МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

на правах рукописи

КОЗЛОВ Константин Леонидович

Исследование G-пространств и их расширений методами равномерной топологии и обратных спектров

01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Москва - 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова на кафедре общей топологии и геометрии механико-математического факультета.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Зарелуа Александр Владимирович (ФГБОУ ВПО Московский государственный технический университет „СТАНКИН“)

доктор физико-математических наук, профессор Семенов Павел Владимирович (ГБОУ ВПО Московский городской педагогический университет)

доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН Щепин Евгений Витальевич (ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, главный научный сотрудник)

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО Томский государственный университет

Защита диссертации состоится 27 сентября 2013 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские Горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 27 августа 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.84
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации проводится исследование пространств с дополнительной алгебраической структурой — их группами преобразований. Решаются следующие задачи: о свойствах пространств с действием подгрупп произведения полных по Чеху групп; об условиях алгебраической однородности G-пространств; о редукции действий; о роли структуры произведения $G \times X$ в продолжении действий; о строении полурешеток G-бикомпактификаций. Приведем кратко постановки и предистории этих задач.

В Эрлангенской программе Феликсом Клейном в основу изучения геометрии положено учение об „автоморфизмах“ — преобразованиях, сохраняющих все рассматриваемые в этой геометрии свойства фигур. В топологии роль преобразований отводится гомеоморфизмам. Если, дополнительно, группу гомеоморфизмов пространства наделить топологией, в которой ее действие становится непрерывным, то как сама топология группы преобразований, так и топология ее действия становятся мощными исследовательскими инструментами в изучении взаимных связей между свойствами пространств, их групп преобразований и их действий. Например группа гомеоморфизмов компакта допускает топологию польского пространства, согласованную со структурой группы, в которой действие непрерывно. При непрерывном транзитивном действии компактной группы фазовое пространство диадично. Теорема Е. Эффроса [1], эффективно применяемая в теоремах о неподвижных точках, в исследованиях однородности [2], демонстрирует, что условие открытости транзитивного действия польской группы на метризуемом пространстве эквивалентно тому, что последнее является польским пространством. Л. Н. Ивановский [3] и В. И. Кузьминов [4], отвечая на вопрос П. С. Александрова, установили, что пространство бикомпактной топологической группы является диадическим бикомпактом. Позже М. М. Чобан [5] доказал, что всякий G_δ-бикомпакт в произвольной топологической группе или факторпространстве почти метризуемой группы по ее замкнутой подгруппе является диадическим. Б. А. Пасынков [6] усилил результаты М. М. Чобана, установив, что бикомпакты, в рассмотренных случаях, являются бикомпактами Дугунджи.

[1] E. G. Effros, Transformation groups and C^*-algebras, Amer. J. of Mathematics 81 (2) (1965) 38–55.

[2] G. S. Ungar, On all kinds of homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 212 (1975) 393–400.

[3] Л. Н. Ивановский, Об одной гипотезе П. С. Александрова, Докл. АН СССР 123 (5) (1958) 785–786.

[4] В. И. Кузьминов, О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп, Докл. АН СССР 125 (4) (1959) 727–729.

[5] М. М. Чобан, Топологическое строение подмножеств топологических групп и их факторпространств, Мат. исследования, Топологические структуры и алгебраические системы, Штиинца, Кишинев 44 (1977) 117–163.

[6] Б. А. Пасынков, Почти метризуемые топологические группы, Докл. АН СССР 161 (2) (1965) 281–284.

Приведенные примеры такого рода связей дают основания считать, что рассмотрение пространства вместе с дополнительной алгебраической структурой, согласованной с его топологией, налагает в ряде случаев весьма сильные ограничения на свойства самого пространства, что и послужили основой для постановки А. В. Архангельским [7] следующей общей задачи. Пусть на топологическом пространстве непрерывно действует топологическая группа из некоторого класса. Как это сказывается на свойствах пространства?

Дальнейшие исследования В. В. Успенского показали, что любая топологическая группа или факторпространство $\aleph_0$-уравновешенной группы — od-пространства, т.е. обладают свойством типа Дугунджи [8]. В частности, если они бикомпактны, то являются бикомпактами Дугунджи [9], если псевдокомпактны, то их стоун-чеховские бикомпактификации — бикомпакты Дугунджи [8] [10]. Псевдокомпактное G-пространство с транзитивным действием $\aleph_0$-ограниченной группы — d-пространство, а его стоун-чеховская бикомпактификация — бикомпакт Дугунджи [8]. В частности, если оно бикомпактно, то является бикомпактом Дугунджи [9]. Бикомпактное G_δ-подмножество факторпространства группы по равномерной подгруппе — бикомпакт Дугунджи [11].

Все рассматриваемые транзитивные действия в приведенных выше результатах обладают тем свойством, что они фактически определяют топологию фазового пространства. Тем самым при рассмотрении действий групп на пространствах, которые определяют топологию последних, есть основания ожидать, что некоторые свойства групп перенесутся и на пространства.

Понятие d-открытого или слабо микро-транзитивного действия введено в работе Ф. Анцеля [12] при альтернативном доказательстве теоремы Эффроса. Отметим, что аналогичный подход к ее доказательству под названием принципа открытости отображений рассматривался Х. Торунчиком. Данное им название связано с фундаментальной теоремой функционального анализа об открытости отображения: непрерывное сюръективное линейное отображение пространств Фреше (которые полно метризуемы) открыто.

[7] А. В. Архангельский, Топологическая однородность. Топологические группы и их непрерывные образы, УМН 42 (2) (1987) 69–105.

[8] В. В. Успенский, Топологические группы и компакты Дугунджи, Матем. сб. 180 (8) (1989) 1092–1118.

[9] В. В. Успенский, Компактные факторпространства топологических групп и спектры Хейдона, Матем. заметки 42 (4) (1987) 594–602.

[10] W. Comfort, K. Ross, Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups, Pacific J. of Math. 16 (1966) 483–496.

[11] S. Hernández, M. Sanchis, Dugundji spaces in the coset space G/H, Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992), Ann. New York Acad. Sci., 728 (1994) 262–268.

[12] F. D. Ancel, An alternative proof and applications of a theorem of E. G. Effros, Michigan Math. J. 34 (1) (1987) 39–55.

Ее вариант для банаховых пространств принадлежит С. Банаху. Т. Бычковский и Р. Поль [13] доказали теорему открытости для почти открытого (т.е. d-открытого) уплотнения полного по Чеху пространства на хаусдорфово пространство. Л. Браун доказал теорему открытости для почти открытого гомоморфизма полной по Чеху топологической группы [14]. Для d-открытых действий полных по Чеху групп выполнена теорема открытости [15]. d-открытость действий оказалось достаточно продуктивным в решении вопроса алгебраической однородности однородных пространств [12,16]; успешно используется при исследовании G-бикомпактификаций [17] [18] [19]; позволяет строить информативную решетку d-открытых отображений на пространстве (свойства типа Дугунджи) [8] [19].

