МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

СМОЛЕНЦЕВ Михаил Викторович

О СПЕКТРАХ ЧАСТОТ НУЛЕЙ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Сергеев Игорь Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Шамолин Максим Владимирович
	кандидат физико-математических наук, доцент Дементьев Юрий Игоревич
Ведущая организация:	Институт математики НАН Беларуси

Защита диссертации состоится 24 мая 2013 г. в 16 ч 40 мин на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские Горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 24 апреля 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений.

Важнейшими направлениями качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений являются теория устойчивости и теория колебаний.

С теорией устойчивости, созданной А.М. Ляпуновым (1892 г.), естественным образом связаны, прежде всего, характеристические показатели Ляпунова решений дифференциальных систем, а также введенные позже показатели Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, отвечающие за разнообразные асимптотические свойства решений или систем.

В теории же колебаний немалая роль отводится вопросам колеблемости решений дифференциальных уравнений, восходящим к фундаментальным исследованиям Ж. Штурма (1837–41 гг.) и более поздним исследованиям А. Кнезера (1896–98 гг.).

В связи с этим, особенно интересной и актуальной представляется задача о нахождении аналогов показателей Ляпунова, отвечающих за колеблемость решений дифференциальных уравнений и систем.

Изучением различных свойств самых разных показателей решений и систем занимались многие математики. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, В.М. Миллионщиков, Н.А. Изобов, М.И. Рахимбердиев, И.Н. Сергеев, Е.К. Макаров, Е.А. Барабанов, А.Н. Ветохин, В.В. Быков и другие. Исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах[1,2] и монографиях[3,4].

[1]Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[2]Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №12. С. 2034–2055.

[3]Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

[4]Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006.

Исследования по тематике колеблемости успешно продвигались усилиями многих математиков, среди которых необходимо особо отметить В.А. Кондратьева, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, А.Н. Левина, Н.А. Изобова, И.В. Асташову и других (обширные библиографии по этому вопросу можно найти, например, в обзоре[5] и монографии[6]). Заметим, что перечисленных авторов в основном интересовали вопросы, связанные с наличием у заданного уравнения хотя бы одного колеблющегося решения (имеющего бесконечное число нулей на полупрямой или на промежутке), а также с описанием всего множества таких решений или каких-либо дополнительных их свойств. Немало усилий в этих работах было направлено прежде всего на получение коэффициентных (т. е. опирающихся только на свойства коэффициентов уравнения) признаков существования или отсутствия колеблющихся решений.

В 2004 г. И.Н. Сергеев в докладе[7] впервые ввел понятие *характеристической частоты* $\nu(y)$ скалярной функции y, несущее в себе черты усреднения по Ляпунову и позволившее численно измерять колеблемость решений на полупрямой. В дальнейших его работах изучались свойства введенных частот и их различные модификации.

Частоту решения можно интерпретировать как среднее (по всей полупрямой) значение числа нулей решения на полуинтервале длины π. Оказалось, что на решениях линейных однородных уравнений с ограниченными коэффициентами она принимает лишь конечные значения[8] и позволяет естественным образом классифицировать колеблющиеся решения, ставя в соответствие, к примеру, функции

$$y(t) = \sin \omega t$$

ее частоту $\nu(y) = \omega$ (подобно тому, как показатели Ляпунова и Перрона позволяют измерять по экспоненциальной шкале рост нормы решения,

[5] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. **24**. №2. С. 43–96.

[6] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012.

[7] Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. **40**. №11. С. 1576.

ставя в соответствие вектор-функции x с нормой

$$|x(t)| = \exp \lambda t$$

ее показатель $\chi(x) = \lambda$).

Следует отметить, что *спектр* (множество различных значений на всех ненулевых решениях) показателей Ляпунова n-мерной линейной системы состоит ровно из n чисел (с учетом их кратности). В то же время, спектр показателей Перрона такой системы, вообще говоря, не является конечным и, более того, может совпадать с любым наперед заданным ограниченным и замкнутым сверху измеримым (суслинским) подмножеством числовой прямой.

Что же касается характеристических частот, то в работе[8] доказано, что:

- все ненулевые решения произвольного уравнения первого или второго порядка имеют одну и ту же частоту;

- для любого $N > 0$ существует уравнение четвертого порядка, даже с постоянными коэффициентами, у которого общее число частот различных ненулевых решений превосходит N (впоследствии этот результат был значительно усилен А.Ю. Горицким[9], предъявившим линейное однородное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами, спектр частот которого представляет собой целый отрезок числовой прямой).

