$. Пусть $\mathcal{V}$ – неприводимое представление алгебры Ли $\widehat{sl}_{\alpha+\beta}$ со старшим весом $\vec{\mu}$. Обозначим через $x \in \mathcal{V}$ вектор старшего веса. Пусть $\mathcal{V}_p$ – векторное подпространство пространства $\mathcal{V}$, порождённое векторами $F_{i_1}F_{i_2}\ldots F_{i_p}x$. Определим характер $\chi_{\vec{\mu}}(q)$ равенством

$$\chi_{\vec{\mu}}(q) = \sum_{p\geq 0} (\dim \mathcal{V}_p) q^p.$$

Через $h_0(X)$ мы будем обозначать количество связных компонент в многообразии X. Глава 4 посвящена доказательству следующей теоремы.
Теорема 4.1. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n\geq 0} h_0\left(\mathcal{M}(r, n)^{T^{\vec{\omega}}_{\alpha,\beta}}\right) q^n = \chi_{\vec{\mu}}(q).$$

Содержание главы 5. В Главе 5 устанавливается взаимосвязь геометрии неподвижных точек действия тора на пространстве модулей пучков с комбинаторикой плоских разбиений.
Плоским разбиением π называется диаграмма Юнга, заполненная положительными целыми числами, невозрастающими вдоль строк и столбцов. Обозначим эту диаграмму Юнга через Y. Число, записанное в клетке $(i, j) \in Y$, обозначается через $\pi_{i,j}$. По определению, мы полагаем $\pi_{i,j} = 0$, если $(i, j) \notin Y$. Положим $|\pi| = \sum_{(i,j)\in Y} \pi_{i,j}$. Множество всех плоских разбиений мы обозначим через $\mathcal{P}$.

Имеется следующая формула Мак-Магона:

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}} q^{|\pi|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^n}.$$

Недавно в работе М. Вулетич было найдено обобщение этой формулы. Для неотрицательных целых чисел n и m положим

$$f(n,m) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1-q^i t^{m+1}}{1-q^{i+1}t^m}, & n \geq 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Пусть π – плоское разбиение. Определим разбиения λ, μ и ν формулами

$$\begin{aligned} \lambda &= (\pi_{i,j}, \pi_{i+1,j+1}, \ldots), \\ \mu &= (\pi_{i+1,j}, \pi_{i+2,j+1}, \ldots), \\ \nu &= (\pi_{i,j+1}, \pi_{i+1,j+2}, \ldots). \end{aligned}$$

Функция $F_\pi(i,j)(q,t)$ определяется равенством

$$F_\pi(i,j)(q,t) = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{f(\lambda_1-\mu_{m+1},m)f(\lambda_1-\nu_{m+1},m)}{f(\lambda_1-\lambda_{m+1},m)f(\lambda_1-\lambda_{m+2},m)}.$$

Пример изображён на Рис. 2.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 \\ \cline{1-3} 3 & 2 & 1 \\ \cline{1-3} 3 & 2 & 2 \\ \hline 4 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad F_\pi(0,0)(q,t) = \frac{1-q^2}{1-qt} \cdot \frac{1-q^3 t}{1-q^2t^2} \cdot \frac{1-q^3t^3}{1-q^4t^2}$$

π

Рис. 2

Для плоского разбиения π положим

$$F_\pi(q,t) = \prod_{(i,j)\in\pi} F_\pi(i,j)(q,t).$$

В работе М. Вулетич доказано, что

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}} F_\pi(q,t) s^{|\pi|} = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-ts^nq^k}{1-s^nq^k}\right)^n.$$

Основным результатом Главы 5 является геометрический смысл функций $F_\pi(q,0)$. Мы показываем, что неприводимые компоненты множества неподвижных точек $\mathcal{M}(r,n)^{(\mathbb{C}^*)^2}$ нумеруются плоскими разбиениями π с условием $|\pi| = n$ и $\pi_{0,0} \leq r$. Неприводимую компоненту, соответствующую плоскому разбиению π, мы обозначаем через $\mathcal{M}(r,n)_\pi^{(\mathbb{C}^*)^2}$.

Пусть π – плоское разбиение и $n = |\pi|$. Имеется цепочка вложений:

$$\mathcal{M}(\pi_{0,0}, n)_{\pi}^{(\mathbb{C}^*)^2} \hookrightarrow \mathcal{M}(\pi_{0,0}+1, n)_{\pi}^{(\mathbb{C}^*)^2} \hookrightarrow \mathcal{M}(\pi_{0,0}+2, n)_{\pi}^{(\mathbb{C}^*)^2} \hookrightarrow \ldots$$

Обозначим через $\mathcal{M}(\infty, n)_{\pi}^{(\mathbb{C}^*)^2}$ предельное пространство.

Теорема 5.1. *Выполняется равенство* $F_\pi(q,0) = P_q\left(\mathcal{M}(\infty, n)_{\pi}^{(\mathbb{C}^*)^2}\right)$.

Содержание приложений. Приложение А содержит нужные нам определения, обозначения и результаты, касающиеся разбиений и диаграмм Юнга. В Приложении Б содержится ряд сведений из алгебраической геометрии, которые мы интенсивно используем во всех главах.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. С. М. Гусейн-Заде за постановку задачи, многочисленные полезные советы и обсуждения.

Автор благодарит проф. Б. Л. Фейгина и проф. С. В. Шадрина за плодотворные обсуждения и поддержку.

Автор очень признателен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за хорошую атмосферу и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. A. Buryak, B. L. Feigin. Generating series of the Poincare polynomials of quasihomogeneous Hilbert schemes. Symmetries, Integrable Systems and Representations, 15-33, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics* **40** (2013). Автору диссертации принадлежат Теоремы 1.1 о когомологиях квазиоднородных схем Гильберта, Теорема 1.2 о статистиках на диаграммах Юнга и Теорема 1.3 о комбинаторном тождестве с q-биномиальными коэффициентами.

2. A. Buryak, B. L. Feigin. Homogeneous components in the moduli space of sheaves and Virasoro characters. *Journal of Geometry and Physics* **62** (2012), no. 7, 1652-1664. Автору диссертации принадлежит доказательство Теоремы 1.1 в случае чётного r.

3. A. Buryak. The classes of the quasihomogeneous Hilbert schemes of points on the plane. *Moscow Mathematical Journal* **12** (2012), no. 1, 1-17.