МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.518.3

Политов Антон Викторович

Условия сходимости орторекурсивных разложений в гильбертовых пространствах

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В.Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Лукашенко Тарас Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент Галатенко Владимир Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Лившиц Евгений Давидович ООО Эверноут ведущий программист
	кандидат физико-математических наук Панкратьев Антон Евгеньевич МГУ имени М. В.Ломоносова доцент кафедры МаТИС
Ведущая организация:	Московский государственный технологический университет СТАНКИН

Защита состоится 24 мая 2013 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 в Московском государственном университете имени М. В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП–1, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан 24 апреля 2013 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.85 в МГУ
доктор физико-математических
наук, профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория ортогональных рядов (рядов Фурье) — одно из традиционных направлений математики, изначально появившееся при изучении различных физических явлений, таких как теплопроводность, колебания струны, распространение звука. Одним из основоположников этой теории стал Даламбер, проинтегрировавший в 1747 году уравнение звучащей струны, что послужило началом для целого ряда работ, раскрывших понятие произвольной функции. Первоначальный вопрос, стоявший перед Даламбером, заключался в следующем: если произвольно отклонить струну от ее положения равновесия, существует ли формула, точно изображающая начальное положение этой струны?

В первой половине XIX века при изучении теплопроводности Фурье предложил метод вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, изображающего «произвольную» функцию. Этот метод довольно быстро нашёл приложения в других областях, например, в астрономии и акустике.

В дальнейшем ортогональные ряды стали рассматриваться не только по тригонометрической системе, но и по другим функциональным системам; рядами Фурье стали называть разложения по произвольному ортогональному базису в произвольном гильбертовом пространстве.

Ряды Фурье обладают многими положительными с практической точки зрения свойствами: простота вычисления коэффициентов; быстрое вычисление погрешности благодаря равенству Бесселя; отсутствие необходимости пересчета коэффициентов, если понадобилось увеличить точность приближения. По этой причине по мере развития информационных технологий расширилась сфера применения рядов Фурье — они стали применяться при обработке, передаче и хранении различных сигналов, таких, как изображения, аудиофрагменты, видео.

Однако у рядов Фурье есть и недостатки. Если система, по которой в данной задаче удобно производить разложение, неортогональна, то разложить в ряд Фурье по ней нельзя, поэтому существенно ограничивается область применения разложений в ряды Фурье. Кроме того, если при передаче или вычислении коэффициентов появилась погрешность, ее нельзя устранить, вычисляя остальные коэффициенты: ряд с неверными коэффициентами не может сходиться к разлагаемому элементу.

Ввиду изложенных недостатков возникла задача определить процесс разложения, наследующий преимущества классических ортогональных разложений, но лишённый перечисленных недостатков. В работе рассматривается один из возможных способов решения этой задачи — ортoрекурсивные разложения (ОРР). Изучается случай абстрактного гильбертова пространства с заданной в нем системой элементов и имеющий прикладное значение случай разложения по системе подпространств — рассмотрен случай с произвольными подпространствами и некоторые частные случаи систем функций в L_2.

Исследование сходимости ОРР является достаточно новой областью, изучавшейся в работах Т. П. Лукашенко[1)], В. В. Галатенко[2)], А. Ю. Кудрявцева[3)]. Понятие орторекурсивных разложений было введено Т. П. Лукашенко в 2000-2001 годах. Напомним определение ОРР.

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $\mathcal{E} = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система нормированных векторов из $\mathcal{H}$.

Определение 1. Пусть f — произвольный вектор, лежащий в $\mathcal{H}$. Обозначим через $\widehat{f}_1$ скалярное произведение (f, e_1), через r_1 — разность $f - \widehat{f}_1 e_1$. Пусть уже найдены $\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_k$ и $r_1, r_2, \dots, r_k$. Положим

$$\widehat{f}_{k+1} = (r_k, e_{k+1})$$

и

$$r_{k+1} = r_k - \widehat{f}_{k+1} e_{k+1}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k e_k$ называется *орторекурсивным рядом Фурье* элемента f по системе $\mathcal{E}$, а последовательность $\{\widehat{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательностью *орторекурсивных коэффициентов Фурье* элемента f по системе $\mathcal{E}$.

Для орторекурсивных разложений сохраняются такие свойства обычных рядов Фурье, как равенство Бесселя

$$\|r_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{f}_k|^2$$

и неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2 \le \|f\|^2.$$

[1)] Лукашенко Т.П., *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам.* // Вестн. Моск. ун-та. Матем.механ. 2001. № 1. 6–10.