Другой особенностью исследований в приведенных выше результатах является использование метода обратных спектров, появившегося в результате введения П. С. Александровым понятия проекционного спектра. Его основными применениями в топологии явились как построения пространств с заданными свойствами, так и изучение сложных пространств, аппроксимируя их более простыми. Примером первого вида применения является созданный В. В. Федорчуком [20] метод развертываемых спектров и вполне замкнутых отображений. Важным примером второго вида применения является результат С. Мардешича [21] о том, что всякий бикомпакт является пределом обратного спектра из компактов, размерность которых не превосходит размерности исходного бикомпакта и его метризуемый аналог — теорема Фрейденталя [22]. Л. С. Понтрягиным [23] получено спектральное представление бикомпактных топологических групп — их разложение в ряд Ли. Его идея непрерывности трансфинитного спектра позволила Р. Хейдону [24] дать спектральную характеризацию бикомпактов Дугунджи, введенных А. Пелчинским [25]. Дальнейшее развитие метода обратных спектров

[13] T. Byczkowski, R. Pol, On the closed graph and open mapping theorems, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 24 (9) (1976) 723–726.

[14] L. G. Brown, Topologically complete groups, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (2) (1972) 593–600.

[15] К. Л. Козлов, Топология действий и однородные пространства, Матем. сб. 204 (4) (2013) 127–160.

[16] A. A. George Michael, On transitive topological group actions, Topol. Appl. 157 (13) (2010) 2048–2051.

[17] V. Chatyrko, K. Kozlov, The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions, Proceedings of the 9-th Prague Topological Symposium (Prague 2001). 2002. 15–21.

[18] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, О бикомпактных G-расширениях, Мат. заметки 78 (5) (2005) 695–709.

[19] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, Топологические группы преобразований и бикомпакты Дугунджи, Матем. сб. 201 (1) (2010) 103–128.

[20] В. В. Федорчук, Вполне замкнутые отображения и совметимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств, Матем. сб. 99 (1) (1976) 3–33.

[21] S. Mardešić, On covering dimension and inverse limits of compact spaces, Illinois Journ. of Math. 4 (1960) 278–291.

[22] H. Freudenthal, Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen, Composition Math. 4 (1937) 154–234.

[23] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

[24] R. Haydon, On a problem of Pelczyński: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE(dim 0), Studia Math. 52 (1) (1974) 23–31.

[25] A. Pelczyński, Linear extensions, linear averagings and their applications. Diss. math., 58, Warszawa:

в исследовании бикомпактов проведено Е. В. Щепиным [26] [27] [28]. Им получена спектральная теорема об изоморфности конфинальных подспектров несчетных спектров, пределы которых гомеоморфны, решается задача об адекватности классов бикомпактов классам отображений, вводится класс открытопорожденных или $\varkappa$-метризуемых бикомпактов.

Метод обратных спектров успешно применяется и в не бикомпактном случае (Е. Г. Скляренко, Б. А. Пасынков, А. В. Архангельский, А. Ч. Чигогидзе, М. Г. Ткаченко, Д. Б. Шахматов, В. Валов, В. Кульпа и др.). Анализ характеризации бикомпактов Дугунджи, предложенный Е. В. Щепиным, позволил В. В. Успенскому [8] определить $(od\text{-})d$-пространства — классы не бикомпактных пространств, соответствующих классу бикомпактов Дугунджи. Введенное понятие позволило рассматривать с единой точки зрения топологические группы, произведения пространств со счетной сетью и бикомпакты Дугунджи. Понятия $\varkappa$-метризуемости и d-пространства также позволили осмысленно распространить результаты, полученные методом обратных спектров для бикомпактов, на класс псевдокомпактных пространств.

Вложение объекта в объект с хорошими свойствами является действенным методом исследований и используется в различных областях математики. В топологии под расширением пространства X понимаются пространства, в которые X вложено всюду плотным образом. Изучение бикомпактификаций (бикомпактных расширений) пространств было начато К. Каратеодори и получило свое развитие в работах П. С. Александрова, М. Стоуна, А. Н. Тихонова, Е. Чеха и других. Наиболее популярными являются максимальная бикомпактификация Стоуна–Чеха и одноточечная Александровская бикомпактификация. Большую роль играют и некомпактные расширения. Ф. Хаусдорф перенес метод Кантора на построения пополнений метрических пространств. Е. Хьюитт показал важность „вещественной компактификации“ пространства X для изучения кольца $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций на нем. Введенное А. Вейлем понятие равномерной структуры, и появившийся общий мощный метод построения пополнений равномерных пространств, дали возможность строить расширения тихоновских пространств, которые полны по Дьедонне.

Расширения топологического пространства, на которые может быть продолжено действие $\alpha : G \times X \to X$ с сохранением непрерывности, называются G-расширениями. Рассмотрение продолжений действий с сохранением непрерывности началось с бикомпактификационной проблемы Я. де Гроота: любое ли G-пространство G-тихоновское (т.е. имеет бикомпактное

PWN, 1968.

[26] Е. В. Щепин, Топология предельных пространств несчетных обратных спекторв, УМН 31 (5) (1976) 191–226.

[27] Е. В. Щепин, О $\varkappa$-метризуемых пространствах, Изв. АН СССР. Сер. матем. 43 (2) (1979) 442–478.

[28] Е. В. Щепин, Функторы и несчетные степени компактов, УМН 36 (3) (1981) 3–62.

G-расширение)? Я. де Врис охарактеризовал G-тихоновские пространства, используя равномерные структуры и понятие ограниченного действия [29]. Я. де Врис [30] и Ю. М. Смирнов в работе [31] привели характеризацию G-тихоновских пространств через разделяющие кольца G-равномерных функций, М. Мегрелишвили получил характеризацию с использованием квазиограниченных действий [32]. Достаточное условие (квазиограниченность действия) возможности продолжения действия с сохранением непрерывности предложено М. Мегрелишвили. Квазиограниченные действия обобщают ограниченные и равномерно равностепенно непрерывные действия [33]. Кроме того, квазиограниченность действия гарантирует возможность продолжения действия пополнения группы по двусторонней равномерности. Им также построен первый пример G-пространства, не являющегося G-тихоновским [34]. А. М. Соколовской построен пример псевдокомпактного G-пространства, не являющегося G-тихоновским [35].

Вопросы о максимальных элементах в полурешетке G-бикомпактификаций G-тихоновских пространств рассматривались Р. Бруком [36], Ю. М. Смирновым в [37] [38]. Э. ван Дауэн [39] установил, что Стоун–Чеховская бикомпактификация h-однородного пространства — единственная бикомпактификация, на которую продолжаются все его гомеоморфизмы. Я. ван Милл [40] показал, что если X — однородный компакт такой, что $X \setminus \{x\}$ — CDH пространство для любой точки $x \in X$, то тогда существует польская группа G, которая на любом счетном всюду плотном подмножестве A компакта X допускает транзитивное действие, при котором X является единственной G-бикомпактификацией A.

Ю. М. Смирнов в работе [31] установил взаимно однозначное соответствие между G-бикомпактификациями (бикомпактными G-расширениями)

---

[29] J. de Vries, On the existence of G-compactifications, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (3) (1978) 275–280.

[30] J. de Vries, Equivariant embeddings of G-spaces, General topology and its relations to modern Analysis and Algebra IV. Part B. Prague (1977) 485–493.

[31] С. А. Антонян, Ю. М. Смирнов, Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований, Докл. АН СССР 257 (3) (1981) 521–525.

[32] М. Г. Мегрелишвили, Эквивариантные пополнения и бикомпактные расширения, Сообщения АН Грузинской ССР 115 (1) (1984) 21–24.

