

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

ЗЕНКИНА Марина Васильевна

**ИНВАРИАНТЫ ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ
И УЗЛОВ В УТОЛЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре геометрии математического факультета
ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Мантуров Василий Олегович

Официальные оппоненты: Лексин Владимир Павлович
доктор физико-математических наук,
профессор (ГАОУ ВПО «Московский
государственный областной социально-
гуманитарный институт», факультет
математики, физики, химии и информатики,
кафедра математики и методики преподавания
математических дисциплин)

Ильютко Денис Петрович
кандидат физико-математических наук,
доцент (ФГБОУ ВПО «Московский
государственный университет имени
М.В.Ломоносова», механико-математический
факультет, кафедра дифференциальной
геометрии и приложений)

Ведущая организация: ФГБУН «Институт проблем передачи
информации им. А.А.Харкевича
Российской академии наук»

Защита диссертации состоится 31 мая 2013 года в 16 часов 45 мин. на
заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государ-
ственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва,
ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет,
аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ
имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан 30 апреля 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последние десятилетия важную роль в геометрии и топологии стали играть проблемы, связанные с топологией малых размерностей. При этом особое значение приобрели новые методы в теории узлов; особую актуальность приобрело обобщение теории классических узлов — теория виртуальных узлов, которой и посвящена настоящая диссертация. Виртуальный узел (зацепление) представляет собой естественное комбинаторное обобщение обычного понятия узла: вводится новый тип перекрестка и пополняется список движений Рейдемейстера. Таким образом, классические узлы являются частью виртуальных узлов, которые были изобретены Кауфманом¹. Топологическая природа виртуальных узлов заключается в следующем. Виртуальные узлы представляют собой узлы в утолщенных 2-поверхностях $M \times I$, где M — ориентированная замкнутая поверхность, I — ориентированный отрезок, с точностью до стабилизации/дестабилизации. Под *дестабилизацией* мы понимаем следующее. Пусть S — некоторая нестягиваемая окружность на замкнутой двумерной ориентированной поверхности M , для которой существует цилиндр C , лежащий в $M \times \{0, 1\}$, с краями на разных краях многообразия $M \times \{0, 1\}$, гомотопный цилиндру $S \times I$, причем цилиндр C с краями не пересекает зацепления. Тогда дестабилизация — это разрезание двумерного многообразия $M \times I$ вдоль цилиндра с заклеиванием появившихся компонент края шайбами $D^2 \times I$, см. рис. 1. Под *стабилизацией* мы понимаем операцию, обратную к дестабилизации.

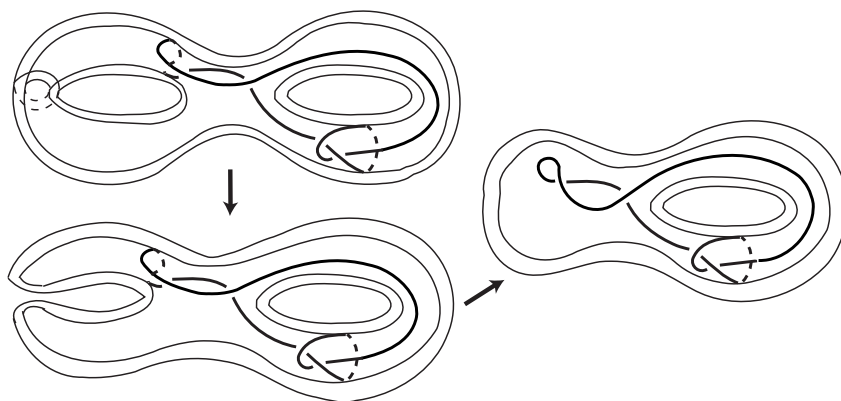


Рис. 1: Дестабилизация пары $(S_2 \times I, K)$, где S_2 — сфера с двумя ручками.

Определение 1. Представитель $(M \times I, L)$ виртуального зацепления \bar{L} , где $M \times I$ — утолщенная двумерная поверхность, а L — зацепление в $M \times I$, называется *минимальным*, если к утолщенной двумерной поверхности $M \times I$ нельзя применить дестабилизацию.

Г.Куперберг доказал следующую ключевую теорему²:

Теорема 1. *Минимальный представитель каждого виртуального зацепления \bar{L} единствен с точностью до диффеоморфизма пары $(M \times I, L \subset M \times I)$ на себя, переводящего верхнюю компоненту края $M \times \{1\}$ в себя, где M — двумерное ориентированное многообразие без края, I — ориентированный отрезок.*

В силу теоремы 1, для понимания виртуальных узлов имеет смысл рассматривать узлы в конкретных поверхностях. Актуальной задачей в теории виртуальных узлов является задача о том, является ли данный узел в утолщенной поверхности минимальным.

На теорию виртуальных узлов были обобщены многочисленные инварианты классических узлов, см., например, монографии^{3,4}, в том числе гомологии Хованова, а также

¹ Kauffman, L. H. Virtual knot theory // Eur. J. Combinatorics. —1999. — 20(7). — С. 662–690.

² Kuperberg, G. (2003). What is a virtual link? Algebr. Geom. Topol. 3, pp. 587–591.

³ Мантуров, В. О. Теория Узлов. — РХД, М.-Ижевск, 2005. — 512 с.

⁴ Мантуров, В.О. Виртуальные узлы. Современное состояние теории (под редакцией Д.П.Ильютко).

различные модификации полинома Александера⁵.

