МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

РЕБРОВ Евгений Дмитриевич

На правах рукописи
УДК 511.9

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

01. 01. 06. — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре теории чисел математического факультета ФГБОУ ВПО "Московский педагогический государственный университет"

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Добровольский Николай Михайлович
Официальные оппоненты:	Гриценко Сергей Александрович доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, теории чисел и геометрии ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
	Шутов Антон Владимирович кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и вычислительной техники ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО "Тульский государственный университет"

Защита состоится 31 мая 2013 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, Механико-математический факультет МГУ, ауд. 1408.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 30 апреля 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор Иванов Александр Олегович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Диссертация посвящена исследованию теоретико-числовых алгоритмов численного интегрирования периодических функций многих переменных. Рассматривается актуальная задача получения оценок мультипликативной дисперсии концентрических алгоритмов численного интегрирования.

Исследование теоретико-числовых алгоритмов численного интегрирования, интерполирования, решения уравнений с частными производными и линейных интегральных уравнений на классах периодических функций – это современная отрасль теоретико-числового метода в приближенном анализе, ей посвящены многочисленные современные работы известных ученых, таких как, Н. М. Коробов [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], Н. Н. Ченцов [8], Н. С. Бахвалов [9, 10], В. А. Быковский [11, 12, 13, 14, 15], С. М. Во-

[1]Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. N 6. С. 1062 — 1065.

[2]Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. N 4. С. 19 — 25.

[3]Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, N 6. С. 1207 — 1210.

[4] Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. N 5. С. 1009—1012.

[5]Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

[6]Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83 — 90.

[7]Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

[8]Гельфанд И. М. Применение метода случайных испытаний (метода Монте-Карло) для решения кинетического уравнения / И. М. Гельфанд, С. М. Фейнберг, А. С. Фролов, Н. Н. Ченцов // Тр. II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958, Доклад 2141), — М.: Атомиздат, 1959. — Т. 2. — С. 628–633.

[9]Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. N 4. С. 3–18.

[10]Бахвалов Н. С., Коробов Н. М., Ченцов Н. Н. Применение теоретико-числовых сеток к задачам приближенного анализа // Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда. Л.: Наука, 1964. Т. II. С. 580 — 587.

[11]Быковский В. А. О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток. Владивосток: ВЦ, 1985. (Препринт.)

[12]Быковский В. А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов. Хабаровск, 1995. С. 1–13. (Препринт.)

[13]Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Математический сборник, 136(178), 4(8), 1988, С. 451 — 467.

[14]Быковский В. А. Оценки отклонений оптимальных сеток в Lp-норме и теория квадратурных формул. // Analysis Mathematica, 22(1996), pp. 81 — 97.

[15]Быковский В. А.Теоретико-числовые решетки в эвклидовых пространствах и их приложения.

ронин [16, 17, 18], Э. Главка [19], Хуа Ло Кен, Вань Юань [20] и многих других.

Однако, оценкам мультипликативной дисперсии концентрических алгоритмов численного интегрирования было посвящено относительно мало работ и здесь остается ряд нерешенных задач.

Диссертация относится к аналитической теории чисел. В ней рассматриваются вопросы численного интегрирования периодических функций многих переменных по системе квадратурных формул с парралелепипедальными сетками, построенных по алгоритму Л. П. Добровольской.

Даются оценки мультипликативной дисперсии для концентрических алгоритмов численного интегрирования, основанных на указанных сетках, на классах E_s^α.

Построен концентрический алгоритм численного интегрирования с использованием алгебраических сеток с весами по методу К. К. Фролова в модификации Н. М. Добровольского и для случая $s = 4$ аналога точной параметризации А. С. Герцога алгебраических сеток для модифицированных алгебраических сеток.

Цель и задачи диссертационной работы. Целью работы является создание и развитие аппарата, позволяющего получать оценки мультипликативной дисперсии концентрических алгоритмов численного интегрирования, величина которой является основой правил остановки алгоритмов интегрирования. Поэтому в диссертационном исследовании были поставлены следующие задачи:

1. Построить алгоритм численного интегрирования с правилом остановки для периодических функций многих переменных по системе квадратурных формул с парралелепипедальными сетками и его программную реализацию в системе Mathcad15. Алгоритм будет строится для системы сеток, являющейся концентрической совокупностью параллелепипедальных подсеток параллелепипедальной

Дис....док. физ.-мат. наук. Хабаровск. ИПМ ДВО АН СССР, 1990.

[16]Воронин С. М. О квадратурных формулах // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. N 5. С. 189–194.