[2)] Галатенко В.В. *Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов* // Матем. сб., **195**:7 (2004), 21–36.

[3)] Кудрявцев А.Ю., *О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам.* // Матем. заметки, **92**:5 (2012), 707–720.

Кроме того, сходимость к разлагаемому элементу эквивалентна равенству Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f_k}|^2 = \|f\|^2.$$

Эти утверждения были доказаны Т. П. Лукашенко[4)].

Отметим, что если система, по которой производится разложение, является ортонормированным базисом, то полученный орторекурсивный ряд совпадает с классическим рядом Фурье.

В случае неортогональных систем полнота системы, по которой производится разложение, не гарантирует сходимости орторекурсивного ряда к разлагаемому элементу. В связи с этим возникает задача исследовать условия, при которых эта сходимость имеет место.

В прикладных задачах часто возникают вычислительные погрешности, в частности, погрешности в вычислении коэффициентов. Поэтому возникает задача формализации вычислительных ошибок и исследования устойчивости ОРР к появляющимся ошибкам.

В некоторых задачах более естественно рассматривать разложения по системе подпространств. Например, при разложении по системам сжатий и сдвигов естественно рассматривать как отдельное подпространство линейные оболочки функций одной пачки.

Идея рассмотрения ОРР по системе подпространств была предложена А. Ю. Кудрявцевым и существенно развита Т. П. Лукашенко и В. А. Садовничим[5) 6)].

Определим ОРР по системе подпространств следующим образом. Пусть в пространстве $\mathcal{H}$ задана система произвольных замкнутых подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим через $\mathbf{P}_n$ ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{H}_n$. Для удобства дальнейшего изложения введем еще одно обозначение:

$$\mathbf{P}_n^{\perp} = \mathbf{Id} - \mathbf{P}_n,$$

где $\mathbf{Id}$ — единичный оператор. Для произвольного элемента $f \in \mathcal{H}$ по-

---

[4)] Лукашенко Т.П., *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам.* // Вестн. Моск. ун-та. Матем.механ. 2001. № 1. 6–10.

[5)] Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. *О рекурсивных разложениях по цепочке систем.* // Доклады Российской Академии наук **425**:6(2009), 741–746.

[6)] Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. *Орторекурсивные разложения по подпространствам.* // Доклады Российской Академии наук **445**:2(2012), 135–138.

ложим

$$\widetilde{f}_1 = \mathbf{P}_1 f;$$

далее, если уже определены $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \ldots, \widetilde{f}_{n-1}$, положим

$$\widetilde{f}_n = \mathbf{P}_n r_{n-1}(f),$$

где

$$r_{n-1}(f) = f - \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{f}_k.$$

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n$ называется *обобщенным орторекурсивным рядом Фурье* элемента f по системе подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Для разложений по системам подпространств остаются справедливыми аналоги равенства и неравенства Бесселя, эквивалентность равенства Парсеваля сходимости разложения к разлагаемому элементу. Равенство Бесселя принимает вид

$$\|r_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \|\widetilde{f}_k\|^2,$$

неравенство Бесселя — вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\widetilde{f}_k\|^2 \leq \|f\|^2,$$

а равенство Парсеваля, также верное тогда и только тогда, когда разложение сходится к разлагаемому элементу, — вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\widetilde{f}_k\|^2 = \|f\|^2.$$

Доказательства этих утверждений аналогичны соответствующим доказательствам для ОРР по системе векторов.

Заметим, что в случае $\mathcal{H}_n = \langle e_n \rangle$ разложение совпадает с введенным выше ОРР по системе элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

А. Ю. Кудрявцевым были рассмотрены орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции.

Определение 3. Пусть $\varphi(x) \in L_2[0,1)$, $\|\varphi(x)\|_2 = 1$ и $\varphi(x) = 0$ вне $[0,1)$.

Система

$$\varphi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\varphi(2^k x - l), k = 0,1,2,\ldots, l = 0,1,\ldots,2^k - 1,$$

называется *системой двоичных сжатий и сдвигов функции* $\varphi(x)$.

Будем обозначать ее через $S(\varphi)$. Занумеруем элементы $S(\varphi)$ натуральными числами, взяв в качестве n-го элемента функцию $\varphi_{k,l}(x)$, где k и l таковы, что $n = 2^k + l$ (при указанных в определении ограничениях на k и l такое представление существует и единственно для каждого натурального n).