При доказательстве некоторых классических теорем используются виртуальные узлы, например, для доказательства теоремы Гусарова⁶ о существовании комбинаторных формул типа Виро-Поляка⁷ для вычисления инвариантов Васильева классических узлов. В формулах типа Виро-Поляка появляются нереализуемые гауссовы диаграммы, то есть диаграммы виртуальных узлов.

Теорией виртуальных узлов занимались такие известные ученые, как В.А.Васильев, С.В.Матвеев, В.Г.Тураев, О.Я.Виро, М.Н.Гусаров, М.Г.Хованов, С.Картер, Д.Бар-Натан, Х.Мортон и другие. Этой теории посвящено множество работ.

С другой стороны, узлы в утолщенном торе $T^2 \times I$ стали привлекать внимание специалистов как «двойко-периодические узлы» или «текстильные структуры»⁸⁹.

Одним из применений теории виртуальных узлов для задач теории классических узлов является применение инвариантов зацеплений в $T^2 \times I$ в случае классического зацепления L , состоящего из $n + 2$ компонент, две компоненты которого образуют зацепление Хопфа. В этом случае L можно считать виртуальным зацеплением из n компонент в утолщенном торе. Дополнением к зацеплению Хопфа является $T^2 \times J$, где J — ориентированный интервал. Таким образом, можно применять теорию виртуальных узлов и узлов в $T^2 \times I$ для задач теории классических зацеплений.

Фундаментальный вклад в теорию виртуальных узлов внес В.О.Мантуров, который доказал алгоритмическую распознаваемость виртуальных узлов, построил теорию гомологий Хованова для виртуальных узлов, теорию инвариантов длинных виртуальных узлов, теорию проекции виртуальных узлов на классические, а также теорию виртуальных группоидов¹⁰.

Цель и задачи диссертационного исследования. Цель работы состоит в построении инвариантов виртуальных узлов и узлов в утолщенных поверхностях с выделенной системой координат, распознающих обратимость, зеркальность, доказывающих неклассичность узлов, неэквивалентность диаграмм, которые не были распознаны существующими ранее инвариантами, и исследование свойств получающихся инвариантов.

Перечислим основные задачи исследования:

- построить инвариант зацеплений в утолщенном торе, используя картину Дена группы узла, и исследовать его свойства: обратимость, зеркальность, а также выяснить взаимосвязь значений полинома на тройках Конвея;
- построить инвариант узлов в утолщенных сферах с g ручками, используя картину Виртингера и понятие четности, введенное В.О.Мантуровым;
- построить инвариантный модуль для виртуальных узлов, используя иерархию четностей, изобретенную В.О.Мантуровым, построить упрощение модуля, из которого получается инвариантный полином.

— Москва-Ижевск: РХД, 2010. — 492 с.

⁵ Мантуров, В. О. О полиномиальных инвариантах виртуальных зацеплений // Труды ММО. — 2004. — 65 (1). — С. 175–200.

⁶ Goussarov, M., Polyak, M. and Viro, O. (2000). Finite type invariants of classical and virtual knots, Topology 39, pp. 1045–1068.

⁷ Polyak, M. and Viro, O. (1994). Gauss diagram formulae for Vassiliev invariants, Int. Math. Res. Not. 11, pp. 445–453.

⁸ Grishanov, S. A., Meshkov, V. R., Vassiliev, V. A. Recognizing Textile Structures by Finite Type Knot Invariants // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2009. — 18(2). — С. 209–235.

⁹ Morton, H. R., Grishanov, S. Doubly periodic textile patterns // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2009. — 18. — С. 1597–1622.

¹⁰ Мантуров, В.О. Виртуальные узлы. Современное состояние теории (под редакцией Д.П.Ильютко). — Москва-Ижевск: РХД, 2010. — 492 с.

Методы исследования. В диссертации применяются: методы трехмерной топологии, алгебраической топологии, комбинаторной топологии, теория четностей В.О.Мантурова и ее обобщение — иерархия четностей.

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Построен инвариантный полином z' зацеплений в утолщенном торе и исследованы свойства полученного полинома, а также рассмотрено применение инварианта z' .
2. Построен полиномиальный инвариант s для узлов в утолщенных сферах с g ручками.
3. Построен инвариантный модуль N для виртуальных узлов с использованием иерархии четностей. Построен модуль N' , который является упрощением модуля N , а также инвариантный полином n' , для которого доказана мультипликативность связанной суммы двух виртуальных диаграмм.

Теоретическое и прикладное значение. Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретический характер. Они могут найти применение в теории узлов, теории графов и маломерной топологии.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были доложены на следующих семинарах и конференциях:

- семинар «Узлы и теория представлений» (МГУ, Москва, неоднократно с 2009 по 2013) под руководством В.О.Мантурова, Д.П.Ильютко и И.М.Никонова;
- семинар «Современные геометрические методы» (МГУ, Москва, 24 марта 2010 и 6 марта 2013) под руководством А.Т.Фоменко, А.В.Болсинова, А.С.Мищенко, А.А.Ошемкова, Е.А.Кудрявцевой, И.М.Никонова;
- 4-я Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященная 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д.Кудрявцева (РУДН, Москва, 25 марта 2013).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 4 печатных работы, из них 3 статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК, 1 тезисы докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 103 страницах печатного текста, состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы. Список литературы содержит 90 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

Содержание работы

Во **введении** приводятся основные определения и формулировки базовых теорем, обосновывается актуальность тематики диссертационного исследования, представлены ее цели, задачи, результаты и краткое содержание.

