МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 519.21

Алиев Амир Фикрет оглы

Задача о разладке для самовозбуждающихся процессов

01.01.05 – Теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: *академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор Ширяев Альберт Николаевич*

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук, профессор Мазалов Владимир Викторович, директор ИПМИ КарНЦ РАН*

кандидат физико-математических наук, доцент Бурнаев Евгений Владимирович, зав. сектором №5 ИППИ РАН

Ведущая организация: *Центральный экономико-математический институт РАН*

Защита состоится 21 июня 2013 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 20 мая 2013 г.

Учёный секретарь диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук, профессор *В.Н. Сорокин*

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Задача о разладке может быть кратко описана как *оценивание ненаблюдаемого момента изменения характеристик наблюдаемого процесса*. Большой интерес к задачам о разладке вызван в первую очередь важностью разработки эффективных методов её обнаружения в ряде практических задач. Исторически, первым таким приложением ещё в начале XX века был контроль качества на производстве, скажем, задача об обнаружении момента изменения характеристик выпускаемого товара вследствие внезапной поломки. В течение прошлого столетия список приложений значительно расширился: следует отметить задачи скорейшего обнаружения вспышек эпидемий [1,2] и «атак» в компьютерных сетях [3,4], выявления изменения климатических условий [5,6] и характера сейсмической активности [7], распознавание однородных блоков наблюдений в записи ЭКГ [8,9] и молекуле ДНК [10], опознавание возникно-

[1] D. Bock, C. Sonesson (2003). A review and discussion of prospective statistical surveillance in public health. *J. Royal Stat. Soc.: Series A* **166:1** 5-–21.

[2] M. Hohle, M. Paul, L. Held (2007) Statistical approaches to the surveillance of infectious diseases for veterinary public health. *Univ. of Munich: Dept. of Stat., Technical Report* **14**.

[3] H. Kim, B. L. Rozovskii, A. G. Tartakovsky (2004). A nonparametric multichart CUSUM test for rapid detection of DOS attacks in computer networks. *IJCIS* **2:3** 149–158.

[4] A. G. Tartakovsky, B. L. Rozovksii, R. B. Blazek, H. Kim (2005). Detection of intrusions in information systems by sequential change-point methods. *Stat. Meth.* **3** 252–293.

[5] S. R. Rodionov, J. E. Overland (2005). Application of a sequential regime shift detection method to the Bering Sea ecosystem. *ICES J. Marine Science.* **62** 328–332.

[6] S. R. Rodionov (2004). A sequential algorithm for testing climate regime shifts. *Geophys. Res. Lett.* **31:9**.

[7] I. V. Nikiforov, I. N. Tikhonov (1986). Application of change detection theory to seismic signal processing. *Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems*, Ed. by M. Basseville, A. Benveniste. Berlin Heidelberg: Springer. 355–373.

[8] J. S. Barlow, O. D. Creutzfeldt, D. Michael et al (1981). Automatic adaptive segmentation of clinical EEGs. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology* **51:5** 512–525.

[9] B. E. Brodsky, B. S. Darkhovsky (2000). *Non-parametric statistical diagnosis.* Netherlands: Kluwer.

[10] J. V. Braun, R. K. Braun, H. G. Miller (2000). Multiple changepoint fitting via quasilikelihood, with application to DNA sequence segmentation. *Biometrika* **87:2** 301–314.

вения тренда в финансовых данных [11,12] и изменения смертности при проведении операций [13]. Столь широкое распространение *практических задач* требует столь же богатого арсенала *теоретических методов* их решения.

Для выработки методов решения в каждом случае необходимо подобрать модель разладки. Среди ключевых параметров такой модели будут описание ненаблюдаемого момента разладки, целевая функция, учитывающая в той или иной форме погрешность оценивания, динамика наблюдаемого процесса и характер смены режима этого процесса. Кроме того, могут также играть роль такие второстепенные факторы, как присутствие цены за наблюдения, наличие установившегося стационарного режима перед разладкой, неоднозначность распределения наблюдаемого процесса после разладки и т.п.