[17]Воронин С. М. О построении квадратурных формул // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59. N 4.

[18]Воронин С. М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Мат. заметки. 1989. Т. 46. N 2. С. 34–41.

[19] Hlawka E. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte f ur Math. 66, 2 1962 P. 140—151.

[20]Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

сетки S, вычисленной по алгоритму Л. П. Добровольской [21].

2. Построить алгоритм численного интегрирования с правилом остановки для периодических функций многих переменных по системе квадратурных формул с алгебраическими сетками и его программную реализацию в системе Mathcad15.

3. Построить алгоритм и его программную реализацию точной параметризации модифицированных алгебраических сеток.

Научная новизна. Впервые получены теоретические результаты, относящиеся к оценкам мультипликативной дисперсии концентрических алгоритмов численного интегрирования. Предложены алгоритмы с правилом остановки, позволяющие учитывать промежуточные результаты, соответствующие приближённому значению интеграла, рассчитанные по подсеткам.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

- новые оценки мультипликативной дисперсии концентрических алгоритмов численного интегрирования для параллелепипедальных сеток с оптимальными коэффициентами, рассчитанными по алгоритму Л. П. Добровольской;

- новые оценки мультипликативной дисперсии концентрических алгоритмов численного интегрирования для алгебраических сеток;

- точная параметризация для модифицированных алгебраических сеток.

Все выносимые на защиту результаты являются новыми и получены самостоятельно.

Основные методы исследования. В работе используются теоретико-числовые методы в приближенном анализе и методы аналитической теории чисел.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы имеют теоретический характер и будут полезны для развития как теоретико-числового метода в приближенном анализе, так и в практике разработки эффективных реализаций алгоритмов численного интегрирования функций многих переменных.

[21] Бочарова Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8. Вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4 — 109.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на:

научно-исследовательском семинаре "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе" профессора Н. М. Добровольского в ТГПУ им. Л. Н. Толстого (г. Тула, неоднократно с 2009 по 2012 г.);

Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики" (г. Тула, 2008 г.);

VII Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы" (г. Тула, 2010 г.);

Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" (г. Тула, 2011 г.);

X Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (г. Волгоград, 2012 г.);

Международной конференции "Computer Algebra and Information Technology" (г. Одесса, Украина , 2012 г.)

Диссертация подготовлена в рамках выполнения проектов РФФИ: гранты № 08-01-00790_а, № 11-01-00571а.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 5 работах, в том числе публикации [1,2] — в изданиях, включенных в перечень ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на 22 раздела, заключения и списка литературы. Материал изложен на 147 страницах машинописного текста, включая 3 рисунка. Библиография содержит 62 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерация теорем в автореферате соответствует нумерации, приводимой в диссертации.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, дается краткий исторический обзор результатов, полученных ранее и связанных с тематикой диссертационной работы, формулируются основные результаты диссертации.

Первая глава — "Численное интегрирование с правилом остановки" (стр. 20 — 79) — посвящена полному изложению основ теории численного интегрирования с правилом остановки. Здесь используются результаты работы [[22]], но многие формулировки теорем и определений уточнены и даны в более общей ситуации.

Доказаны следующие новые основные результаты.

Два варианта обобщенного интегрального критерия Г. Вейля:

Теорема 3. (стр. 21) *Для бесконечной возрастающей последовательности натуральных* N_j *с* $\lim\limits_{j\to\infty} N_j = \infty$ *последовательность сеток с положительными весами* $(M(j), \vec{\rho}(j))$ *из* N_j *взвешенных узлов образует равномерно распределенную в единичном* s*–мерном кубе последовательность взвешенных узлов тогда, и только тогда, когда для любой ограниченной, интегрируемой по Риману периодической с периодом 1 по каждой переменной функции* $f(\vec{x})$ *справедливо равенство*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \rho_{j,k} f(\vec{x}_{j,k}) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Теорема 4. (стр. 24) *Для бесконечной возрастающей последовательности натуральных* N_j *с* $\lim\limits_{j\to\infty} N_j = \infty$ *последовательность сеток с ограниченными весами* $(M(j), \vec{\rho}(j))$ *из* N_j *взвешенных узлов образует равномерно распределенную в единичном* s*–мерном кубе последовательность взвешенных узлов тогда, и только тогда, когда для любой непрерывной или кусочно-постоянной периодической с периодом 1 по каждой переменной функции* $f(\vec{x})$ *справедливо равенство*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \rho_{j,k} f(\vec{x}_{j,k}) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Первая обобщенная теорема Н. М. Коробова:

Теорема 5. (стр. 27) *Пусть ряд Фурье функции* $f(\vec{x})$ *сходится абсолютно,* $C(\vec{m})$ *— ее коэффициенты Фурье и* $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ *— тригономет-*

[22] Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2008. С. 185 — 223.