[33] И. Н. Бронштейн, Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев: Штиинца, 1975.

[34] М. Г. Мегрелишвили, Тихоновское G-пространство, не обладающее бикомпактным G-расширением и G-линеаризацией, УМН 43 (2) (1988) 145–146.

[35] A. M. Sokolovskaya, G-compactifications of pseudocompact G-spaces, Topology Appl. 155 (4) (2009) 342–346.

[36] R. B. Brook, A construction of the greatest ambit, Math. Systems Theory 4 (1970) 243–248.

[37] Ю. М. Смирнов, Могут ли простые геометрические объекты быть максимальными компактными расширениями для $\mathbb{R}^n$, УМН 49 (6) (1994) 213–214.

[38] Ю. М. Смирнов, Минимальные топологии на действующих группах, УМН 50 (6) (1995) 217–218.

[39] E. K. van Douwen, Characterizations of $\beta\mathbb{Q}$ and $\beta\mathbb{R}$, Arch. Math. (Basel), 32 (4) (1979) 391–393.

[40] J. van Mill, On the G-compactifications of the rational numbers, Monatsh Math. 157 (3) (2009) 257–266.

и инвариантными близостями, согласованными с действием. Я. де Врис [41] и Ю. М. Смирнов в работе [31] установили, что при биекции Гельфанда–Шилова G-бикомпактификациям соответствуют замкнутые кольца G-равномерных функций, содержащие постоянные функции. М. Мегрелишвили установил взаимно однозначное соответствие между G-бикомпактификациями и вполне ограниченными эквиравномерностями [32].

Вопрос о существовании наименьших и минимальных G-бикомпактификаций в полурешетке бикомпактификаций рассматривался Ю. М. Смирновым и Л. Стояновым [42]. А. М. Соколовской [43] установлено существование минимальных, но не наименьшей G-бикомпактификации.

М. М. Чобан применил редукционный подход [5] [44], заменив открытое действие полной по Чеху группы на открытое действие $\aleph_0$-ограниченной группы, что было использовано В. В. Успенским в работах [8] [9]. Для SLH пространств Я. ван Милл показал, что сеперабельное метризуемое (соответственно польское) SLH пространство является пространством левых смежных классов сепарабельной метризуемой [45] (соответственно польской [46]) группы. Класс SLH пространств введен Л. Фордом [47] и важен сам по себе, так как он содержит однородные нульмерные пространства и топологические многообразия. Любое SLH пространство является алгебраически однородным.

Цель работы.

Целью работы являются:

получение спектрального представления пространства по спектральному представлению действующей группы;

построение теории d-открытых действий;

выявление роли структуры произведения в вопросе продолжения действий;

изучение полурешеток G-бикомпактификаций.

[41] J. de Vries, Linearization, compactification and the existence of non-trivial compact extensors for topological transformation groups, Proceedings of the Conference Topology and Measure III. Part 2. Greifswald (1982) 339–346.

[42] Yu. M. Smirnov, L. N. Stoyanov, On minimal equivariant compact extensions, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences 36 (6) (1983) 733–736.

[43] А. М. Соколовская, Один метод построения полурешеток бикомпактных G-расширений, Мат. заметки 82 (6) (2007) 916–925.

[44] М. М. Чобан, Редукционные теоремы о существовании непрерывных сечений. Сечения над подмножествами факторпространств топологических групп, Мат. исследования, Топологические структуры и алгебраические системы, Штиинца, Кишинев 4 (1973) 111–156.

[45] J. van Mill, Strong local homogeneity and coset spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (8) (2005) 2243–2249.

[46] J. van Mill, Homogeneous spaces and transitive actions by Polish groups, Israel J. Math. 165 (1) (2008) 133–159.

[47] L. R. Ford, Homeomorphism groups and coset spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954) 490–497.

Методика исследования.

В диссертации используются методы равномерной топологии и обратных спектров.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них следующие:

- Получены спектральные представления пространств с d-открытым действием, порожденные спектральными представлениями действующих групп. Установлена открытопорожденность в смысле Е. В. Щепина бикомпакта, являющегося факторпространством подгруппы произведения полных по Чеху групп.

- Построение теории d-открытых действий. В частности доказан эквивариантный аналог принципа открытости отображений С. Банаха: непрерывное d-открытое действие полной по Чеху группы открыто. Дан критерий, когда d-открытость действия сохраняется при его продолжении на максимальную G-бикомпактифиацию.

- Получена теорема о редукции d-открытого действия $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве до аналогичного действия $\aleph_0$-ограниченной группы.

- Приведены достаточные условия возможности непрерывного продолжения действия на пополнения пространства X, использующие условия „прямоугольности“ произведения $G \times X$ (в смысле З. Фролика, А. Ч. Чигогидзе, Б. А. Пасынкова, Дж. Исбелла). Установлено, что любое сепарабельное метризуемое SLH пространство обладает польским SLH пополнением, которое реализуется согласовано с пополнением действующей группы.

- Описано инвариантное подмножество максимальной G-бикомпактификации пространства, содержащееся в его любой G-бикомпактификации. Доказано, что любой однородный CDH компакт является единственной G-бикомпактификацией пространства рациональных чисел с транзитивным действием польской группы.

Теоретическая и практическая значимость.

Предлагаемая работа имеет теоретический характер. Развитые в работе методы могут быть применены при изучении пространств, их групп гомеоморфизмов и их взаимных связей, в теории эквивариантных бикомпактификаций, при изучении однородных пространств.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

МГУ, механико-математический факультет: научно-исследовательский семинар им.П.С.Александрова под руководством профессора $\boxed{\text{В. В. Федорчука}}$ (с 1986 по 2012 гг.);

МГУ, механико-математический факультет: научно-исследовательский семинар „Современные геометрические методы“ под руководством академика РАН А. Т. Фоменко, профессора А. С. Мищенко, профессора А. В. Болсинова, профессора А. А. Ошемкова, доцента Е. А. Кудрявцевой, доцента И. М. Никонова, профессора Т. Ратью (2013 г.);

Томский государственный университет, механико-математический факультет: научно-исследовательский семинар под руководством профессора С. П. Гулько (2013 г.);

Университет г. Линчепинг (Linköping, Sweden): научно-исследовательский семинар факультета прикладной математики (2001, 2007, 2011 гг.).

Университет г. Патра (Patra, Greece): научно-исследовательский семинар математического факультета (соруководитель профессор С. Илиадис) (2008 г.).

Результаты диссертации докладывались также на следующих научных конференциях:

Международный симпозиум по топологии (IX Prague Topological Simposium) (Прага, 19-25 августа 2001);

Международная конференция по топологии и ее приложениям (2006 Internatioanl Conference on Topology and its Application) (Аегеон, Греция, 23-26 июня 2006) - приглашенный участник;

Научная конференция „Ломоносовские чтения“ (Москва, апрель 2007);

Международная конференция „Дифференциальные уравнения и топология“, посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 17-22 июня 2008);

Международная конференция „Современные проблемы математики, механики и их приложений“, посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва, 30 марта - 2 апреля 2009);

Международная конференция „Группы автоморфизмов и топологические структуры“ (2010 Эйлат, Израиль, 19-25 июня 2010) - приглашенный докладчик;

Международная конференция по топологии и ее приложениям (2010 Internatioanl Conference on Topology and its Application) (Нафпактос, Греция, 26-30 июня 2010) - приглашенный участник;

Научная конференция „Ломоносовские чтения“ (Москва, ноябрь 2011);

Международная топологическая конференция „Александровские чтения“ (Москва, 21-25 мая 2012);

Международная конференция, посвященная 120-летию Стефана Банаха (Львов, Украина, 17-21 сентября 2012);

Четвертая международная конференция, посвященная 90-летию чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцева (Москва, 25-29 марта 2013).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах из официального перечня ВАК. Полный список работ приводится в конце автореферата [1-31].