В диссертации изучаются методы, относящиеся к так называемому байесовскому подходу к задачам о разладке. В моделях этого типа подразумевается, что момент разладки есть случайная величина с заранее известной функцией распределения. Такая постановка впервые встречается в статье Гиршика и Рубина [14] в контексте выявления брака на производстве. Глубокое теоретическое изучение естественных формулировок и подходов к решению такого рода задач впервые было дано Ширяевым [15]. Байесовский подход подразумевает достаточно точную спецификацию модели (и потому применим не во всех приложениях), но при этом позволяет строить *оптимальные* стратегии. Классическими здесь следует считать задачи об оптимальной стратегии обнаружения смены сноса

[11] J. Chen, A. K. Gupta (1997). Testing and locating variance changepoints with application to stock prices. *J. Am. Stat. Assoc.* **92:438** 739–747.

[12] O. Kohler, H. R. Lerche (1997). An empirical study concerning the detection of trend changes in some financial time series. *FDM Preprint* **36**

[13] S. H. Steiner, R. J. Cook, V. T. Farewell (1999). Monitoring paired binary surgical outcomes using cumulative sum charts. *Stat. Med.* **18:1** 69–86.

[14] M. A. Girshick, H. Rubin (1952). A Bayes Approach to a Quality Control Model. *Ann. Math. Statist.*. **23** 114–125.

[15] А. Н. Ширяев (1969). *Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки.* М: Наука.

винеровского процесса [16,17] и интенсивности пуассоновского процесса [18,19]. На основе байесовских моделей с разладкой можно строить и иные оптимизационные задачи [20].

Значительный прогресс теории о разладке возбудил интерес к усложнению стандартных подходов. На практике существует множество случаев, в которых момент разладки связан с наблюдаемым процессом. К примеру, в рядах финансовых данных возникновение тренда может быть обусловлено как текущей ценой, или динамикой цены актива за недавнее время, так и (наблюдаемым) новостным фоном. Наглядным примером модели с зависимостью может служить работа Локки [21], в которой разладка происходит до некоторого другого наблюдаемого момента и, следовательно, зависит от наблюдений. Эти соображения говорят о необходимости построения общих моделей, описывающих такую зависимость, и характеризации оптимальных процедур в них. Другое направление для расширения классических методов состоит в моделях с плавным изменением характеристик процесса, вместо внезапной разладки. Такие задачи стоят на стыке с теорией нелинейной фильтрации [22], и, хотя понятие момента разладки перестаёт иметь смысл, могут быть рассмотрены с точки зрения единственности момента подачи тревоги. Здесь интересны конкретные постановки, ухватывающие эти сложности (в том числе зависимость изменений характеристик процесса с наблюдениями), но в то же время позволяющие получать явные оптимальные стратегии.

---

[16] А. Н. Ширяев (1965). Некоторые точные формулы в задаче о «разладке». *ТВП* **10:2** 380–385.

[17] E. A. Feinberg, A. N. Shiryaev (2006). Quickest detection of drift change for Brownian motion in generalized Bayesian and minimax settings. *Stat. Dec.* **24** 445–470.

[18] G. Peskir, A. Shiryaev (2000). Solving the Poisson disorder problem. *Tech. Rep.* **419** Dep. of Theor. Stat. Univ. of Aarhus.

[19] Е. В. Бурнаев (2008). О задаче обнаружения разладки для пуассоновского процесса в обобщённой байесовской постановке. *ТВП* **53:3** 534–556.

[20] В. В. Мазалов, Е. Е. Ивашко (2009) Байесовская модель в задаче наилучшего выбора с «разладкой». *Вестник СПбГУ* **10:4** 142–151.

[21] A. Lokka (2007). Detection of disorder before an observable event. *Stochastics* **79** 219–231.

[22] F. Gustaffson (2000). *Adaptive filtering and change detection.* New York: Wiley.