По занумерованной таким образом системе можно рассматривать ОРР, беря в качестве e_n функцию с номером n. Однако для разложений по системам сжатий и сдвигов будет удобно ввести подпространства (линейные оболочки функций $\varphi_{k,l}$ при фиксированном k)

$$\mathcal{H}_k = \langle \varphi_{k,0}(x), \varphi_{k,1}(x), \ldots, \varphi_{k,2^k-1}(x) \rangle$$

и рассматривать проекции на них. Ввиду того что при фиксированных k функции $\varphi_{k,l}$ ортогональны друг другу, разложение по этой системе подпространств будет эквивалентно обычному ОРР по системе $S(\varphi)$.

Исторически первым примером системы сжатий и сдвигов является система Хаара[7]. Позже в работах различных математиков (Добеши[8], Мейер[9] и др.), рассматривались разложения функций и по другим системам сжатий и сдвигов.

Недостаток системы Хаара, как и других ортонормированных базисов, заключается в том, что, как уже говорилось выше, разложение по ним неустойчиво к малым изменениям системы и ошибкам при вычислении коэффициентов, вызванным, например, вычислительными погрешностями. Этот недостаток может быть устранен переходом к неортогональным системам сжатий и сдвигов. Если ошибки не очень большие и ОРР по такой системе сходится к разлагаемому элементу, то ОРР с такими ошибками по-прежнему будет сходиться в точности к разлагаемому элементу.

[7] Haar A., *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.* //Math. Ann. 1910. **69.** 331–371.

[8] Daubechies I., *Orthonormal bases of compactly supported wavelets* // Communs. Pure and Appl. Math. **41**:7(1988). 909–996.

[9] Meyer Y., *Wavelets and operators.*Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

Интересным представляется изучение условий сходимости обычных и обобщенных орторекурсивных разложений для последующего использования ОРР в прикладных задачах.

Цель работы. Целью работы является изучение общих свойств орторекурсивных разложений, включая исследование условий, достаточных для сходимости к разлагаемому элементу, а также орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты состоят в следующем.

– Получен критерий, связывающий сходимость орторекурсивных разложений и матрицу Грама системы, по которой происходит разложение, а также сформулировано в терминах матрицы Грама необходимое условие устойчивости ОРР к любому конечному числу ошибок.

– Найдены формулы, позволяющие выразить орторекурсивные коэффициенты через матрицу Грама системы, по которой производится разложение.

– Установлены достаточные условия сходимости обобщенных орторекурсивных разложений.

– Изучена сходимость ОРР по обобщенным системам сжатий и сдвигов.

Основные методы исследований включают как классические методы математического анализа и теории функций действительного переменного, так и активно развивающиеся в последние годы методы, связанные с теорией орторекурсивных разложений.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит преимущественно теоретический характер. В то же время полученные результаты могут найти применение в изучении различных систем разложения. Кроме того, полученные результаты уже оказались востребованы при обработке и анализе сигналов в тактильной механорецепторной диагностике[10] и в геномных исследованиях.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова:

[10] Садовничий В.А., Буданов М.В., Галатенко А.В., Галатенко В.В., Лебедев А.Е., Лемак С.С., Лукашенко Т.П., Петров А.А., Подольский В.Е., Семейко А.А., Соколов М.Э., Яковлев И.С., *Математические задачи и методы в тактильной диагностике.* М.: МАКС Пресс Москва, 2008.

– на семинаре по теории ортогональных рядов под руководством проф. Т. П. Лукашенко, проф. М. К. Потапова, проф. В. А. Скворцова и проф. М. И. Дьяченко(неоднократно, 2010–2012),

– на семинаре по теории ортоподобных систем под руководством проф. Т. П. Лукашенко, доц. В. В. Галатенко и доц. Т. В. Родионова (неоднократно, 2007–2012),

– на семинаре по теории ортогональных рядов под руководством акад. РАН, проф. Б. С. Кашина и чл.-корр. РАН, проф. С. В. Конягина(2010).

Результаты диссертации также докладывались на российских и международных конференциях: механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова:

– на Воронежских зимних математических школах “Современные методы теории функций и смежные проблемы” (2009, 2011),

– на Саратовских зимних математических школах “Современные проблемы теории функций и их приложения” (2008, 2010, 2012),

– на международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ акад. В. А. Садовничего (2009).

Публикации. Список основных работ автора по теме диссертации приведен в конце автореферата (8 публикаций). Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-2], вышедших в журналах, входящих в список ВАК.