Отсюда следует, что не существует числовой функции от n, ограничивающей сверху количество различных частот решений уравнения n-го порядка.

Далее, для систем с постоянными или периодическими коэффициентами (и вообще, для правильных систем) спектры показателей Ляпунова и Перрона одинаковы: они в автономном случае совпадают с множеством

[8]Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

[9]Горицкий А.Ю. Характеристические частоты линейных комбинаций синусов // Дифференц. уравнения. 2008. **44**. №6. С. 860.

действительных частей собственных значений ее матрицы, а в периодическом случае естественным образом выражаются через множество мультипликаторов системы.

В работе[8] доказано, что спектр характеристических частот линейного автономного уравнения n-го порядка тесно связан с множеством *модулей мнимых частей* всех корней соответствующего характеристического многочлена:

- при любом натуральном n этот спектр заведомо включает в себя множество указанных модулей;

- при $n = 1, 2$ этот спектр состоит из одного числа и совпадает с множеством указанных модулей (нетрудно видеть, что подобное совпадение происходит и при $n = 3$, правда, только для спектров частот корней и знаков[10]);

- при $n \geqslant 4$ с множеством указанных модулей совпадает, вообще говоря, лишь набор специально выделенных (с использованием процедуры регуляризации по Миллионщикову) главных значений частот автономного уравнения n-го порядка.

Таким образом, оставался открытым вопрос об описании возможных спектров частот неавтономных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка (и, в частности, уравнений с периодическими коэффициентами), занимающих промежуточное положение между уравнениями второго и четвертого порядков. Важно было узнать, обладают ли спектры этих уравнений свойствами спектров уравнений второго порядка или больше напоминают спектры уравнений четвертого порядка.

Наконец, в докладах[11,12] были введены понятия метрически и топологически *существенных* значений показателей линейных систем. Это позволило начать изучение качественного вопроса о том, достаточно ли

---

[10]Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442.

[11]Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. **47**. №11. С. 1661–1662.

[12]Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №11. С. 1567–1568.

мощно, в смысле меры или топологии, множество решений уравнения, на котором частота принимает то или иное значение.

Цель работы

Настоящая диссертация посвящена исследованию спектров частот линейных однородных дифференциальных уравнений *третьего порядка* с целью, именно по отношении к ним, ответить на вопрос, явно поставленный в докладе[7]: каким может быть множество частот решений линейного однородного уравнения?

Методы исследования

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории возмущений и теории колебаний, а также эргодической теории в применении к иррациональной обмотке тора.

Научная новизна работы

В диссертации получены следующие новые результаты:

- доказано существование неавтономного линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит счетное множество метрически и топологически существенных значений;
- доказано существование линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектр частот которого содержит любое наперед заданное конечное число метрически и топологически существенных значений;
- доказано существование линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектр частот которого содержит континуум (целый отрезок) значений.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

1) семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ под рук. проф. И.В. Асташовой, проф. А.В. Боровских, проф. Н.Х. Розова, проф. И.Н. Сергеева (неоднократно: 2011–2013);

2) семинар "Актуальные проблемы математики и механики" механико-математического факультета МГУ под рук. проф. Д.В. Георгиевского, проф. М.В. Шамолина (2012);

3) семинар "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" кафедры высшей математики МЭСИ под рук. проф. И.В. Асташовой, проф. В.А. Никишкина, проф. А.В. Филиновского (2012).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

1) Вторая Международная конференция "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики" (г. Терскол, 2012);

2) конференция "Современные методы теории функций и смежные вопросы" (г. Воронеж, 2013);

3) Четвертая Международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования" (г. Москва, 2013).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 7 работ, в том числе 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 71 страницу. Библиография включает 76 наименований.

Краткое содержание диссертации

Введение

В кратком введении описывается история вопроса и постановка задачи. Формулируются основные результаты диссертации и указывается их место в современной теории показателей Ляпунова, теории колеблемости и теории характеристических частот дифференциальных уравнений.

Глава 1

В разделе **1.1** вводятся понятия верхних и нижних частот нулей, знаков и корней.

Рассмотрим множество линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0;\infty), \quad (1)$$

с ограниченными непрерывными коэффициентами, образующими строки

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n,$$

каждую из которых будем отождествлять с соответствующим уравнением. Обозначим описанное множество уравнений через $\mathcal{E}^n$.