Цель диссертационной работы состоит, таким образом, в обобщении типичных моделей на случай зависимости между моментом разладки и наблюдениями, а также разбору модели с непрерывной по времени разладкой с соответствующей зависимостью.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Построена общая байесовская модель для задачи о разладке с зависимостью от наблюдений, для неё найдены рекуррентные соотношения для достаточных статистик. Для демонстрации полученных результатов, на частных примерах задачи о разладке самовозбуждающегося процесса демонстрируется методика решения с помощью сведения задачи к задаче оптимальной остановки марковского процесса и затем, в некоторых примерах, к задаче Стефана с подвижной границей.

2. Поставлена и решена конкретная задача о непрерывной разладке с зависимостью от наблюдений. Для некоторых начальных условий получено аналитическое выражение для решения, для других изучено асимптотическое поведение и предложен алгоритм моделирования решения.

3. Доказаны утверждения для задач оптимальной остановки в многомерных пространствах, дающие новые инструменты для поиска решений этих задач через решения соответствующих задач Стефана. Эти результаты применяются для характеризации решений задач из предыдущих пунктов.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для построения широкого класса моделей разладки с зависимостью между наблюдениями и моментом разладки и поиска оптимальных методов обнаружения разладки в них. Явные формулы, полученные для задачи о непрерывной разладке, могут быть использованы в качестве первого приближения в задачах подобного типа. Доказанные результаты для многомерных задач оптимальной остановки могут быть использованы для получения новых граничных условий в широком классе задач Стефана с подвижной границей.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- Большой кафедральный семинар кафедры теории вероятностей, рук. Ширяев А.Н., МГУ им. М.В.Ломоносова, 2006, 2012 гг.

- Семинар «Стохастический анализ и теория мартингалов», рук. Ширяев А.Н., МГУ им. М.В.Ломоносова, неоднократно в 2009-2012 гг.

- Семинар «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании», рук. Аркин В.И. и Пресман Э.Л., ЦЭМИ РАН, 2012 г.

- 15ая Европейская конференция молодых учёных «15th European Young Statisticians Meeting», Castro Urdiales, Spain, 2007 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 3 печатных работах автора в рецензируемых журналах [1–3] и материалах конференции [4]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав и библиографии, включающей 96 наименований. Общий объём диссертации 78 страниц, включая 5 рисунков.

Краткое содержание диссертации

Во введении даётся обзор литературы по задачам о разладке, обосновывается актуальность диссертационной работы. Кроме того, формулируется цель и показывается научная новизна исследования, указывается практическая значимость полученных результатов, представляются выносимые на защиту научные положения. Наконец, описывается структура диссертации и взаимосвязь её глав.

В первой главе исследуется постановка задачи об однократной разладке с зависимостью от наблюдений для случая произвольных начального и конечного распределений. Сначала описывается общая задача разладки случайного процесса с зависимостью от наблюдений в дискретном времени. Изложение следует работе Ширяева [23], где такое описание даётся для момента разладки независимого от реализации процесса. Полученные результаты достаточно просты и служат отправной точкой для построения модели в непрерывном времени, являющейся основной в диссертации. В непрерывном времени случай независимого от процесса момента разладки подробно изучался в работе Кавтарадзе с соавторами [24], и изложение можно рассматривать как расширение соответствующих результатов этой работы.

Рассмотрим вероятностное пространство $\big(\Omega, (\mathcal{F}_t^X)_{t\geqslant 0}, \mathcal{F}^X, \mathsf{P}\big)$ на котором задан процесс $(X_t)_{t\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u,\ u \leqslant t)$ и меры $\mathsf{P}^\infty, \mathsf{P}^0$, абсолютно непрерывные относительно меры P (можно считать изначально, что $\mathsf{P} = \frac{\mathsf{P}^\infty + \mathsf{P}^0}{2}$). Расширим это пространство с помощью дополнительного вероятностного пространства $(\Omega', \mathcal{F}', \mathsf{P}')$ до $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geqslant 0}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathsf{P}})$ (как прямое произведение вероятностных пространств, то есть здесь $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega'$ и аналогично для сигма-алгебр и мер). В дальнейшем изложении мы будем иногда отождествлять $\mathcal{F}^X$ и $\tilde{\mathcal{F}}^X =$

[23] А. Н. Ширяев (2008). О стохастических моделях и оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения. *ТВП* **53:3** 417–436.