Определение 2. *Диаграммой виртуального зацепления или виртуальной диаграммой* называется 4-граф на плоскости, имеющий следующую структуру: каждая вершина либо имеет структуру проход-переход, причем дуги прохода изображаются разрывной линией (классический перекресток, см. рис. 2(а)), либо является виртуальным перекрестком, как показано на рис. 2(б).

Определение 3. *Виртуальными зацеплениями* называются классы эквивалентности виртуальных диаграмм по модулю обобщенных движений Рейдемейстера: классических движений Рейдемейстера (рис. 3) и движения объезда (рис. 4).

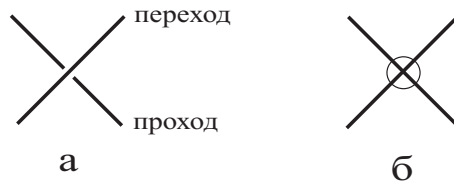


Рис. 2: Локальная структура классического и виртуального перекрестков.

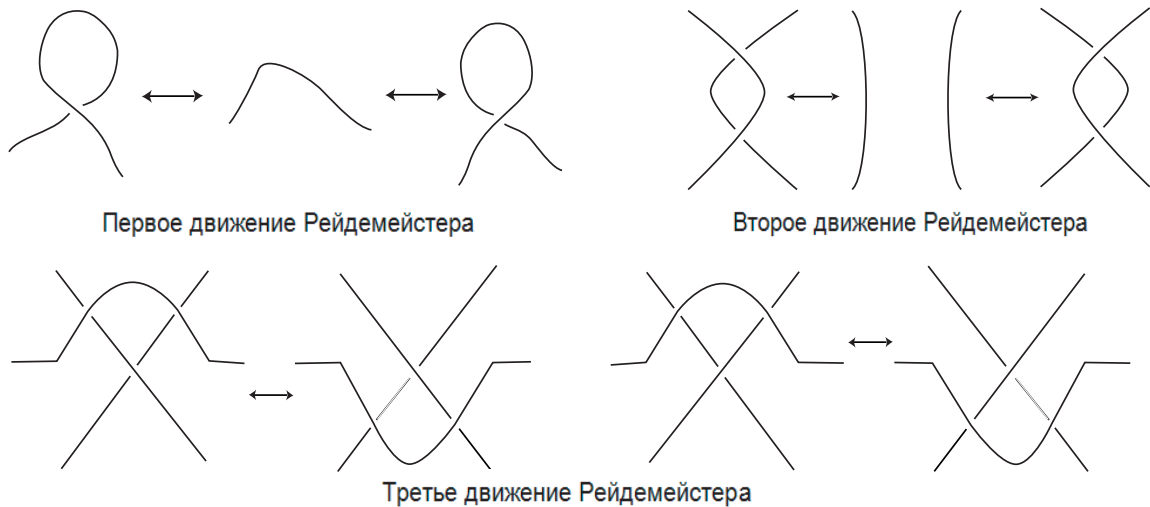


Рис. 3: Классические движения Рейдемейстера.

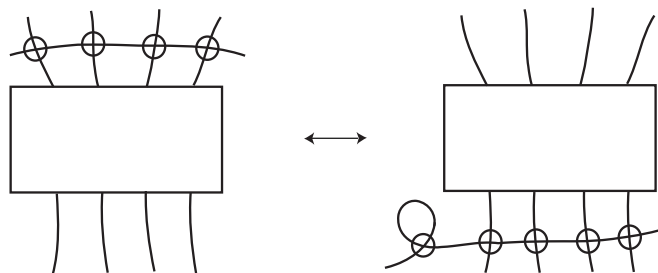


Рис. 4: Движение объезда.

Определение 4. *Диаграммой зацепления на поверхности* называется 4-граф, вложенный в S_g , каждая вершина которого снабжена структурой проход-переход, где S_g — сфера с g ручками.

Каждому зацеплению в $S_g \times I$, где I — ориентированный отрезок, можно сопоставить диаграмму на плоскости. Заметим, что при проекции узла на плоскость необходимо, чтобы сохранялась ориентация в окрестностях перекрестков. Каждой виртуальной диаграмме на плоскости можно сопоставить диаграмму на поверхности следующим образом. Сначала по виртуальной диаграмме L мы строим поверхность с краем. В каждом классическом перекрестке диаграммы зацепления мы располагаем крест (рис. 5), а в каждом виртуальном — пару непересекающихся лент (рис. 6). Соединяя эти кресты и ленты не перекрученными лентами, идущими вдоль дуг зацепления, мы получаем ориентируемое

двумерное многообразие с краем M' . Диаграмма зацепления L отображается в M' таким образом, что дуги диаграммы отображаются в средние линии лент, а классические перекрестки соответствуют перекресткам внутри крестов. Заклеивая дисками граничные компоненты многообразия M' , мы получаем ориентируемое многообразие $M = M(L)$ без края с набором кривых, погруженных в него. Две диаграммы зацеплений в ориентируемом многообразии M без края являются эквивалентными тогда и только тогда, когда одна из них получается из другой движениями Рейдемейстера. Таким образом реализуется биекция между классами эквивалентности виртуальных диаграмм и классами эквивалентности диаграмм на ориентируемом многообразии $M = M(L)$ без края¹¹.