рические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство

$$R_N[f] = C(\vec{0}) \left(\frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right) + \frac{1}{N} \sideset{}{'}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0}) \left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right) + \sideset{}{'}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}).$$

Если веса положительные или ограниченные, то при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

Оценки мультипликативной дискретной дисперсии погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с различными типами сеток:

Теорема 9. (стр. 58) *Для $D^*_{M_s(N_k),\vec{1}}[f(\vec{x})]$ — мультипликативной дискретной дисперсии погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с равномерной сеткой $M_s(N_k)$ произвольной функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка*

$$D^*_{M_s(N_k),\vec{1}}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{1}{N_{k-1}^{2\alpha}} \right) = O\left(\frac{1}{|M_s(N_{k-1})|^{\frac{2\alpha}{s}}} \right).$$

Теорема 11. (стр. 64) *Для $D^*_{M_s((p_1,\dots,p_k)),\vec{1}}[f(\vec{x})]$ — мультипликативной дискретной дисперсии погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с обобщенной неравномерной сеткой $M_s((p_1,\dots,p_k))$ произвольной функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка*

$$D^*_{M_s((p_1,\dots,p_k)),\vec{1}}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{1}{N_{k-1}} \right).$$

Далее рассматривается алгоритм Добровольской вычисления оптимальных коэффициентов. Алгоритм вычисления величин a_{sk}, $\dots$, a_{11} проводится последовательно, исходя из соотношений:

$$\begin{cases} 1 \leqslant a_{sk} \leqslant p_k - 1, \\ T_{N,A}^{(sk)}(a_{sk}) = \min\limits_{1 \leqslant z \leqslant p_k - 1} T_{N,A}^{(sk)}(z). \end{cases} \tag{1}$$

Если $a_{sk}, a_{s-1k}, \dots, a_{(j\nu)'}$ уже определены, то $a_{j\nu}$ находится из условий

$$\begin{cases} 1 \leqslant a_{j\nu} \leqslant p_\nu - 1, \\ T_{N,A}^{(j\nu)}(a_{j\nu}) = \min\limits_{1 \leqslant z \leqslant p_\nu - 1} T_{N,A}^{(j\nu)}(z). \end{cases} \tag{2}$$

Так как минимальное значение не больше среднего арифметического, непосредственно из определения величин $a_{sk}, a_{s-1k}, \ldots, a_{11}$ вытекает цепочка неравенств

$$T_N^{(11)}(a_{11}) \leqslant T_{N,A}^{(12)}(a_{12}) \leqslant \ldots \leqslant T_{N,A}^{(sk)}(a_{sk}) \leqslant T_{N,A}. \tag{3}$$

Для всех функций $T_{N,A}^{(j\nu)}(z)$ и величины $T_{N,A}$ в работе [21] получены явные формулы, которые пригодны для программной реализации. Пусть целые $a_{sk}, \ldots, a_{11}$ найдены по алгоритму, заданному формулами (1), (2). Обозначим через $a_1, \ldots, a_s$ величины, заданные по формулам

$$a_j = N\left\{\frac{a_{j1}}{p_1} + \ldots + \frac{a_{jk}}{p_k}\right\}, \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{4}$$

Доказывается следующий новый, основной результат.

Теорема 17. (стр. 78) *Если величины $a_1, \ldots, a_s$ заданны формулами (1, 2, 4), то они являются оптимальными коэффициентами по модулю N индекса s и для мультипликативной дискретной дисперсии $D_M^*[f(\vec{x})]$ параллелепипедальной сетки $M = M_N(a_1, \ldots, a_s)$ справедливы оценки*

$$0 \leqslant D_M^*[f(\vec{x})] = \|f\|^2_{E_s^\alpha}\left(\frac{\ln^{s\alpha} N_{k-1}}{N_{k-1}^\alpha}\right),$$

где

$$N_1 = p_k, \quad N_2 = p_k p_{k-1}, \quad \ldots, N_{k-1} = p_k \cdot \ldots \cdot p_2, \quad N = N_k = p_k \cdot \ldots \cdot p_1.$$

Во второй главе — "Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками" (стр. 80 — 126) — исследуется новый класс квадратурных формул — квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками.