Поддержка. Работа подготовлена в рамках исследований, проводимых совместно с научно-техническим центром «БиоКлиникум» (ГК 14.514.11.4025 от 10 августа 2012 г.).

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 31 наименование. Общий объем диссертации составляет 69 страниц.

Содержание работы

Во **введении** дается общий обзор исследуемой проблемы, формулируются решаемые задачи и приводятся основные результаты работы.

Глава 1 посвящена исследованиям свойств орторекурсивных разложений с заранее известной структурой системы векторов, то есть с известной матрицей Грама. В главе 1 предполагается, что гильбертово пространство сепарабельно и рассматривается над полем действительных чисел. Оно будет обозначаться через $\mathcal{H}$. Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$. Через $\mathcal{E}=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначим произвольную счетную нормированную систему векторов в $\mathcal{H}$.

Через g_{ij} будем обозначать скалярное произведение (e_i,e_j). Через G обозначим матрицу Грама системы $\mathcal{E}$, то есть матрицу, состоящую из g_{ij}. Через H обозначим треугольную матрицу, у которой элементы, лежащие не выше главной диагонали, совпадают с элементами G, а остальные элементы равны нулю (то есть $G = H + H^{\top} - I$, где I — единичная матрица).

Для произвольного $e_n \in \mathcal{E}$ рассмотрим его орторекурсивный ряд Фурье по системе $\mathcal{E}$, который будет иметь вид $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}e_k$, где $c_{nk}=\widehat{(e_n)}_k$. Матрицу, состоящую из чисел c_{nk} (то есть в n-й строке стоят орторекурсивные коэффициенты вектора e_n) обозначим через C.

Глава состоит из шести параграфов.

В параграфе 1 приведены необходимые сведения о действиях с бесконечными матрицами и описаны основные отличия от операций над конечными матрицами.

Параграф 2 содержит критерий, связывающий сходимость ОРР и матрицу Грама системы, по которой производится разложение.

Полученный критерий внешне значительно отличается от известной в простейшем случая формулировки — теоремы В. В. Галатенко для случая двумерного пространства. Связь между общим и частным критериями раскрыта в параграфе 3.

В параграфе 4 приведена лемма, указывающую на глубокую связь между обращением матрицы H и орторекурсивными разложениями в принципе — элементы обращенной матрицы являются орторекурсивными коэффициентами для некоторых векторов и систем, тесно связанных с исходной системой векторов.

В параграфе 5 приведён результат, дополняющий теоремы В. В. Галатенко об ОРР с ошибками в вычислении коэффициентов и опирающийся на результат, полученный в предыдущем параграфе.

Ошибки и устойчивость формализуются следующим образом[11].

[11] Галатенко В.В.,. *Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов.* // Изв. РАН. Сер. матем., 2005. **69**:1, 3–16.

Определение 4. Индуктивно определим последовательность остатков разложения и последовательность коэффициентов разложения (верхний индекс указывает на то, что в вычислении коэффициентов разложения возможны ошибки). Положим

$$r_0^e(f) = f.$$

Если уже определен остаток r_n^e, то положим

$$\widehat{f}^e_{n+1} = (r_n^e, e_{n+1})(1 + \varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1},$$

где ε_{n+1} и ξ_{n+1} — некоторые числа. Положим

$$r_{n+1}^e(f) = r_n^e(f) - \widehat{f}^e_{n+1} e_{n+1}.$$

Определение 5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}^e_n e_n$ называется *орторекурсивным разложением элемента f по системе $\mathcal{E}$ с ошибками $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$.*

Отметим, что орторекурсивное разложение по системе $\mathcal{E}$ с нулевыми ошибками совпадает с обычным орторекурсивным разложением по этой системе.

Определение 6. Будем говорить, что орторекурсивное разложение по системе $\mathcal{E}$ *абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок* в вычислении коэффициентов, если для любого элемента $f \in \mathcal{H}$ и любого целого неотрицательного числа N орторекурсивное разложение элемента f по системе $\mathcal{E}'$, полученной из системы $\mathcal{E}$ удалением первых N элементов, сходится к f.

В параграфе 5 получена теорема, связывающая абсолютную устойчивость ОРР к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов и матрицу Грама системы, по которой производится разложение.

Параграф 6 содержит формулу для вычисления орторекурсивных коэффициентов через матрицу Грама системы, по которой осуществляется разложение.