[24] T. Kavtaradze, N. Lazrieva, M. Mania, P. Muliere (2007). A Bayesian-martingale approach to the general disorder problem. *Stoch. Proc. Appl.* **117** 1093–1120.

$\{A \times \Omega',\ A \in \mathcal{F}^X\}$. На полученном вероятностном пространстве рассмотрим произвольный марковский момент θ. Мы будем работать в дальнейшем с регулярной версией условной функции распределения $\tilde{\mathsf{P}}\left(\theta \leqslant t \middle|\, \mathcal{F}^X\right)(\omega)$.

Утверждение 1.2.1. *Процесс*

$$G(t,\omega) = \tilde{\mathsf{P}}\left(\theta \leqslant t \middle|\, \mathcal{F}^X\right)(\omega)$$

согласован с $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\geqslant 0}$.

Связь момента θ, процесса X и случайной функции G несколько проясняет следующее несложное обобщение классического результата о компенсаторе марковского момента (см. монографию Жакода и Ширяева [25]).

Утверждение 1.2.2. *Пусть процесс* $(G(t,\omega))_{t\geqslant 0}$ *предсказуем. Тогда компенсатор субмартингала* $(\theta_t)_{t\geqslant 0}$ *равен*

$$\int\limits_0^{t\wedge\theta} \frac{G(du,\omega)}{G([u,\infty],\omega)}.$$

Наша цель - построить модель, в которой распределение процесса меняется в момент времени θ с P^∞ на P^0. Введём (стандартные) обозначения

$$L_t^i = \frac{d(\mathsf{P}^i \,|\, \mathcal{F}_t)}{d(\mathsf{P} \,|\, \mathcal{F}_t)}, \quad i = 0, \infty, \tag{1}$$

$$M_t^i = \mathcal{L}og(L^i)_t, \quad i = 0, \infty, \tag{2}$$

где вторая пара равенств задаёт локальные мартингалы M^i по мере P через стохастический логарифм. Иными словами, процессы M^i определяются как

$$M_t^i = \int\limits_0^t \frac{dL_t^i}{L_{t-}^i}.$$

Кроме того, зададим

$$M_t^x = \int\limits_0^t I\{s < x\} dM_s^\infty + \int\limits_0^t I\{s \geqslant x\} dM_s^0$$

[25] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев (1994). *Предельные теоремы для случайных процессов.* М: Физматлит

и введем меру на пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, отвечающую интересующей нас модели разладки

$$d\tilde{\mathsf{P}}^{\theta} = \mathcal{E}(M^{\theta})_{\infty} d\tilde{\mathsf{P}}.$$

Интерес представляют сужения этой меры на $\mathcal{F}_t^X$.

Теорема 1.2.1. *В этих обозначениях справедливо представление*

$$\frac{d\,\mathsf{P}_t^{\theta}}{d\,\mathsf{P}_t} = \int\limits_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G\left(\{X_s, s \leqslant t\}, du\right) + \mathcal{E}(M^{\infty})_t \left(1 - G\left(\{X_s, s \leqslant t\}, t\right)\right).$$

Для многих классических критериев риска важную роль играет статистика

$$\pi_t = \tilde{\mathsf{P}}^{\theta}\left(\theta \leqslant t |\, \mathcal{F}_t^X\right), \tag{3}$$

которая выражается через ранее введённые величины.

Теорема 1.2.2. *Для процесса апостериорной вероятности разладки справедливо представление*

$$\pi_t = \frac{\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leqslant u\}, du)}{\int_0^t \mathcal{E}(M^u)_t G(\{X_s, s \leqslant u\}, du) + \mathcal{E}(M^{\infty})_t \left(1 - G(\{X_s, s \leqslant u\}, t)\right)}.$$

Из этого представления, в свою очередь, выводится стохастическое дифференциальное уравнение на процесс $(\pi_t)_{t \geqslant 0}$.