Структура и объём работы.

Диссертация занимает 196 страниц текста и состоит из введения, пяти глав, разбитых на двадцать два раздела с семью подразделами и списка литературы, включающим 122 наименования. Нумерация утверждений тройная — номер главы, номер раздела и собственный номер, например, лемма 3.2.1 — лемма 1 второго раздела третьей главы.

Основное содержание работы

Первая глава имеет вспомогательный характер.

В § 1.1 даны предварительные сведения о псевдоравномерных структурах. Для бесконечного кардинала $\mathfrak{m}$ обозначим через $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$ семейство метризуемых пространств веса $\leq \mathfrak{m}$, $\mathcal{M}_0$ — семейство компактов, $\mathcal{M}_\infty$ — семейство всех метризуемых пространств. Считаем равномерности на пространствах из $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = 0, \aleph_0, \ldots, \infty$, максимальными. Для пространства X пусть $\mathcal{U}_\mathfrak{m}$ — инициальная равномерность [48] на X относительно отображений $f : X \to M$, где $M \in \mathcal{M}_\mathfrak{m}$. Обозначая $\mathcal{U}_0$ через $\mathcal{U}_\beta$, $\mathcal{U}_{\aleph_0}$ через $\mathcal{U}_\nu$, и $\mathcal{U}_\infty$ через $\mathcal{U}_\mu$, имеем $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\beta} = \beta X$, $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\nu} = \nu X$ и $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\mu} = \mu X$ (пополнения по равномерностям $\mathcal{U}_\beta$, $\mathcal{U}_\nu$ и $\mathcal{U}_\mu$ есть Стоун–Чеховская бикомпактификация, пополнения по Хьюитту и Дьедонне соответственно).

Если $\mathcal{U}$ — псевдоравномерность на X, то подмножества $[x]_\mathcal{U} = \bigcap\{\mathrm{St}(x, \upsilon) : \upsilon \in \mathcal{U}\}$ образуют разбиение $E(\mathcal{U})$ пространства X. На элементах этого разбиения $X/E(\mathcal{U})$ определена *фактор равномерность* $\bar{\mathcal{U}}$ — сильнейшая из равномерностей на фактормножестве $X/E(\mathcal{U})$, в которой факторотображение множеств $p : X \to X/E(\mathcal{U})$ является равномерно непрерывным. В этом случае отображение p называется *равномерно факторным отображением. Равномерное факторпространство* $X/\mathcal{U}$ — множество $X/E(\mathcal{U})$ в топологии, индуцированной фактор равномерностью $\bar{\mathcal{U}}$. Факторпространство X по $E(\mathcal{U})$ обозначим через $X/E(\mathcal{U})$.

В § 1.2 рассматриваются пополнения ограниченных прямоугольных подмножеств произведений.

[48] J. R. Isbell, Uniform neighborhood retracts, Pacific J. of Math. 11 (2) (1961) 609–648.

В § 1.3, обобщая понятие полуравномерного произведения Дж. Исбелла [48], вводится понятие кусочно полуравномерного произведения.

Определение 1.3.1. Отображение f на произведении равномерных пространств $(A,\mathcal{U})$ и $(B,\mathcal{V})$ в равномерное пространство $(Z,\mathcal{W})$ *кусочно полуравномерно*, если для любого $w \in \mathcal{W}$ существует система равномерных покрытий $\{u \in \mathcal{U}; v(U) \in \mathcal{V}, U \in u; u(V,U) \in \mathcal{U}, V \in v(U), U \in u\}$, удовлетворяющая условию:

$$\text{для любого } U' \in U \wedge u(U,V), \text{ где } V \in v(U), U \in u,$$

$$\text{выполнено } f(U' \times V) \subset W \text{ для некоторого } W \in w.$$

Кусочно полуравномерное произведение $A *_p B$ это произведение $A \times B$ со слабой равномерностью, индуцированной всеми кусочно полуравномерными отображениями в метрические пространства и топологией, порожденной этой равномерностью.

Кусочно полуравномерное произведение $A *_p B$ гомеоморфно произведению $A \times B$ (Предложение 1.3.2).

В Предложении 1.3.3 показано, что пополнение кусочно полуравномерного произведения совпадает, как и в случае полуравномерного произведения, с произведением пополнений сомножителей.
В § 1.4 даны предварительные сведения о топологических группах и указан способ усиления топологии действующей группы, с помощью которого дается переформулировка „Критерия польскости“ Я. ван Милла [46].
Пусть $\mathcal{G}$ — семейство подгрупп топологической группы G с топологией τ, *насыщенное относительно сопряжения*, т.е.

$$g^{-1}Tg \in \mathcal{G} \text{ для любых подгруппы } T \in \mathcal{G} \text{ и элемента } g \in G.$$

Предбазу новой топологии $\tau_{\mathcal{G}}$ на G составляют множества τ и элементы gT, Tg, $T \in \mathcal{G}$, $g \in G$. Топология $\tau_{\mathcal{G}}$, которую назовем *усилением топологии τ семейством $\mathcal{G}$*, определяет топологическую группу $G_{\mathcal{G}} = (G, \tau_{\mathcal{G}})$.

В §§ 1.5, 1.6 даны предварительные сведения о топологических группах преобразований и спектральных представлениях пространств соответственно.
Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *d-открытым*, если $f(O) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(O)))$ для любого открытого множества $O \in X$.
Для пространства X система $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$, состоящая из направленного множества A, непрерывных сюръективных отображений f_α пространства X, $\alpha \in A$, и отображений $f_{\beta\alpha} : f_\beta(X) \to f_\alpha(X)$, $\alpha, \beta \in A, \alpha < \beta$, называется *согласованной системой отображений* на X, если

(1) диагональное произведение $\Delta\{f_\alpha \in L\} : X \to \Pi\{f_\alpha(X) : \alpha \in A\}$ является вложением;

(2) $f_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ f_\beta$, $\alpha, \beta \in A, \alpha < \beta$.

Согласованная система отображений L называется:

- *(d-)открытой*, если все отображения f_α, $\alpha \in A$, (d-)открыты;
- *эквивариантной*, если X — G-пространство, и все отображения f_α, $\alpha \in A$, эквивариантны;
- *мультипликативной* (*слабо мультипликативной*) , если для любого $B \subset A$ существует $\beta = \sup B$ в A такой, что диагональное произведение $\Delta\{f_{\beta\alpha} : \alpha \in B\}$ является вложением (инъективно);
- *$\mathcal{P}$-системой*, если диагональное произведение $\Delta\{f_\alpha \in L : f_\alpha(X)$ — обладает свойством $\mathcal{P}\}$ является вложением;
- *τ-полной* (*слабо τ-полной*), если для любой цепи B в A мощности $\tau \geq \aleph_0$ существует $\beta = \sup B$ в A такой, что диагональное произведение $\Delta\{f_{\beta\alpha} : \alpha \in B\}$ является вложением (инъективно);
- *(слабо) $\tau_{\mathcal{P}}$-системой*, если в (слабо) τ-полной согласованной системе отображений все образы пространства X обладают свойством $\mathcal{P}$.