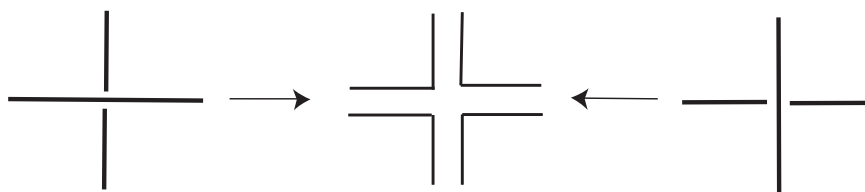


Рис. 5: Локальная структура поверхности в классическом перекрестке.

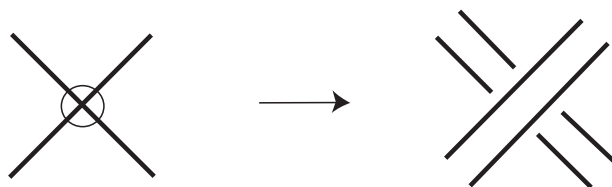


Рис. 6: Локальная структура поверхности в виртуальном перекрестке.

По диаграмме классического узла можно явно выписать копредставление группы узла, называемое *копредставлением Виртингера*, которое имеет следующий вид: дуги соответствуют образующим, а определяющие соотношения происходят из перекрестков, см. рис. 7(а). Имеется также *копредставление Дена* группы узла, которое сопоставляет областям плоскости проекции образующие, а перекресткам — соотношения, см. рис. 7(б). Эти два копредставления фундаментальной группы приводят к двум определениям полинома Александра.

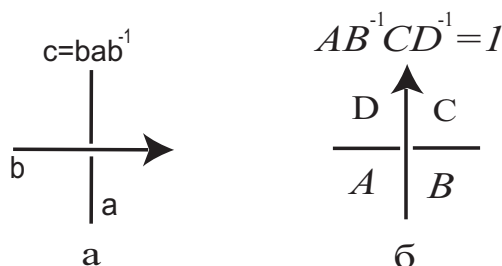


Рис. 7: Соотношения в перекрестке.

В диссертации при построении инвариантов виртуальных узлов и узлов в утолщенных поверхностях мы используем как подход Дена, так и подход Виртингера, то есть в перекрестке имеем соотношение, а образующими являются области (подход Дена) или

¹¹ Мантуров, В.О. Виртуальные узлы. Современное состояние теории (под редакцией Д.П.Ильютко). – Москва-Ижевск: РХД, 2010. – 492 с.

дуги диаграммы (подход Виртингера). Мы строим инвариантные полиномы для узлов и зацеплений в утолщенных поверхностях, а также инвариантные модули для виртуальных узлов. Инвариантные модули, приводимые в диссертации, строятся с использованием методов, обобщающих стандартные методы построения модуля Александера с привлечением новых идей, связанных с топологией виртуальных узлов и четностью¹².

Пусть имеется некоторая теория узлов. Оказывается, что если есть некоторый естественный способ поставить в соответствие каждому перекрестку 0 (*четный* перекресток) или 1 (*нечетный* перекресток), то это позволяет строить тонкие инварианты рассматриваемого класса узлов, которые чувствуют такие эффекты, как обратимость, зеркальность, неклассичность узлов, а также строить функториальные отображения в заданном классе узлов. Четностью занимались: Л.Х.Кауфман, И.М.Никонов, Д.П.Ильютко, Д.М.Афанасьев, С.Яблан, В.В.Чернов, М.Крисман и др. С помощью четности были усилены различные инварианты. Мы усовершенствуем этот метод, используя *иерархию четностей*. В теории виртуальных узлов существует множество четностей. В диссертации мы будем использовать *гауссову четность*.

Пусть инвариант виртуальных узлов и узлов в утолщенных поверхностях получается с помощью некоторых соотношений в перекрестках. Тогда его можно усилить, используя четность. Четным и нечетным перекресткам мы ставим в соответствие различные соотношения, что и позволит нам строить более сильные инварианты виртуальных узлов и узлов в утолщенных поверхностях.

Определение 5. *Хордовой диаграммой* называется 3-граф, состоящий из выбранного неориентированного гамильтонового цикла (окружности) и неориентированных ребер (хорд), соединяющих точки на окружности.

Определение 6. Хорда a хордовой диаграммы называется *зацепленной* с некоторой хордой b , если концы хорды b лежат в разных компонентах $S^1 \setminus a$, где S^1 — окружность хордовой диаграммы. Любая хорда не зацеплена сама с собой.

Пусть K — диаграмма ориентированного виртуального узла. Диаграмму K можно представить как гладкое погружение $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ окружности в плоскость, которое является взаимно однозначным отображением на образ везде, за исключением прообразов классических перекрестков; в каждом из перекрестков окрестность одного прообраза отображается на пару противоположных дуг, а окрестность другого — на другую пару противоположных дуг. Заметим, что каждой диаграмме виртуального узла или диаграмме узла на поверхности можно поставить в соответствие хордовую диаграмму с помощью h .

Определение 7. Пусть K — диаграмма ориентированного виртуального узла или диаграмма узла на поверхности, на которой выбрана произвольная точка, не совпадающая с вершиной диаграммы. *Хордовой диаграммой* $C(K)$, соответствующей диаграмме K , называется хордовая диаграмма, состоящая из ориентированной окружности, на которой прообразы прохода и перехода для каждого перекрестка при отображении h соединены хордой.

Определение 8. Перекресток диаграммы виртуального узла или узла в утолщенной поверхности называется *четным* (*нечетным*), если в хордовой диаграмме узла с хордой, соответствующей этому перекрестку, зацеплено четное (нечетное) число хорд.