Линейное пространство всех решений $y\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(a)$, а подмножество всех его ненулевых решений — через $\mathcal{S}_*(a)$, кроме того, обозначим

$$\mathcal{S}_* \equiv \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Определение I[8,10]. Для каждого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, произвольного решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ и момента $t > 0$ будем понимать под выражением $\nu(y,t)$, полагая в нем либо $\nu = \nu^0$, либо $\nu = \nu^-$, либо $\nu = \nu^+$, либо $\nu = \nu^*$ соответственно:

- либо число $\nu^0(y,t)$ *нулей* функции y на промежутке $(0;t]$;
- либо число $\nu^-(y,t)$ точек *смены знака* функции y на промежутке $(0;t]$ (мы говорим, что в точке $\tau > 0$ функция y *меняет знак*, если в достаточно малой окрестности этой точки слева от нее функция принимает значения одного знака, а справа — другого);

- либо суммарное число $\nu^+(y,t)$ *корней* функции y на промежутке $(0;t]$ с учетом их *кратности*: здесь каждый корень функции y считается столько раз, сколько в нем обнуляется подряд идущих ее производных, начиная с нулевой производной (т. е. с самой функции) и кончая производной не более чем $(n-2)$-го порядка.

Заметим, что если y — ненулевое решение линейного однородного уравнения n-го порядка, то оно ни на каком промежутке не может иметь ни бесконечно много нулей, поэтому величины $\nu(y,t)$ принимают только конечные значения.

Определение II[8,10]. *Верхней* и *нижней частотами нулей, знаков* или *корней* решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ будем называть величины

$$\hat{\nu}(y) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\nu(y,\pi t) \quad \text{и} \quad \check{\nu}(y) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\nu(y,\pi t)$$

при

$$\nu = \nu^0, \nu^-, \nu^+$$

соответственно, а в случае совпадения значения верхней частоты решения с нижней будем называть это значение *точным*.

В соответствии с определением II, каждое решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$ каждого уравнения $a \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+)$ получает в итоге по шесть разновидностей частот

$$\nu(y) = \hat{\nu}^0(y), \check{\nu}^0(y), \hat{\nu}^-(y), \check{\nu}^-(y), \hat{\nu}^+(y), \check{\nu}^+(y). \tag{2}$$

Все они неотрицательны, конечны[8] и удовлетворяют неравенствам

$$\nu^-(y) \leqslant \nu^0(y) \leqslant \nu^+(y), \quad \hat{\nu}(y) \geqslant \check{\nu}(y), \qquad y \in \mathcal{S}_*.$$

В разделе **1.2** вводятся понятия спектра частоты данного уравнения, метрической и топологической типичности значения частоты, метрической и топологической существенности значения частоты. Доказываются некоторые утверждения о возможных мощностях множеств типичных и существенных значений спектра.

С каждой из частот (2) можно связать функционал

$$\nu\colon \mathcal{S}_* \to \mathbb{R}^+ \tag{3}$$

или его сужение

$$\nu_a \colon \mathcal{S}_*(a) \to \mathbb{R}^+$$

на множество ненулевых решений какого-либо уравнения $a \in \mathcal{E}^n$.

Определение III. *Спектром* частоты ν (3) уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ назовем область значений ее сужения ν_a, т. е. множество всех частот $\nu(y)$ его различных ненулевых решений $y \in \mathcal{S}_*(a)$. Значение частоты, принадлежащее спектру уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, назовем:

а) *метрически типичным*, если оно принимается на решениях $y \in \mathcal{S}_*(a)$, множество наборов

$$\Big(y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\Big) \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

начальных значений имеет полную меру в $\mathbb{R}^n$;

б) *метрически существенным*[11], если оно принимается на решениях $y \in \mathcal{S}_*(a)$, множество наборов (4) начальных значений которых содержит множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$;

б) *топологически типичным*, если оно принимается на решениях $y \in \mathcal{S}_*(a)$, множество наборов (4) начальных значений которых служит дополнением к множеству первой категории Бэра, или содержит *всюду плотное множество типа* G_δ (т. е. представимое в виде счетного пересечения открытых и всюду плотных множеств);

б) *топологически существенным*[12], если оно принимается на решениях $y \in \mathcal{S}_*(a)$, множество наборов (4) начальных значений которых, пересеченное с некоторым открытым подмножеством $U \subset \mathbb{R}^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

В разделе **1.3** строится семейство уравнений специального вида, носящее вспомогательный характер и используемое затем в разделе 1.4. Доказываются утверждения, позволяющие упростить подсчет характеристических частот.