Согласованные (τ-полные) системы отображений находятся в естественном соответствии с (τ-почти непрерывными) обратными спектрами [49].

Во второй главе строится теория d-открытых действий.
В § 2.1 вводятся понятия открытых, d-открытых и слабо d-открытых действий и доказываются их свойства.

Определение 2.1.1. Действие $\alpha : G \times X \to X$ назовем

открытым, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \operatorname{int}(Ox)$;

d-открытым, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ox))$;

слабо d-открытым, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ существует точка $y \in X$ такая, что $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oy))$.

Предложение 2.1.1 (о разложении G-пространства с d-открытым действием на открыто-замкнутые компоненты действия).

(a) При открытом действии фазовое пространство является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых гомеоморфно факторпространству действующей группы по некоторой замкнутой подгруппе.

[49] M. Tkačenko, Some results on inverse spectra. II, Comment. Math. Univ. Carolin., 22 (4) (1981) 819–841.

(b) Если действие слабо d-открыто или d-открыто, то фазовое пространство X является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых является замыканием орбиты некоторой точки в первом и произвольной точки во втором случае (т.е. непрерывный взаимно однозначный образ факторпространства действующей группы по некоторой замкнутой подгруппе всюду плотен в каждом из подмножеств).

Предложение 2.1.5 (критерий d-открытости действия на эквивариантном образе G-пространства с d-открытым действием). Пусть $f : X \to Y$ — эквивариантное отображение G-пространства X с (d-)открытым действием, на пространство Y с действием группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) действие на Y (d-)открыто;

(b) отображение f (d-)открыто.

Если действие на X открыто, то условия (a) и (b) в формулировке с открытостью также эквивалентны следующему условию:

(c) f — факторотображение.

Предложение 2.1.6 (достаточное условие сохранения d-открытости действия при усилении топологии d-открыто действующей группы). Пусть X — G-пространство, $\mathcal{G}$ — насыщенное относительно сопряжения семейство подгрупп группы G такие, что для любого конечного подмножества $\mathcal{G}_{Fin} \subset \mathcal{G}$ подгруппа $\bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$ *d-открыто действует в точке $x \in X$*[18]. Тогда группа $G_{\mathcal{G}}$ d-открыто действует в точке x.

В § 2.2 строятся псевдоравномерности, индуцированные d-открытыми действиями на пространствах.

Предложение 2.2.1 (о базе индуцируемой псевдоравномерности на пространстве со слабо d-открытым действием). Пусть действие на X слабо d-открыто и семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$ удовлетворяет условиям

(1) для любых $O, U \in \mathcal{O}$ существует $V \in \mathcal{O}$ такой, что $V \subset O \cap U$;

(2) для любого $O \in \mathcal{O}$ существует $U \in \mathcal{O}$ такой, что $U^2 \subset O$ и $U^{-1} \subset O$.

Тогда семейство покрытий $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) : x \in X\}$, $O \in \mathcal{O}$, является базой псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ на множестве X. При этом вес псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ не превосходит веса семейства $\mathcal{O}$, а топология $\tau_{\mathcal{O}}$, индуцируемая псевдоравномерностью $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$, слабее топологии пространства X.

Если семейство $\mathcal{O}$ дополнительно к условиям (1) и (2) удовлетворяет условию

(3) для любых $O \in \mathcal{O}$ и $g \in G$ существует $V \in \mathcal{O}$ такой, что $gVg^{-1} \subset O$,

то псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ инвариантна, и X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ — G-пространство.

Если дополнительно к условиям (1) и (2) действие удовлетворяет условию

> для любых двух различных точек x, y пространства X существует элемент $O \in \mathcal{O}$ такой, что x и y не принадлежат одному элементу покрытия γ_O,

то $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ — равномерность на X.

Для G-пространства X через $\mathcal{U}_G$ обозначается равномерность, построенная по семейству $N_G(e)$ — открытых окрестностей единицы $e \in G$, удовлетворяющему условиям (1) — (3). Псевдоравномерность $\mathcal{U}_H$ строится по семейству $N_G(H) = \{OH : O \in N_G(e)\}$, где H — равномерная подгруппа [50], удовлетворяющему условиям (1) — (2).

Теорема 2.2.1 (о факторизации действия по равномерной подгруппе). Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, H — равномерная подгруппа G. Тогда для псевдоравномерности $\mathcal{U}_H$ на X имеем:

(a) $[x]_{\mathcal{U}_H} = \mathrm{cl}(Hx)$;

(b) факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_H)$ открыто.

Если, дополнительно, $[x]_{\mathcal{U}_H}$ бикомпактно, $x \in X$, то равномерно факторное отображение X на $X/\mathcal{U}_H$ открыто и совершенно (тем самым, пространства $X/E(\mathcal{U}_H)$ и $X/\mathcal{U}_H$ естественно гомеоморфны).

В § 2.3 вводятся понятия вполне ограниченного и равномерно локально G-равномерного действий и доказываются их свойства.

Определения 2.3.1 и 2.3.2. Действие на пространстве X назовем *вполне ограниченным*, если для любого непустого открытого множества $W \subset X$ семейство $\{gW : g \in G\}$ является покрытием пространства X, из которого можно выбрать конечное подпокрытие.
d-Открытое действие назовем *равномерно локально G-равномерным*, если для любого элемента $O \in N_G(e)$ существует $U \in N_G(e)$ такое, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ покрытие $\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux принадлежит семейству $\mathcal{U}_G|_{Ux}$.

Предложение 2.3.1 (о сохранении d-открытости и вполне ограниченности действия при переходе к эквивариантному образу). Пусть X — G-пространство с вполне ограниченным d-открытым действием группы G и

[50] J. Poncet, Une class d'espace homogénes possédant une mesure invariante, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 238 (1954) 553–554.

$f : X \to Y$ — эквивариантное отображение на пространство Y с действием группы G. Тогда отображение f — d-открыто, и действие G на Y d-открыто и вполне ограничено.

Лемма 2.3.1 (о равномерной локальной G-равномерности d-открытого действия $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном пространстве). Пусть X — псевдокомпактное G-пространство с d-открытым действием $\aleph_0$-уравновешенной группы. Тогда действие равномерно локально G-равномерно.

В § 2.4 построены примеры, показывающие различие типов „d-открытости" транзитивных действий. Я. ван Миллом [46] построен пример однородного польского пространства Z, не являющегося алгебраически однородным. В Предложении 2.4.1 показано, что возможно транзитивное слабо d-открытое, но не d-открытое действие польской группы на подмножестве первой категории пространства Z.

В Теореме 2.4.1 даны достаточные условия открытости d-открытых действий. В частности, доказана теорема открытости действия, фактически показывая, что транзитивность действия полной по Чеху группы реализуется его d-открытостью. Этот результат обобщает соответствующее утверждение Ф. Анцеля [12] для польских групп.

Теорема 2.4.2 (открытости действия). Непрерывное d-открытое действие полной по Чеху группы открыто.