Теорема 1.2.3. *Процесс апостериорной вероятности разладки может быть представлен через стохастическое дифференциальное уравнение*

$$d\pi_t = \pi_{t-}(1 - \pi_{t-}) \left[dM_t - \pi_{t-} d\langle M^{cm} \rangle_t - \frac{\pi_{t-}(\Delta M_t)^2}{1 + \pi_{t-}\Delta M_t} \right] + \\ (1 - \pi_{t-}) \left[\frac{G(dt, \omega)}{1 - G(t, \omega)} - \frac{(\Delta G(t, \omega))^2}{(1 - G(t-, \omega))(1 - G(t, \omega))} \right], \tag{4}$$

где M^{cm} - непрерывная мартингальная компонента M.

В случае, когда траектории G п.н. непрерывны, мы можем преобразовать уравнение (4) с помощью компенсатора процесса одного скачка $(\theta_t)_{t \geqslant 0}$, который в соответствии с Утверждением 1.2.2 представим в виде $K(t\wedge\theta)$ для некоторой монотонно неубывающей предсказуемой случайной функции K:

$$d\pi_t = \pi_{t-}(1-\pi_{t-})\left[dM_t - \pi_{t-}d\langle M^{cm}\rangle_t - \frac{\pi_{t-}(\Delta M_t)^2}{1+\pi_{t-}\Delta M_t}\right] + (1-\pi_{t-})dK_t.$$

Далее приводятся примеры, иллюстрирующие приведённый подход к задаче о разладке, и представляющие самостоятельный интерес. Эти примеры получены небольшой модификацией классических результатов о разладке винеровского и пуассоновского процессов и имеют стандартную целевую функцию

$$V = \inf_\tau(\mathsf{P}(\tau<\theta) + c\,\mathsf{E}(\tau-\theta)^+) = \inf_\tau \mathsf{E}\left((1-\pi_\tau) + c\int\limits_0^\tau \pi_s ds\right),$$

где инфимум берется по всем моментам остановки по $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geqslant 0}$.

Винеровская разладка переменной интенсивности.

Рассмотрим задачу о разладке винеровского процесса, в которой наблюдаемый процесс устроен как

$$dY_t = \mu I\{\theta\leqslant t\}dt + \sigma dW_t,$$

где W - стандартный винеровский процесс, а момент разладки θ зависит от процесса и задаётся через условную функцию распределения как

$$G(t,\omega) = \pi + (1-\pi)\left(1-\exp\left(-\int\limits_0^t \lambda(Y_s)ds\right)\right).$$

Таким образом, разладка может происходить с разной интенсивностью при разных значениях процесса. Полученные результаты позволяют свести эту задачу к задаче оптимальной остановки двумерного марковского процесса (здесь $\bar{W}_t$ - обновляющий процесс, также являющийся винеровским)

$$\begin{cases} dY_t = \mu\pi_t dt + \sigma d\bar{W}_t \\ d\pi_t = \lambda(Y_t)(1-\pi_t)dt + \frac{\mu}{\sigma}\pi_t(1-\pi_t)d\bar{W}_t \end{cases}$$

Ввиду сложности соответствующей задачи Стефана, в диссертации описывается методика численного моделирования решения.

Винеровская разладка на дискретном множестве.

Снова рассмотрим задачу о разладке винеровского процесса Y (см. предыдущий пример). Пусть на том же вероятностном пространстве задан (наблюдаемый) пуассоновский процесс N интенсивности λ, независимый с W. Пусть момент разладки θ имеет геометрическое (с параметром p) распределение на множестве его скачков:

$$G(t,\omega) = 1 - \mathsf{P}(\theta > t | N_s, s \leqslant t) = 1 - (1-p)^{N_t(\omega)}. \tag{5}$$

Этот пример отвечает случаю, когда разладка может происходить только в определённые наблюдаемые моменты времени и, таким образом, зависит от наблюдений. Используя общие результаты диссертации и некоторые частные для данного примера соображения, удаётся показать, что процесс апостериорной вероятности есть однородный марковский процесс с инфинитезимальным оператором

$$(\mathsf{L}\, f)(\pi) = \frac{\mu^2}{\sigma^2}\pi^2(1-\pi)^2 f''(\pi) + \lambda\left(f(\pi + p(1-\pi)) - f(\pi)\right).$$

Также удаётся дать форму оптимального множества (с помощью результатов третьей главы диссертации) и свести в итоге задачу о разладке к задаче Стефана с подвижной границей.