В **первой** главе строится модификация полинома Александера для зацеплений в утолщенном торе с выделенными параллелью и меридианом.

Замечание 1. *Если рассмотреть диаграмму зацепления в абстрактном торе, то будет иметь место замена базиса в гомологиях $H_1(T^2, \mathbb{Z})$, при этом показатели степеней переменных, соответствующих образующим базиса, изменятся соответствующим образом.*

¹² Мантуров, В. О. Четность в теории узлов // Матем. сб. — 2010. — 201, № 5. — С. 65–110.

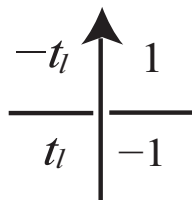


Рис. 8: Правило построения локальных меток.

В п. 1.1. построен полиномиальный инвариант z' зацеплений с использованием картины Дена. Мы рассматриваем ориентированные зацепления L произвольного числа компонент в ориентированном утолщенном торе $T^2 \times I$, где I — ориентированный отрезок. Каждое такое зацепление естественным образом задается своей проекцией на тор T^2 , которая в общем положении представляет собой четырехвалентный граф, вложенный в тор, каждая вершина которого снабжена структурой проход-переход, при этом два графа являются эквивалентными тогда и только тогда, когда один из них получается из другого стандартными движениями Рейдемейстера.

Определение 9. Диаграмма зацепления на T^2 называется *правильной*, если соответствующий граф разбивает тор на двумерные клетки.

Без ограничения общности будем считать, что области пересекают параллель и меридиан трансверсально по конечному числу отрезков. Таким образом, эти отрезки разделяют области на подобласти. Построим разметку подобластей. Каждой подобласти мы сопоставим пару целых чисел следующим образом.

В каждой области выберем произвольным образом одну подобласть и сопоставим ей пару $(0, 0)$. После этого действуем по следующему правилу. Если подобласти одной области граничат по меридиану, то они будут иметь одинаковый второй индекс, а первый индекс будет отличаться на единицу. При этом этот индекс будет больше у той подобласти, которая расположена справа. Аналогично, если две подобласти граничат по параллели, то второй индекс будет больше у той подобласти, которая расположена выше.

Занумеруем компоненты диаграммы L зацепления и построим матрицу $M'(L)$ размера $n \times n$, где n — количество перекрестков. Каждому перекрестку мы сопоставим строку матрицы, а каждой области — столбец. Элемент M'_{ij} выражает инцидентность i -го перекрестка и j -й области.

Если область инцидентна перекрестку с одной стороны, то правило построения инцидентности следующее. Пусть i -му перекрестку инцидентна подобласть j -й области, имеющая метки (a, b) . Тогда элемент M'_{ij} будет равен моному $x^a y^b$, умноженному на один из мономов $1, t_l, -1, -t_l$, где l — номер компоненты, которая образует переход в данном перекрестке. В i -м перекрестке выберем дугу d , образующую переход и ориентированную вверх. Сопоставим подобластям *локальные метки* по следующему правилу. Области, находящейся справа сверху от дуги d , образующей переход, мы сопоставим локальную метку $+1$, после чего трем остальным подобластям мы сопоставим локальные метки $-1, t_l, -t_l$ в порядке по часовой стрелке. Отметим, что при задании локальных меток мы не учитываем ориентацию дуги, образующей в i -ом перекрестке проход, см. рис. 8.

Предположим, что одна подобласть j -й области инцидентна i -му перекрестку, тогда элемент M'_{ij} равен моному $x^a y^b$, умноженному на локальную метку, где (a, b) — метка подобласти; если таких подобластей несколько, то соответствующий элемент матрицы равен сумме таких мономов по всем инцидентным подобластям. Если подобласть j -й области не инцидентна i -му перекрестку, тогда элемент M'_{ij} равен 0.

Рассмотрим кольцо $P' = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_m, x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, где m — число компонент зацепления. Мы строим матрицу инцидентности M' , зависящую от диаграммы L . Положим $z'(L) =$

$\det(M'(L))$, где $z'(L) \in P'$. Центральным результатом п. 1.1. является следующая

Теорема 5. *Если две диаграммы L и L' зацеплений из m упорядоченных компонент на T^2 с выделенной системой координат эквивалентны, то*

$$z'(L) = \pm t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot t_m^{\alpha_m} x^\beta y^\gamma \cdot z'(L')$$

для некоторых целых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta, \gamma$.

В п. 1.2 рассмотрены свойства полинома z' и примеры, показывающие, что z' различает обратимые зацепления, зеркальные зацепления.

В п. 1.3 построено упрощение z полинома z' в случае зацеплений из m упорядоченных компонент, а также приведен пример зацеплений на торе, демонстрирующий, что полином z' является более сильным по сравнению с z , так как неэквивалентность рассматриваемых зацеплений на торе не доказывается с помощью полинома z , но доказывается с использованием инварианта z' .

Мы рассматриваем ориентированные зацепления из m компонент в утолщенном торе $T^2 \times I$. Построим упрощение полинома z' следующим образом.

Рассмотрим кольца $P' = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_m, x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ и $P = \mathbb{Z}[t, x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Существует гомоморфизм колец P' и P , при котором все t_i переходят в t . Таким образом, получаем полином z из более сложного полинома z' приравниванием всех t_i к t . Полученный инвариант z представляет собой полином Лорана от трех переменных t, x, y .