В третьей главе изучаются G-расширения G-пространств.
В § 3.1 дается общий критерий продолжения действий (Теорема 3.1.1).
В § 3.2 использованы условия „прямоугольности" произведения для продолжения действия на пополнения пространства. В частности, свойства прямоугольности, сильной прямоугольности и условие прямоугольности произведения, введенные Б. А. Пасынковым [51], А. Ч. Чигогидзе [52] и З. Фроликом [53] соответственно, являются достаточными для непрерывного продолжения действий на пополнения пространств по Дьедонне, по Хьюитту и на Стоун–Чеховскую бикомпактификацию соответственно (Следствие 3.2.1).

Определение 3.2.1. Открытое подмножество $U \times V$ произведения $X \times Y$ называется *функционально открытым прямоугольником*, если U и V являются функционально открытыми подмножествами X и Y соответственно. Произведение $X \times Y$ называется $\mathfrak{m}$-*прямоугольным*, если для любого покрытия $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}(X \times Y)$ (покрытия из равномерности $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$ пространства

[51] Б. А. Пасынков, О размерности прямоугольных произведений, Докл. АН СССР 221 (2) (1975) 291–294.

[52] A. Chigogidze, On some questions in dimension theory, Colloq. Math. Soc. Janos Bŏlyai 23 (1978) 273–286.

[53] Z. Frolik, The topological product of two pseudocompact spaces, Czechoslovak Math. J. 10 (85) (1960) 339–349.

$X \times Y$) существует σ-локально конечное покрытие $v \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}(\tilde{X}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}} \times \tilde{Y}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}})$ мощности $\leq \mathfrak{m}$, состоящее из функционально открытых прямоугольников такое, что $v \wedge (X \times Y) \succ u$, $\mathfrak{m} = 0, \aleph_0, \ldots, \infty$ (под мощностью ≤ 0 понимаем „конечное“ , и $\leq \infty$ означает, что ограничение на мощность отсутствует).

Теорема 3.2.1. Если произведение $G \times X$ — $\mathfrak{m}$-прямоугольно, то тогда любое непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ имеет непрерывное продолжение на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}}$.

Этот естественный подход в исследовании существования G-расширений связан с изучением равномерных структур на произведении $G \times X$, дающих возможность продолжать действие $\alpha : G \times X \to X$, используя равномерную непрерывность. В Следствии 3.2.4 продемонстировано, что результаты о непрерывном продолжении действий:

локально бикомпактных групп (М. Мегрелишвили [54]);

локально псевдокомпактных групп на b_f-пространствах (С. Антонян и М. Санчес [55]);

псевдокомпактных групп на псевдокомпактных пространствах (Н. Антонян [56] и Е. А. Резниченко [57]);

псевдокомпактных групп на метризуемых пространствах (С. Антонян [58]);

полуограниченной b_f-группы G на полуограниченном b_f-пространстве X

являются следствием той или иной прямоугольности произведения $G \times X$.

Теорема 3.2.2. Пример А. М. Соколовской [35] — пример G-пространства, не имеющего полных по Дьедонне G-расширений.

В § 3.3 даны характеризации ограниченных [29] и равномерно равностепенно непрерывных действий [33] соответственно, с использованием введенного Дж. Исбеллом понятия полуравномерного произведения пространств [48], уточняющих свойства действий в результатах из [56] [57] [58].

[54] M. Megrelishvili, Equivariant completions, Comment. Math. Univ. Carolin. 35 (3) (1994) 539–547.

[55] S. Antonyan, M. Sanchis, Extension of locally pseudocompact group actions, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 181 (3) (2002) 239–246.

[56] N. Antonyan, On the maximal G-compactification of products of two G-spaces, Int. J. Math. Math. Sci. (2006) Art ID 93218.

[57] E. Reznichenko, Extensions of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups, Topology Appl. 59 (3)(1994) 233–244.

[58] С. А. Антонян, Продолжение действий псевдокомпактных групп, Фунд. и Прикл. Мат. 7 (3) (2001) 931–934.

Теоремы 3.3.1. и 3.3.2. Непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$

> полуравномерно относительно правой равномерности $\mathcal{R}$ на G и насыщенной равномерности $\mathcal{U}$ на X в том и только том случае, если действие ограничено на X с равномерностью $\mathcal{U}$;
>
> полуравномерно на произведении $X \times G$ (где X — первый и G — второй сомножители полуравномерного произведения) относительно левой равномерности $\mathcal{L}$ на G и насыщенной равномерности $\mathcal{U}$ на X в том и только том случае, если действие равномерно равностепенно непрерывно на X с равномерностью $\mathcal{U}$.

Квазиограниченные действия характеризуются через кусочную полуравномерность произведения, что дает возможность уточнить свойство действий в [55]: непрерывное действие локально бикомпактной группы на пространстве X (соответственно локально псевдокомпактной группы на b_f-пространстве) квазиограниченно на X с максимальной равномерностью (Следствие 3.3.2).

Теорема 3.3.3. Непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$

> кусочно полуравномерно относительно двусторонней равномерности $\mathcal{R} \vee \mathcal{L}$ на G и насыщенной равномерности $\mathcal{U}$ на X в том и только том случае, если действие квазиограничено на X с равномерностью $\mathcal{U}$.

В § 3.4 при изучении семейства G-бикомпактификаций G-тихоновского пространства устанавливается, что оно является верхней полурешеткой $K_G(X)$ с естественным порядком (подрешетка полурешетки всех бикомпактификаций). Через X_G обозначается множество точек d-открытости действия группы G. Положим $\hat{X} = \hat{G}X \cup (\beta_G X)_{\hat{G}}$ [18]. Оно содержит „пополнение“ каждой орбиты $\hat{G}x$, $x \in X$ (за счет возможности пополнения действующей группы G по двусторонней равномерности) и орбиты, состоящие из точек d-открытости действия.

Теорема 3.4.1. Пусть пространство X является G-тихоновским. Тогда $K_G(X) = K_G(\hat{X})$. Более того, любое бикомпактное G-расширение X является бикомпактным G-расширением $\hat{X}$.

Пусть топологии τ, τ', $\tau \subset \tau'$ на группе G такие, что групповые операции непрерывны. Топологические группы (G, τ') и (G, τ) будем обозначать G' и G соответственно.

Теорема 3.4.2. Пусть пространство X является G-тихоновским. Тогда $K_G(X)$ является подрешеткой полурешетки $K_{G'}(X)$. Кроме того, $K_G(X) = K_{G'}(X)$ тогда и только тогда, когда $\beta_G X = \beta_{G'} X$.

Данные способы сравнения полурешеток G-бикомпактификаций дают возможность устанавливать когда полурешетка G-бикомпактификаций становится решеткой (т.е. существует наименьшая G-бикомпактификация) или имеет минимальные элементы (Следствия 3.4.2, 3.4.3 и Теорема 3.4.3) [18]. В частности.

Следствия 3.4.2, 3.5.7, 3.5.8, 3.5.5 и 3.5.6.

> Если $\hat{X}$ локально бикомпактно, то у X существует наименьшее бикомпактное G-расширение.
>
> Если $|\beta_G X \setminus \hat{X}| \leq 1$, то у X существует единственное бикомпактное G-расширение.
>
> Если (локально) вполне ограниченная группы действует левыми сдвигами на себе, то существует ее (наименьшая) единственное бикомпактное G-расширение.
>
> Если для пространства G/H левых смежных классов топологической группы G по замкнутой подгруппе H пространство $\hat{G}/\mathrm{cl}_{\hat{G}}H$ (локально) бикомпактно, то у G-пространства G/H с естественным действием группы G существует (наименьшая) единственное бикомпактное G-расширение.