Основными результатами главы являются следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть замыкание линейной оболочки $\mathcal{E}$ совпадает с $\mathcal{H}$. Следующие утверждения эквивалентны.*
1) *Орторекурсивный ряд Фурье каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ по системе $\mathcal{E}$ сходится к разлагаемому элементу;*
2) *выполнена система условий:*

а) $G(H^{-1}G) = G$,

б) $(CH)C^\top = C(HC^\top)$.

Теорема 1.3. *Если система $\mathcal{E}$ устойчива к любому конечному числу ошибок, то имеет место равенство*

$$GH^{-1} = 0.$$

В **главе 2** сходимость исследуется для более общего случая — ОРР по системе замкнутых подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Результаты этой главы получены с использованием некоторых идей, высказанных А. Ю. Кудрявцевым: рассматривается система вложенных пространств, для которой сходимость доказывается тривиально, а затем выясняется, насколько можно изменить вложенные подпространства $\{\mathcal{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы ОРР по измененной системе по-прежнему сходилось к разлагаемому элементу для каждого разлагаемого элемента.

Глава состоит из 3 параграфов.

Параграф 1 содержит необходимые определения.

В параграфе 2 рассмотрен важный частный случай разложений — разложения по системе вложенных подпространств.

В параграфе 3 получены достаточные условия сходимости обобщенных ОРР.

Основной результат главы (теорема 2.1) сформулирован в терминах операторных норм ($\mathbf{D}_n$ — проекторы на подпространства из системы вложенных подпространств, $\mathbf{P}_n$ — проекторы на подпространства из системы $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие соотношения:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \|\mathbf{D}_k^\perp \mathbf{P}_n\|^2 < \infty$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{D}_k^\perp \mathbf{P}_n\| = 0$ *при фиксированном* k,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{P}_n^\perp \mathbf{D}_n\| = B < 1$.

Тогда обобщенное ОРР каждого элемента f из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ по системе $\{\mathcal{H}_n\}$ сходится к разлагаемому элементу.

В **главе 3** на основе результатов главы 2 доказывается теорема о сходимости ОРР по системе двоичных сжатий и сдвигов.

Теорема . *Пусть функция* $\varphi(x) \in L_2[0,1)$ *такова, что* $\int\limits_0^1 \varphi(x)dx \neq 0$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-k}) < \infty$, *где* $\omega_2(\varphi, \delta)$ *— интегральный модуль непрерывности в* $L_2[0,1)$. *Тогда для каждого элемента из* $L_2[0,1)$ *ОРР этого элемента по* $S(\varphi)$ *сходится к разлагаемому элементу в метрике* L_2.

Кроме того, рассмотрен ряд частных случаев, обобщающих эту теорему, каждый из которых может иметь практическое применение, например, в обработке сигналов (пункты 3.1, 3.2, 3.3) или изображений (параграф 4).

Результаты главы 3 сформулированы в терминах функций, порождающих системы сжатий и сдвигов, и их модулей непрерывности.

Автор искренне благодарит научных руководителей профессора Тараса Павловича Лукашенко и доцента Владимира Владимировича Галатенко за постановку задач, многочисленные обсуждения диссертации и конструктивные замечания, а также В. В. Богомазова и Д. Е. Александрова за помощь в редактировании текста диссертации.

Работы автора по теме диссертации

1. Политов А.В., *Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах.* //Вестник МГУ.Сер.1.Матем.,мех. 2010. №3. 3–7.

2. Политов А.В., *Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах.* //Математические заметки, **93**:4(2013), 637–640.

3. Политов А.В., *Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах.* Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Саратовской зимней школы. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. 146–147.

4. Политов А.В., *Орторекурсивные разложения по системе сжатий и сдвигов нескольких функций.* Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронежской зимней математической школы — Воронеж, ВГУ, 2009. 144–145.

5. Политов А.В., *Орторекурсивные разложения по системе сжатий и сдвигов нескольких функций.* Современные проблемы математики,

механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего. — Москва: Издательство «Университетская книга», 2009. 89–90.

6. Политов А.В., *Критерий сходимости орторекурсивных разложений в гильбертовых пространствах.* Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 15-й Саратовской зимней школы. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 141–142.

7. Политов А.В., *Критерий сходимости орторекурсивных разложений в гильбертовых пространствах.* Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронежской зимней математической школы — Воронеж, ВГУ, 2011. 268–269.

8. Политов А.В., *Достаточные условия сходимости орторекурсивных разложений на квадрате.* Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 16-й Саратовской зимней школы. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2012. 135.