Теорема 7. *Если две диаграммы L и L' зацеплений из m упорядоченных компонент на T^2 с выделенной системой координат эквивалентны, то $z(K) = \pm t^\alpha x^\beta y^\gamma \cdot z(K')$ для некоторых целых чисел α, β, γ .*

В п. 1.4 доказано следующее утверждение:

Теорема 8. *Полином z удовлетворяет соотношению типа Конвея:*

$$t^{-\frac{1}{2}} z(L^+) - t^{-\frac{1}{2}} z(L^-) = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right) z(L^0)$$

с точностью до умножения каждого из слагаемых в левой части на один из мономов вида $\pm t^k$, где k -целое число.

Во **второй главе** построена модификация полинома Александра для узлов в утолщенных сферах с g ручками S_g с выделенной системой координат. Этот инвариант является полиномом Лорана, зависящим от $2g + 3$ переменных. При построении инварианта мы используем картину Виртингера и понятие четности перекрестков, введенное В.О.Мантуровым¹³.

В п. 2.1 построен полином s для ориентированных узлов в утолщенных сферах с g ручками.

Представим поверхность S_g в виде склейки $4g$ -угольника L_g . Далее мы будем изображать диаграмму узла на L_g . Пусть дана диаграмма K ориентированного узла на S_g с n перекрестками, $V(K)$ — множество перекрестков диаграммы K в S_g . Поставим в соответствие каждому перекрестку, принадлежащему $V(K)$, либо 0 и назовем его *четным*, либо 1, и в этом случае говорим, что перекресток *нечетный*.

В четных перекрестках мы будем ставить локальные метки на дугах так, как показано на рис. 9(а), а в нечетных перекрестках так, как показано на рис. 9(б).

Занумеруем перекрестки полученной диаграммы числами от 1 до n произвольным образом, где n — количество перекрестков. Количество дуг в этом случае равно n . Занумеруем дуги диаграммы теми же числами, что и перекрестки, таким образом, чтобы дуга с номером k выходила из перекрестка с номером k . Обозначим стороны $4g$ -угольника L_g , учитывая склейку, через a_1, a_2, \dots, a_{2g} .

¹³ Мантуров, В. О. Четность в теории узлов // Матем. сб. — 2010. — 201, № 5. — С. 65–110.



Рис. 9: Построение локальных меток в четных и нечетных перекрестках.

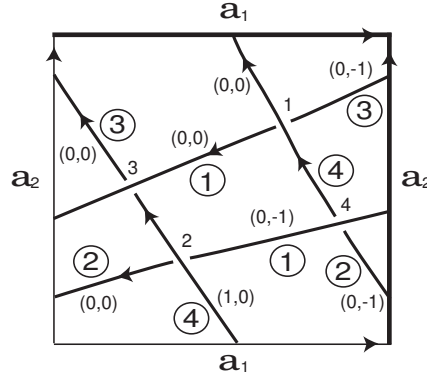


Рис. 10: Разметка дуг на примере T^2 .

В $4g$ -угольнике L_g из каждой пары склеиваемых сторон выберем одну сторону. Выбранные стороны на чертеже выделяем жирными линиями (рис. 10). Стороны многоугольника разделяют дуги диаграммы на поддуги. Построим разметку поддуг следующим образом. Каждой поддуге, выходящей из k -го перекрестка, ставим в соответствие метку $(0, 0, \dots, 0)$ длины $2g$. Если дуга делится на поддуги меридианом a_m , где $m = 1, 2, \dots, 2g$, то при переходе через фиксированную сторону a_m число под номером m , стоящее в метке, увеличивается на 1, то есть метка меняется на $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, если дуга переходит через меридиан, который не зафиксировали, то m -ое число в метке уменьшается на 1 (рис. 10).

Рассмотрим фактор-кольцо

$$G = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q, p^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_{2g}^{\pm 1}] / (q(p-t) = 0, q^2 = (1-t)(1-p)).$$

Построим квадратную матрицу размера $n \times n$ следующим образом. В матрице $M(K)$ каждой дуге диаграммы K соответствует столбец, а каждому перекрестку — строка. Если ни одна поддуга j -ой дуги не инцидентна перекрестку i (не проходит через него, не начинается и не заканчивается в нем), поставим на пересечении i -ой строки и j -го столбца ноль. В случае, если лишь одна поддуга j -ой дуги инцидентна i -ому перекрестку, элемент M_{ij} будет равен моному $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_{2g}^{\alpha_{2g}}$, умноженному на локальную метку, то есть на один из мономов $-1, 1-t, t$ в четном перекрестке и $-1, p, q$ в нечетном, где $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g})$ — метка, соответствующая поддуге в данном перекрестке. Если таких поддуг несколько, то соответствующий элемент матрицы равен сумме таких мономов по всем инцидентным поддугам.

Положим $s(K) = \det(M(K))$, где $s(K) \in G$, g — количество ручек.

Замечание 2. Полином s можно было построить, используя язык гомологий, причем если рассмотреть диаграмму узла в абстрактной сфере с g ручками, то будет иметь место замена базиса в гомологиях $H_1(S_g, \mathbb{Z})$, при этом показатели степеней переменных, соответствующих образующим базиса, изменятся соответствующим образом.

Центральным результатом п. 2.1 является следующая

Теорема 9. Если две диаграммы K и K' узлов в $S_g \times I$ эквивалентны, то $s(K) = \pm t^\alpha p^\beta q^\gamma \cdot s(K')$ для некоторых целых чисел α, β, γ .