Теорема 1.4.2. *Оптимальная стратегия в этой задаче о разладке представляется в виде* $\tau^* = \inf\{t : \pi_t \geqslant A\}$, *где оптимальный уровень* A *определяется из решения задачи Стефана на* A *и неизвестную функцию* V

$$V(\pi) = 1-\pi,\ \pi \geqslant A, \tag{6}$$

$$\mathsf{L}\, V + c\pi = 0,\ \pi < A, \tag{7}$$

$$V'(A) = -1 \text{ (гладкое склеивание)}, \tag{8}$$

$$V(0) = V(p). \tag{9}$$

Пуассоновская разладка на дискретном множестве.

Рассмотрим задачу о разладке пуассоновского процесса, в которой наблюдаемый процесс устроен как

$$dY_t = I\{\theta > t\}dN_t^{\lambda_0} + I\{\theta \leqslant t\}dN_t^{\lambda_1},$$

где $N^{\lambda_0}, N^{\lambda_1}$ - независимые пуассоновские процессы интенсивности λ_0 и λ_1 соответственно, а момент разладки θ задаётся через ещё один независимый пуассоновский процесс N аналогично предыдущему примеру, т.е. как (5). Опять же с помощью общих результатов диссертации доказывается, что $(\pi_t)_{t\geqslant 0}$ есть однородный марковский процесс с инфинитезимальным оператором

$$(\mathsf{L}\, f)(\pi) = -(\lambda_1 - \lambda_0)\pi(1-\pi)f'(\pi) + \lambda\left(f(\pi + p(1-\pi)) - f(\pi)\right) + \\ (\lambda_1\pi_s + \lambda_0(1-\pi_s))\left(f\left(\frac{\lambda_1\pi}{\lambda_1\pi + \lambda_0(1-\pi)}\right) - f(\pi)\right). \quad (10)$$

Для $\lambda_1 > \lambda_0$ также даётся характеризация решения с помощью результатов третьей главы диссертации и доказывается

Теорема 1.5.2. *При $\lambda_1 > \lambda_0$ оптимальная стратегия в описанной задаче о разладке представляется в виде $\tau^* = \inf\{t : \pi_t \geqslant A\}$, где оптимальный уровень A определяется из решения задачи Стефана на A и неизвестную функцию V*

$$V(\pi) = 1 - \pi,\ \pi \geqslant A, \quad (11)$$

$$\mathsf{L}\, V + c\pi = 0,\ \pi < A, \quad (12)$$

$$V(0) = V(p). \quad (13)$$

Результаты первой главы опубликованы в работе [2].

Во второй главе изучается задача о разладке винеровского процесса, в которой происходит непрерывное изменение сноса процесса, а именно, случай винеровской пары процессов разладки и наблюдений. Рассматривается процесс

$$Y_t = \int_0^t \theta_s ds + \sigma_2 W_t,\ t \geqslant 0.$$

По аналогии с задачами об однократной разладке, функция штрафа берется в виде

$$V = \inf_{\tau} \left(\mathsf{P}(\theta_\tau < \mu) + c\,\mathsf{E} \int\limits_0^\tau I\{\theta_s \geqslant \mu\} ds \right). \tag{14}$$