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор, такой что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{5}$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (5) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Напомним, что

$$\lambda_1(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_1 = \max_{0\leqslant k\leqslant s-1} |\Theta_1|^k + \ldots + |\Theta_s|^k,$$
$$\lambda_2(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_2 = \max_{\nu=1,\ldots,s} (1 + |\Theta_\nu| + \ldots + |\Theta_\nu^{s-1}|) = \|T^\top(\vec{a})\|_1,$$

где $T^\top$ — транспонированная матрица к матрице T.

Тогда параллелепипед

$$\Pi_s(T_1) = \left\{\vec{x} \,\middle|\, |t_{\nu 1}x_1 + \ldots + t_{\nu s}x_s| \leqslant \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, \ldots, s)\right\},$$

задаваемый матрицей

$$T_1 = T_1(\vec{a}) = \frac{1}{2\|T(\vec{a})\|_1} \cdot T(\vec{a}), \tag{7}$$

содержит $s-$мерный куб

$$K_s = \{\vec{x} \,|\, |x_\nu| \leqslant 1, \quad \nu = 1, \ldots, s\} = \{\vec{x} \,|\, \|\vec{x}\|_1 \leqslant 1\},$$

где $\|\vec{x}\|_1 = \max\limits_{\nu=1,\ldots,s} |x_\nu|$, поскольку $\|T(\vec{a}) \cdot \vec{x}\|_1 \leqslant \|T(\vec{a})\|_1 \cdot \|\vec{x}\|_1$, то есть

$$\max_{\substack{|x_\nu|\leqslant 1 \\ \nu=1,\ldots,s}} \left|\Theta_1^k x_1 + \ldots + \Theta_s^k x_s\right| \leqslant |\Theta_1|^k + \ldots + |\Theta_s|^k,\ (k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Решётка $\Lambda(T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(T(\vec{a})) = \left\{\vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^\nu m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^\nu m_\nu\right) \,\middle|\, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Так как координаты любой ненулевой точки $\vec{x} \in \Lambda(T(\vec{a}))$ — алгебраически сопряженные целые алгебраические числа, то произведение $x_1\cdot\ldots\cdot x_s$ — ненулевое целое рациональное число.

Доказаны следующие новые основные результаты.

Теорема 19. (стр. 104) *Если* $\Theta_\nu\,(\nu = 1,\ldots,s)$ — *действительные корни неприводимого многочлена*

$$P_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s$$

с целыми коэффициентами, матрица $T = T(\vec{a})$ *и* α — *действительное число больше единицы, то для обобщенной гиперболической дзета-функции сдвинутой решетки* $\zeta_H\left(qQ\Lambda(T) + Q\vec{m}\cdot T|\alpha\right)$ *справедлива оценка:*

$$\zeta_H\left(qQ\Lambda(T) + Q\vec{m}\cdot T|\alpha\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(6^s\cdot(s+1)\left(\frac{s\alpha(s-1)\log_2 Q}{\alpha-1} + s\log_2(\lambda_2(T)) + 2\right)^{s-1}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(1+\frac{1}{(\alpha-1)q^{s\alpha}}\right) + \frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1+\frac{1}{q\lambda(T)}\right)^{s}\left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{q^\alpha}\right)^{s-1}\right)\frac{1}{Q^{s\alpha}},$$

где $\lambda_2(T) = \max\limits_{\nu=1,\ldots,s}\left(1+|\Theta_\nu| + \ldots + |\Theta_\nu^{s-1}|\right) > s$.

Теорема 20. (стр. 108) *Пусть параллелепипед* $\Pi_s(T)$ *содержит куб* K_s *и* $\vec{z}\in\mathbb{R}^s$. *Тогда погрешность квадратурной формулы*

$$\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \left(\det(q\Lambda(T))\right)^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(q(\Lambda(T)),\vec{z})}\rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(q(\Lambda(T)),\vec{z})}[f]$$

на классе функций $E_s^\alpha(C)$, $(1<\alpha\leqslant r)$ *с весовой функцией* $\rho(\vec{x})$ *порядка* r *с константой* B *удовлетворяет оценке*

$$R_{N'(q(\Lambda(T)),\vec{z})}\left[E_s^\alpha(C)\right] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|R_{N'(q(\Lambda(T)),\vec{z})}[f]\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\cdot B\cdot\left(2\left(1+\zeta(\alpha)\right) + \left(1+2\zeta(\alpha)\right)2^\alpha\right)^s\zeta_H(q\Lambda(T)|\alpha).$$

Теорема 21. (стр. 115) *Пусть* $\Theta_\nu, (\nu = 1,\ldots,s)$, *действительные корни неприводимого многочлена*

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s$$

с целыми коэффициентами.