В п. 2.2 доказана неэквивалентность узлов в кольце, см. рис. 11. Вопрос об эквивалентности данных узлов ранее ставился в работе¹⁴ и не был решен авторами статьи. С помощью полинома s доказана неклассичность узла, рассмотренного Л.Х.Кауфманом¹⁵. Неклассичность этого примера была параллельно и независимо доказана Л.Х.Кауфманом и С.Ябланом с использованием проекции В.О.Мантурова¹⁶.

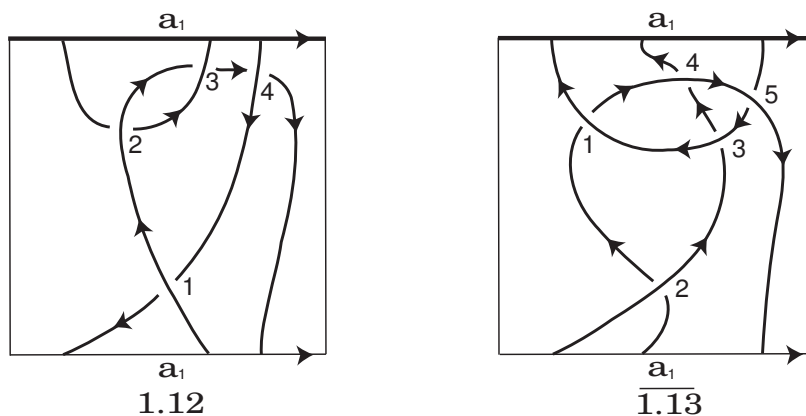


Рис. 11: Диаграммы узлов 1.12 и $\overline{1.13}$.

В **третьей главе** мы построим инвариантный модуль $N(K)$, который является модификацией модуля Александера. При построении используем иерархию четностей, предложенную В.О.Мантуровым¹⁷. Мы разделим множество перекрестков диаграммы на три типа: на нечетные перекрестки (тип 0) и два типа четных перекрестков (типы 1 и 2).

Построим отображение f , которое диаграмме K виртуального узла сопоставляет диаграмму, получающуюся следующим образом. Каждый четный перекресток диаграммы K остается классическим перекрестком, а всякий нечетный удаляется, т.е. на диаграмме мы на его месте ставим виртуальный перекресток (рис. 12).

В п. 3.1 построен инвариантный модуль для виртуальных узлов. Гауссова четность устанавливает различия между четными и нечетными перекрестками, которые имеют разную природу (нечетность является комбинаторным аналогом гомологической нетривиальности). Оказывается, имеется естественный путь для дальнейшего различия между перекрестками. Пусть K — диаграмма виртуального узла, а $f(K)$ — образ диаграммы K при отображении f . Тогда все перекрестки образа $f(K)$ соответствуют четным перекресткам диаграммы K . Эти перекрестки, рассматриваемые как перекрестки диаграммы $f(K)$, могут быть либо четными, либо нечетными. Мы говорим, что перекресток диаграммы K имеет тип 0, если он нечетный, в противном случае мы говорим, что перекресток имеет тип 1, если соответствующий перекресток диаграммы $f(K)$ нечетный, и если соответствующий перекресток диаграммы $f(K)$ четный, то мы говорим, что перекресток имеет тип 2. В каждом перекрестке мы зададим различные соотношения¹⁸.

¹⁴ Grishanov, S. A., Meshkov, V. R., Vassiliev, V. A. Recognizing Textile Structures by Finite Type Knot Invariants // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2009. — 18(2). — С. 209–235.

¹⁵ Kauffman, L. H. An Affine Index Polynomial Invariant of Virtual Knots. Algebraic Topology (math.AT); Geometric Topology (math.GT), arXiv:1211.1601.

¹⁶ Manturov, V. O. (2012). Parity and Projection from Virtual Knots to Classical Knots, Geometric Topology. — arXiv:1011.4640 [math.GT] — (to appear in JKTR).

¹⁷ Ильютко, Д.П., Мантуров, В.О., Никонов, И.М. Четность в теории узлов и граф-зацепления, Топология, СМФН, 41, РУДН, М., 2011, 3–163.

¹⁸ Manturov, V.O. Flat Hierarchy // Fundamenta Mathematicae, vol. 188 (2005), 147–154.

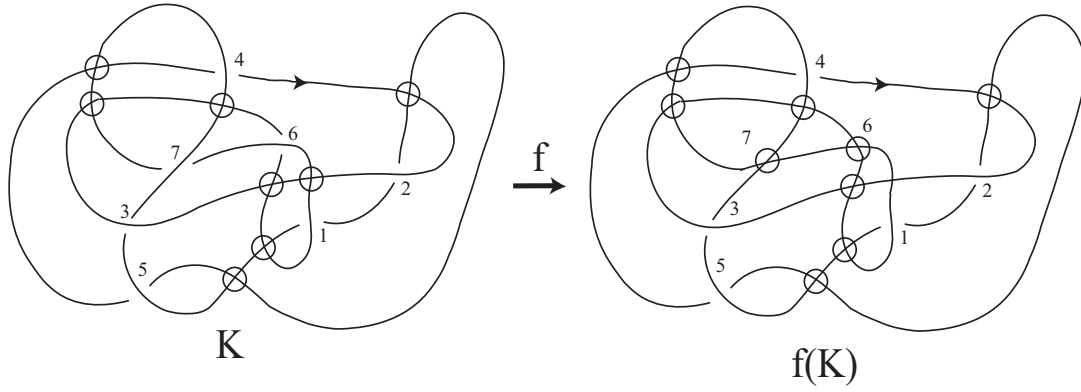


Рис. 12: Отображение f .