В § 3.5 предъявлена максимальная эквиравномерность на G-пространстве со слабо d-открытым действием и описана его максимальная G-бикомпактификация.

Теорема 3.5.1. Пусть X — G-пространство с слабо d-открытым действием. Тогда $\mathcal{U}_G$ — максимальная эквиравномерность на X.

Следствии 3.5.1. Пусть X — G-пространство с слабо d-открытым действием. Тогда $\beta_G X$ — бикомпактификация Самюэля пространства X относительно эквиравномерности $\mathcal{U}_G$.

Показано, что d-открытое действие на G-пространстве X продолжается до слабо d-открытого действия на его пополнении по максимальной эквиравномерности. Для равномерно локально G-равномерных действий данный результат может быть усилен и позволяет дать критерий, когда d-открытость действия сохраняется при его продолжении на максимальную G-бикомпактифиацию. В этом случае G-бикомпактификация единствена (Следствие 3.4.2).

Предложении 3.5.1. Если действие на пространстве X d-открыто, то тогда оно продолжается до слабо d-открытого действия на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$, d-открытого в точках подмножества X.

Теорема 3.5.2. Действие на пространстве X равномерно локально G-равномерно в том и только том случае, если действие на его пополнении $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$ по максимальной эквиравномерности равномерно локально G-равномерно.

Следствие 3.5.2. Действие на максимальном бикомпактном G-расширении $\beta_G X$ d-открыто в том и только том случае, если

(a) действие на X равномерно локально G-равномерно;

(b) максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена.

Обобщением результата о единственности G-бикомпактификации G-пространства с d-открытым действием является следующая теорема, использующая d-открытость действия „по модулю бикомпактных подмножеств“.

Теорема 3.5.3 Пусть X – всюду плотное инвариантное подмножество бикомпакта Y с d-открытым действием группы G, и $\mathcal{G}$ — насыщенное относительно сопряжения семейство подгрупп таких, что для любого конечного подмножества $\mathcal{G}_{Fin} \subset \mathcal{G}$ подгруппа $\bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$ d-открыто действует в точках $x \in Y \setminus K(\mathcal{G}_{Fin})$, где $K(\mathcal{G}_{Fin})$ — бикомпактное подмножество X. Тогда Y — единственная $G_{\mathcal{G}}$-бикомпактификация X.

При рассмотрении d-открытых и равномерно локально G-равномерных действий подгрупп полных по Чеху групп установлена единственность существования полного по Чеху (по Дьедонне) расширения, на котором продолжение действия пополнения группы по двусторонней равномерности открыто.

Предложение 3.5.4. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием *инфраметризуемой группы* [59] (подгруппы полной по Чеху группы). Тогда существует единственное полное по Чеху G-расширение X, на котором продолжение действия $\hat{G}$ открыто, а действие G d-открыто. В частности, если G — полная по Чеху группа, то X является факторпространством группы G и полно по Чеху.

Следствие 3.5.9. Пусть X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы. Тогда существует единственное полное по Дьедонне G-расширение X, являющееся факторпространством $\hat{G}$. Если, дополнительно, максимальная эквиравномерность вполне ограничена, то единственная бикомпактификация $\beta_G X$ является факторпространством полной по Чеху группы. В частности, если X — псевдокомпактное пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы, то ее единственная бикомпактификация $\beta_G X$ является факторпространством полной по Чеху группы.

[59] W. Roelcke, S. Dierolf, Uniform structures on topological groups and their quotients, Advanced Book Programm, McGraw-Hill International Book Co., New-York, 1981.

В четвертой главе исследуются спектральные представления пространств, порожденные спектральными представлениями действующих на них групп. Данный подход дает возможность унификации исследований G-пространств с d-открытыми действиями групп, обладающих удобными спектральными представлениями. В частности, полных по Чеху групп, их произведений и подгрупп ($\aleph_0$-ограниченных [60], $\aleph_0$-уравновешенных [61]).
В § 4.1 рассматриваются действия инфраметризуемых групп.

Следствие 4.1.1, Теорема 4.1.2. G-пространство с d-открытым действием (почти) метризуемой группы [6] (почти) метризуемо [62].

В Теореме 4.1.3 дано спектральное представление G-пространств с d-открытым действием инфраметризуемых групп, из которого следует.

Следствие 4.1.3.
Псевдокомпактное G-пространство с d-открытым действием инфраметризуемой группы является $\varkappa$-метризуемым, и его Стоун–Чеховская бикомпактификация открытопорожденным бикомпактом.
G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы и вполне ограниченной максимальной эквиравномерностью является d-пространством, и его максимальная G-бикомпактификация — бикомпакт Дугунджи.

В частности, псевдокомпактное факторпространство инфраметризуемой группы является $\varkappa$-метризуемым; псевдокомпактное пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы является d-пространством и его Стоун–Чеховская бикомпактификация, совпадающая с максимальной G-бикомпактификацией, является бикомпактом Дугунджи.

В доказательстве приведенных выше утверждений использованы Теорема 2.2.1 о факторизации действия по равномерной подгруппе и Теорема 2.4.2 об открытости действия. Данные результаты обобщают абсолютный аналог теорем М. М. Чобана [5] и Б. А. Пасынкова [6] о G_δ-бикомпактах в факторпространствах почти метризуемых групп.
В § 4.2 приведена схема факторизации пространства по гомоморфизму на действующей группе.

Теорема 4.2.1. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, H — ядро сюръективного гомоморфизма $\varphi : G \to G'$. Тогда для псевдоравномерности $\mathcal{U}_{G'}$ на X, базу которой образуют покрытия $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\varphi^{-1}(O)x)) : x \in X\}$, $O \in N_{G'}(e)$, имеем:

[60] И. И. Гуран, О топологических группах, близких к группам Линделефа, Докл. АН СССР 256 (6) (1981) 1305–1307.

[61] Г. И. Кац, Изоморфное отображение топологических групп в прямые произведения групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, УМН 8 (6) (1953) 107–113.

[62] Б. А. Пасынков, О пространствах с бикомпактной группой преобразований, Докл. АН СССР 231 (1) (1976) 39–42.

I если действие на X открыто, то

(b) факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто;

(c) действие G' на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто;

(d) равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство с открытым действием.

II если действие вполне ограничено, то

(b) факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ d-открыто;

(b+) равномерно факторное отображение X на $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыто;

(c) действие G' на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ вполне ограничено и d-открыто;

(d) равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство с вполне ограниченным d-открытым действием.

III если гомоморфизм φ — d-открыт, то

(a) $[x]_{\mathcal{U}_{G'}} = \mathrm{cl}(Hx)$;

(b) факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто;

(b+) равномерно факторное отображение X на $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыто;

(c) действие G' на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ d-открыто;

(d) равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство с d-открытым действием.

Следствие 4.2.1. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G и пусть гомоморфизм $\varphi : G \to G'$ — открыт. Тогда факторпространство $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ гомеоморфны. Тем самым, равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ является G'-пространством с открытым действием и равномерное факторотображение открыто.