В разделе **1.4** происходит фактическое построение неавтономного уравнения третьего порядка со счетным существенным спектром характеристических частот.

Теорема I. *Существует уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, спектры частот нулей, знаков и корней которого содержат одно то же счетное множество* *существенных (и метрически, и топологически) значений, причем все эти значения являются точными частотами некоторых решений.*

Глава 2

В разделе **2.1** строится семейство периодических уравнений вида (1) (множество таких уравнений обозначено через $\mathcal{P}^n$), которое используется при доказательстве результатов раздела 2.2. Вводятся два типа специальных периодических разбиений числовой полупрямой: одно из них названо в работе идеальным, а другое — реальным.

В разделе **2.2** доказывается существование периодического уравнения третьего порядка, спектр характеристических частот которого содержит сколь угодно большое наперед заданное число существенных значений.

Теорема II. *Для любого числа $N \in \mathbb{N}$ существует уравнение $a \in \mathcal{P}^3$, все решения которого — периодические с общим периодом, совпадающим с периодом коэффициентов уравнения, а спектры частот нулей, знаков и корней содержат одно то же множество, состоящее из N существенных (и метрически, и топологически) значений, причем все эти значения являются точными частотами некоторых решений.*

Глава 3

В разделе **3.1** строится семейство решений периодического уравнения третьего порядка специального вида.

Для произвольных чисел $\varepsilon > 0$ и $\omega > 1$, связанных соотношением

$$\omega < \sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

рассмотрим тройку функций

$$z_1(t) = \cos t + \varepsilon, \quad z_2(t) = \cos \omega t, \quad z_3(t) = \sin \omega t, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

По этой системе функций восстановим линейное однородное уравнение третьего порядка, для которого они служат решениями. Полученное в итоге уравнение

$$\dddot{y} + \frac{(\omega^2-1)\sin t}{\varepsilon\omega^2 + \cos t(\omega^2-1)}\ddot{y} + \omega^2\dot{y} + \frac{\omega^2(\omega^2-1)\sin t}{\varepsilon\omega^2 + \cos t(\omega^2-1)}y = 0, \qquad (5)$$

является уравнением третьего порядка с непрерывными 2π-*периодическими* коэффициентами, а его общее решение задается формулой

$$y = C_1(\cos t + \varepsilon) + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Для любого значения $\varphi \in \mathbb{R}$ в этом множеств решений можно выделить однопараметрическое семейство функций вида

$$f_A(t) = (1 - A)(\cos t + \varepsilon) - A \cos(\varphi + \omega t), \quad 0 \leqslant A \leqslant 1. \tag{6}$$

В разделе **3.2** доказывается, что если ω — иррациональное число, то характеристические частоты решений (6) уравнения (5) заполняют весь отрезок $[1, \omega]$.

Теорема III. *Существует уравнение $a \in \mathcal{P}^3$, все решения которого — квазипериодические функции, а спектры частот нулей, знаков и корней содержат один и тот же отрезок значений, причем все эти значения являются точными частотами некоторых решений.*

В отличие от теорем I и II, теорему III принципиально невозможно усилить так, чтобы каждое из указанных в ней значений частот было метрически или топологически существенным.

Автор глубоко признателен научному руководителю профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах из перечня ВАК

1. Смоленцев М.В. О спектре частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2011. **47**. №11. С. 1659.

2. Смоленцев М.В. О спектрах частот периодического и непериодического линейного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 909.

3. Смоленцев М.В. Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №11. С. 1571–1572.

Статьи в других научных журналах и тезисы докладов в материалах научных конференций

4. Смоленцев М.В. О спектре частот линейного дифференциального уравнения третьего порядка / Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Второй Международной конференции молодых ученых, Терскол, 28 ноября – 1 декабря 2012 г. — Нальчик: ООО «Редакция журнала «Эльбрус», 2012. С. 208–209.

5. Смоленцев М.В. Спектры частот линейных дифференциальных уравнений третьего порядка / Современные методы теории функций и смежные вопросы. Материалы Воронежской зимней математической школы. Воронеж, 28 января – 2 февраля 2013 г. — Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013. С. 217–218.

6. Смоленцев М.В. Спектры частот периодических и непериодических линейных дифференциальных уравнений третьего порядка / Тезисы докладов 4-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Москва, 25–29 марта 2013 г. — М.: РУДН, 2013. С. 243–244.

7. Смоленцев М.В. О спектре частот периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка / Сборник трудов Международной миниконференции «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения» (16 июня 2012 г.) — М.: Изд-во МЭСИ, 2013. С. 58–74.