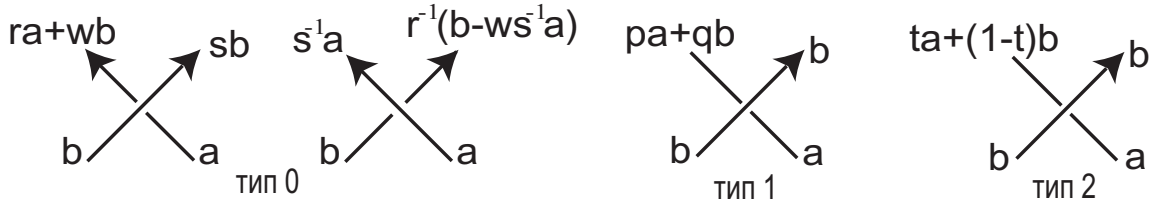


Рис. 13: Перекрестки типов 0, 1 и 2.

Рассмотрим фактор-кольцо

$$R = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q, p^{\pm 1}, s^{\pm 1}, r^{\pm 1}, w] / (q(p-t) = 0, q^2 = (1-t)(1-p), \\ w(1-s) = 0, w(t-r) = 0, w^2 = (1-t)(1-rs), w(ps+q-1) = 0, \\ w(r+q-1) = 0, w(p-r) = 0, w^2 = q(1-rs)).$$

Определение 10. *Короткой дугой* назовем ветвь диаграммы узла, которая идет от прохода в классическом перекрестке любого типа или перехода в классическом перекрестке типа 0 до следующего прохода или перехода перекрестка типа 0.

Пусть K — виртуальный узел. Построим модуль $N(K)$ над R . Образующими являются короткие дуги диаграммы узла. В каждом перекрестке мы используем соотношения, показанные на рис. 13, в соответствии с типом перекрестка. Заметим, что только для перекрестков типа 0 мы обращаем внимание на ориентацию дуги, образующей проход. Таким образом, мы имеем два различных правила для положительного и отрицательного перекрестков. Для перекрестков типов 1 и 2 мы используем только одно соотношение так же, как в определении локальных меток для полинома s .

Теорема 10. *Модуль $N(K)$ является инвариантом виртуальных узлов.*

В п. 3.2 построено упрощение $N'(K)$ модуля $N(K)$ и получен инвариантный полином n' для виртуальных узлов. Рассмотрим модуль $N'(K) = N(K)/(r = s^{-1}, w = 0)$ над фактор-кольцом

$$R' = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q, p^{\pm 1}, s^{\pm 1}] / (q(p-t) = 0, q^2 = (1-t)(1-p)).$$

Так как модуль N' получается из модуля N посредством гомоморфизма, то имеет место следующая

Теорема 11. *Модуль $N'(K)$ является инвариантом виртуальных узлов.*

Пусть K — диаграмма виртуального узла с n классическими перекрестками. Мы построим $n \times n$ -матрицу $N''(K)$ следующим образом. Каждой короткой дуге мы сопоставляем столбец, а строку ставим в соответствие каждому перекрестку. Если ни одна из дуг

j -ой короткой дуги не инцидентна i -ому перекрестку, то элемент N''_{ij} равен 0. В случае, когда только одна короткая дуга j -ой дуги инцидентна i -ому перекрестку, то элемент N''_{ij} будет равен одному из мономов $-1, 1 - t, t$ в перекрестках типа 2 и одному из мономов $-1, p, q$ в перекрестках типа 1. Если несколько коротких дуг инцидентны перекрестку, то соответствующий элемент матрицы равен сумме таких мономов по всем инцидентным коротким дугам. Получим матрицу $N''(K)$, зависящую от диаграммы K . Пусть $n'(K) = \det(N''(K))$, где $n'(K) \in R'$.

Теорема 12. *Если две диаграммы K и K' виртуальных узлов эквивалентны, то $n'(K) = \pm t^\alpha p^\beta q^\gamma \cdot n'(K')$ для некоторых целых чисел α, β, γ .*

Теорема 13. *Пусть даны две ориентированные виртуальные диаграммы K_1 и K_2 и их связная сумма $K_1 \# K_2$. Тогда*

$$n'(K_1 \# K_2) = n'(K_1) \cdot n'(K_2)$$

с точностью до умножения на моном $\pm t^\alpha p^\beta q^\gamma$, где α, β, γ — некоторые целые числа.

В п. 3.1 также рассмотрен пример виртуальных диаграмм, демонстрирующий, что полином n' различает обратимые узлы.

Благодарности.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Василию Олеговичу Мантурову за постановку задачи и ценные советы.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК

1. *Зенкина, М. В.* Инвариант зацеплений в утолщенном торе // Матем. заметки. — 2011. — Том 90, №2. — С. 242–253.
2. *Зенкина, М. В., Мантуров В. О.* Инвариант зацеплений в утолщенном торе // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2009. — Том 372. — С. 5–18.
3. *Zenkina, M. V.* The parity hierarchy and new invariants of knots in thickened surfaces // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2013. — Vol. 22, №4. — pp. 1340001-1–1340001-23.

Публикации в других изданиях

4. *Зенкина, М. В.* Иерархия четностей и новые инварианты узлов в утолщенных поверхностях // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тезисы докладов Четвертой Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д.Кудрявцева. — М.: РУДН, 2013. — С. 343.