Пусть, матрица $T = T(\vec{a})$ *задана соотношением (6), матрица* T_1 — *равенством (7), и* $1<\alpha\leqslant r$.

Тогда для правила остановки Δ концентрического алгоритма приближенного интегрирования порядка $r \geqslant 2$ по квадратурным формулам

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \left(\det\left(Q_j\Lambda(T(\vec{a}))\right)\right)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(Q_j\Lambda(T(\vec{a})))} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(Q_j\Lambda(T(\vec{a})))}[f]$$

на классе функций $E_s^\alpha(C)$, $(1 < \alpha \leqslant r)$ с весовой функцией $\rho(\vec{x})$ порядка r с константой B справедлива оценка

$$\Delta_{N'(Q_j(\Lambda(T)))}\left[E_s^\alpha(C)\right] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} \left|\Delta_{N'(Q_j(\Lambda(T)))}[f]\right| \leqslant$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C^2 \cdot B^2 |\det T| \cdot \left(2\left(1+\zeta(\alpha)\right) + \left(1+2\zeta(\alpha)\right)2^\alpha\right)^{2s} \cdot \\
&\cdot \frac{q_j^s}{Q_{j-1}^{2s\alpha}} \left(6^s \cdot (s+1)\left(\frac{s\alpha(s-1)\log_2 Q_{j-1}}{\alpha-1} + s\log_2(\lambda_2(T)) + 2\right)^{s-1} \cdot \right.\\
&\cdot \left(1 + \frac{1}{(\alpha-1)q_j^{s\alpha}}\right) + \frac{s\alpha 2^{s+\alpha-1}}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1+\frac{1}{q_j\lambda(T)}\right)^s \cdot \\
&\left. \cdot \left(1+\frac{\zeta(\alpha)}{q_j^\alpha}\right)^{s-1}\right)^2 = O\left(\frac{q_j^s \ln^{2(s-1)} Q_{j-1}}{Q_{j-1}^{2s\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Кроме этого в последнем разделе второй главы предложено решение проблемы точной параметризации модифицированной алгебраической сетки биквадратичного поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

Третья глава (стр. 127 — 136) посвящена программной реализации алгоритмов численного интегрирования с правилом остановки для параллелепипедальных и алгебраических сеток.

Во-первых, в этой главе дается простая программа вычисления оптимальных коэффициентов для простого модуля по координатному алгоритму Коробова. Далее дается обоснование этого алгоритма для случая произвольного составного модуля.

Во-вторых, приводится программная реализация алгоритма Добровольской вычисления оптимальных коэффициентов по модулю, равному произведению различных простых чисел. Оптимальные скоростные характеристики данный алгоритм достигает на специальных последовательностях простых чисел, которые существуют любой длины в силу постулата Бертрана.

В-третьих, дается программная реализация концентрического мультипликативного алгоритма численного интегрирования с помощью параллелепипедальных сеток, вычисленных по алгоритму Добровольской.

Наконец, в последнем разделе третьей главы предлагается программная реализация концентрического мультипликативного алгоритма численного интегрирования с алгебраическими сетками биквадратичного поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$. Выбор конкретного биквадратичного поля обусловлен тем обстоятельством, что в предыдущей главе удалось решить именно для этого поля проблему точной параметризации точек сетки.

В заключение выражаю благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, постоянное внимание и полезные обсуждения.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Ребров Е. Д., Селиванов С. В. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма II рода // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 2. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. С. 83 - 92.** Автору диссертации принадлежат теоремы 3 и 4 об оценке погрешностей квадратурных формул.

2. **Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. № 6. Часть 2. Волгоград: Изд-во ВГСПУ "Перемена 2012. С. 90 - 98.**

   Статья содержит обзорный доклад по итогам совместной работы и вклад соавторов неразделим.

3. Герцог А. С., Ребров Е. Д., Триколич Е. В. О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сборник. Т. X. Вып. 2(30). — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2009. С. 10 - 54.

Результаты работы получены совместно и вклад соавторов неразделим.

4. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник. Т. 10. Вып. 1(29). Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2009. С. 65 - 77.

5. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник. Т. 13. Вып. 3(43). Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2010. С. 53 - 90.

.