В такой постановке $(\theta_t)_{t \geqslant 0}$ может быть произвольным марковским процессом. Разбирается, однако, частный случай, при котором $\theta_t = \theta_0 + \sigma_1 B_t$, где начальное значение – нормальная случайная величина $\theta_0 \sim \mathcal{N}(m, p)$, а пара (W_t, B_t) образует двумерный винеровский процесс с коэффициентом корреляции между компонентами ρ. Теория линейной фильтрации в непрерывном времени позволяет вывести отсюда динамику (марковского) процесса апостериорной вероятности $\pi_t = \mathsf{P}\left(\theta \geqslant \mu | \, \mathcal{F}_t^Y\right)$ и переформулировать с его помощью задачу (14). Решающую роль в решении соответствующей задачи оптимальной остановки играет начальное условие p: при $p = \sigma_1\sigma_2(1-\rho)$ удаётся получить явный вид функции штрафа и оптимального момента остановки. Показывается, что оптимальный штраф имеет вид $V\left(\frac{m-\mu}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2(1-\rho)}}\right)$, где функция $V(x)$ - решение задачи оптимальной остановки

$$V(x) = \inf_{\tau} \mathsf{E}_x \left[(1 - \Phi(Z_t)) + c \int\limits_0^\tau \Phi(Z_s) ds \right] \tag{15}$$

для процесса $Z_t = \gamma I_t$, где Φ - функция стандартного нормального распределения, $\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_1}{(1-\rho)\sigma_2}}$, а I - стандартный винеровский процесс. Эта задача, в свою очередь, может быть сведена к задаче Стефана

$$\begin{cases} \frac{\gamma^2}{2} V''(x) = -c\Phi(x), \ x < A \\ V(x) = 1 - \Phi(x), \ x \geqslant A \\ V'(A) = (1 - \Phi(x))' \big|_{x=A} = -\Phi'(A) \end{cases} \tag{16}$$

и решена в явном виде.

Теорема 2.2.1. *Решением задачи оптимальной остановки* (15) *является* *функция*

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} 1-\Phi(x),\ x \geqslant A \\ 1-\Phi(A)+\frac{2c}{\gamma^2}\int_x^A\int_{-\infty}^v \Phi(u)dudv,\ x < A \end{cases},$$

где A есть решение трансцендентного уравнения $\frac{2c}{\gamma^2}\int_{-\infty}^A \Phi(u)du = \Phi'(A)$. Оптимальный момент остановки при этом может быть выражен как $\tau_A = \inf(t : Z_t \geqslant A)$.

Таким образом, получена полная характеризация оптимального момента остановки и соответствующей ему функции штрафа.

В случае $p \neq \sigma_1\sigma_2(1-\rho)$ задача становится двумерной, так как процесс $(\pi_t)_{t\geqslant 0}$ есть неоднородный марковский процесс, и, следовательно, соответствующая функция штрафа $V(t,\pi)$ зависит ещё и от времени. Представлен асимптотический результат, связывающий однородный и неоднородный случай.

Теорема 2.3.1. $V(t,\pi) \to V(\pi),\ t\to\infty$ *равномерно по всем* π *на подотрезках интервала* $(0,1)$.

Результаты второй главы опубликованы в работе [1].

В третьей главе разбираются некоторые общие теоремы для задач оптимальной остановки в многомерных пространствах, применяющиеся в первых двух главах.

Первым разбирается принцип гладкого склеивания, позволяющий требовать выполнение дополнительных граничных условий в задаче Стефана. В многомерных пространствах при определённых требованиях гладкости границы соответствующие результаты были получены Григелионисом и Ширяевым [26]. Следует также отметить работу Аркина и Сластникова [27], где из вариационных соображений доказан принцип гладкого склеивания в многомерном пространстве для определённого класса моментов остановки.

[26] Б. И. Григелионис, А. Н. Ширяев (1966). О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов. *ТВП* **11:4** 612–631.

[27] В. И. Аркин, А. Д. Сластников (2008). Вариационный подход к задачам оптимальной остановки диффузионных процессов. *ТВП* **53:3** 516–533.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан диффузионный процесс $(X_t)_{t\geqslant 0}$ с вектором сноса $a(x)$ и диффузионной матрицей $B(x)$. По заданной функции $G(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим $V(x) = \sup_\tau \mathsf{E}_x\, G(X_\tau)$. Пусть в точке b функции V и G равны (оптимальная точка). Представим две теоремы, дающие условия выполнения принципа гладкого склеивания функций V и G в точке b. Для соответствующих формулировок напомним, что функцией шкалы процесса X называется решение $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференциального уравнения

$$(a(x), s'(x)) + \frac{1}{2}\mathsf{tr} B(x)B^*(x)s''(x) = 0.$$

Такое решение не является единственным, но нам будет достаточно существования набора из n решений, удовлетворяющего условиям теоремы. Этот вектор решений мы в дальнейшем будем обозначать S.

Кроме того, введем в $\mathbb{R}^n$ топологию $\mathcal{W}$ как систему множеств W с условием: для любого $x \in W$ и последовательности контуров γ_n, стягивающихся к x, выполнено соотношение

$$\lim_{\gamma_n \to x} \frac{\mathsf{E}_x\, ||X_{\tau(\gamma_n)} - x|| I\{X_{\tau(\gamma_n)} \notin W\}}{\mathsf{E}_x\, ||X_{\tau(\gamma_n)} - x||} = 0 \tag{17}$$

(здесь и далее $||\cdot||$ обозначает стандартную норму в $\mathbb{R}^n$). Справедливость аксиом топологии легко проверяется по определению. Топология $\mathcal{W}$ содержит все множества открытые в обычной топологии пространства $\mathbb{R}^n$. При $n = 1$ и довольно слабых условиях, наложенных на процесс, эта топология совпадает с обычной топологией прямой, однако в многомерном случае она несколько богаче.

Теорема 3.1.1. *Пусть в точке b функции G и S дифференцируемы, причём якобиан функции S отличен от нуля. Тогда функция $V - G$ является в топологии $\mathcal{W}$ бесконечно малой относительно $||x - b||$ при $x \to b$.*

Иные условия для выполнения принципа гладкого склеивания даёт следующая теорема, в которой процесс $(X_t)_{t\geqslant 0}$ может уже быть произвольным марковским процессом.

Теорема 3.1.2. *Пусть распределение приращений процесса X не зависит от начальной точки и точка b регулярна для множества остановки D относительно процесса X. Пусть, кроме того, функция G дифференцируема по всем направлениям и модули её производных по всем направлениям ограничены в некоторой окрестности границы. Тогда в точке b дифференцируема по всем направлениям и функция V, причём её производные совпадают с производными по соответствующим направлениям функции G.*

Оставшаяся часть третьей главы посвящена характеризации множеств остановки и продолжения наблюдений в общей задаче оптимальной остановки вида

$$V(x) = \inf_{\tau} \mathsf{E}_x \left[G(X_\tau) + \int\limits_0^\tau F(X_u)du \right]. \tag{18}$$

Обозначим за $\tilde{C}^T$ множество продолжения наблюдений в задаче оптимальной остановки (18), где инфимум берется по моментам остановки не превышающим T. Доказывается, что при определённых ограничениях на процесс предел этого семейства при $T \downarrow 0$ есть $\tilde{C}^{0+} = \{\mathsf{L}\, G + F < 0\}$ с точностью до граничных точек, семейство $\tilde{C}^T$ непрерывно растёт и в пределе при $T \to \infty$ обращается в множество продолжения наблюдений в исходной задаче (18). Хотя соответствующие утверждения и являются вспомогательными для доказательства результатов первой и второй главы, они вынесены отдельно в общей форме, позволяющей охватить множество конкретных применений.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [3, 4].

Автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному руководителю, академику РАН, профессору Альберту Николаевичу Ширяеву за постановку задач и многолетнее внимание.

Работы автора по теме диссертации

1. Алиев А. Ф. Задача о непрерывной разладке винеровского процесса // Доклады академии наук. 2013. Т. 450:2. С. 135-139.

2. Алиев А. Ф. К задаче об обнаружении разладки самовозбуждающегося процесса // Теория вероятностей и её применения. 2012. Т. 57:3. С. 588-597.

3. Алиев А. Ф. О принципе гладкого склеивания в $\mathbb{R}^n$ // Успехи математических наук. 2007. Т. 62:4. С. 147-148.

4. Aliev A. On the principle of smooth fit in optimal stopping problems // Proceedings of the 15th European Young Statisticians Meeting (EYSM). 2007. P. 1-5.