В § 4.3 излагается общая схема переноса согласованного семейства гоморфизмов с действующей группы на пространство, с помощью которой осуществляется перенос семейств согласованных отображений на группах, являющихся подгруппами произведений полных по Чеху групп, на G-пространства с их d-открытыми действиями.

Предложение 4.3.1 Пусть X — G-пространство со слабо d-открытым действием группы G, и на группе G существует согласованная система $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$, в которой отображения $\varphi_\alpha : G \to G_\alpha$, $\alpha \in A$, (тем самым, и $\varphi_{\beta\alpha} : G_\beta \to G_\alpha$, $\alpha, \beta \in A$) являются гомоморфизмами.

Тогда системы

$L_p = \{p_\alpha, p_{\beta\alpha}; A\}$, где $p_\alpha : X \to X/\mathcal{U}_{G_\alpha}$ — равномерно факторное отображение, $\alpha \in A$, $p_{\beta\alpha} : X/\mathcal{U}_{G_\beta} \to X/\mathcal{U}_{G_\alpha}$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$ и
$L_q = \{q_\alpha, q_{\beta\alpha}; A\}$, где $q_\alpha : X \to X/E(\mathcal{U}_{G_\alpha})$ — факторотображение, $\alpha \in A$, $q_{\beta\alpha} : X/E(\mathcal{U}_{G_\beta}) \to X/E(\mathcal{U}_{G_\alpha})$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$
являются согласованными и эквивариантными.

Если $\mathcal{P}$ — свойство топологических пространств, то будем обозначать через $cb\mathcal{P}$ свойство пространств иметь уплотнения (непрерывные взаимно однозначные отображения) на пространства со свойством $\mathcal{P}$. Если для произвольного открытого (соответственно d-открытого, слабо d-открытого) непрерывного действия на пространстве X группы G с топологическим свойством $\mathcal{P}$ пространство X обладает свойством $\mathcal{Q}$, то будем говорить, что *свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны* (соответственно *d-открыто G-связаны, слабо d-открыто G-связаны*).

Теорема 4.3.1. Пусть G — подгруппа произведения $\Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ групп G_α, $\alpha \in A$, с конечно мультипликативным (соответственно с τ-мультипликативным) и наследственным по подгруппам свойством $\mathcal{P}$. Если X — G-пространство

случай I

(A) с открытым действием и

(B) свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны, то

тогда на X существует согласованная слабо мультипликативная открытая, эквивариантная $cb\mathcal{Q}$-система (соответственно открытая, эквивариантная слабая $\tau_{cb\mathcal{Q}}$-система).

случай II

(A) с d-открытым, вполне ограниченным действием и

(B) свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ d-открыто G-связаны, то

тогда на X существует согласованная мультипликативная d-открытая, эквивариантная $\mathcal{Q}$-система (соответственно d-открытая, эквивариантная $\tau_\mathcal{Q}$-система).

Теорема 4.3.2. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, на которой существует $\tau_\mathcal{P}$-система гомоморфизмов $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}; A\}$.

Случай III

(B) Если свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ d-открыто G-связаны;

(C) система L — d-открыта, то

тогда система L_q (соответственно система L_p) отображений на X является открытой, эквивариантной слабо $\tau_{cb\mathcal{Q}}$-системой (соответственно d-открытой, эквивариантной $\tau_{\mathcal{Q}}$-системой).

Случай IV

(B) Если свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны;

(C) система L — открыта, то

тогда система $L_q = L_p$ отображений на X является открытой, эквивариантной $\tau_{\mathcal{Q}}$-системой.

Следствие 4.3.2. Пусть X — псевдокомпактное G-пространство с d-открытым, вполне ограниченным действием группы G, являющейся подгруппой произведения полных по Чеху групп. Тогда X — $\varkappa$-метризуемое пространство, βX — открытопорожденный бикомпакт. В частности, бикомпактное факторпространство подгруппы произведения полных по Чеху групп является открытопорожденным бикомпактом.
Если X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием группы G, являющейся подгруппой произведения полных по Чеху групп, и максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена, то X — $\varkappa$-метризуемо, и $\beta_G X$ — открытопорожденный бикомпакт с d-открытым действием замкнутой подгруппы произведения полных по Чеху групп. В частности, если X — псевдокомпактное G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием группы G, являющейся подгруппой произведения полных по Чеху групп, то X — $\varkappa$-метризуемо, и $\beta X = \beta_G X$ — открытопорожденный бикомпакт.

В § 4.4 показано как переходить от равномерно локально G-равномерного действия на пространстве с вполне ограниченной максимальной эквиравномерностью $\aleph_0$-уравновешенной группы к аналогичному действию $\aleph_0$-ограниченной группы.

Теорема 4.4.1. Пусть X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием $\aleph_0$-уравновешенной группы и вполне ограниченной максимальной эквиравномерностью. Тогда на группе G/H, где H — ядро действия, существует более слабая топология, в которой группа G/H — $\aleph_0$-ограничена, и естественно определенное действие G/H на X непрерывно и равномерно локально G-равномерно.

Так как d-открытое действие $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве равномерно локально G-равномерно (Лемма 2.3.1), то получаем.

Следствие 4.4.2. d-Открытое действие $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве заменяется на аналогичное действие $\aleph_0$-ограниченной группы.

В Замечании 4.3.2 показано, что при d-открытом действии $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве последнее является d-пространством, и его Стоун–Чеховская бикомпактификация, совпадающая с максимальной G-бикомпактификацией, является бикомпактом Дугунджи. Оно обобщает соответствующий результат В. В. Успенского [8] для транзитивного действия $\aleph_0$-ограниченной группы.

В пятой главе проведены исследования однородных пространств с использованием топологии действия.
В § 5.1 опереляется класс локально плотно однородных пространств (LDH пространств), содержащий сильно локально однородные (SLH) пространства и h-однородные пространства [63] [64].

Определение 5.1.1. Пространство X назовем *локально плотно однородным* (сокращенно LDH), если существует его открытая база $\mathcal{B}$ такая, что для любых элемента $B \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B$ множество $\mathrm{Hom}(X)_{X\setminus B}x$ всюду плотно в B, где $\mathrm{Hom}(X)_{X\setminus B}$ подгруппа гомеоморфизмов, ограничение каждого из которых на $X \setminus B$ является тождественным отображением.

Показано, что на любом LDH пространстве возможно d-открытое действие топологической группы, и в классе польских пространств свойства быть LDH и SLH пространством эквивалентны.

Теорема 5.1.1. Пусть X – LDH пространство, H — LDH группа [15] X, и bX — произвольная бикомпактификация X, на которую продолжаются гомеоморфизмы из H. Тогда для топологической группы H, рассматриваемой как подгруппы $\mathrm{Hom}_{co}(bX)$ (группы гомеоморфизмов bX в компактно-открытой топологии), и для любой LDH(H) базы $\mathcal{B}$ на X имеем

(T1) для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_H(e)$ существует элемент $B \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B$ и $H_{X\setminus B} \subset O$,

(T2) действие $\alpha : H \times X \to X$ непрерывно и d-открыто (действие H на bX непрерывно и d-открыто в точках X),

(T3) для любого элемента $B \in \mathcal{B}$ ограничение действия $\alpha_B : H_{X\setminus B} \times B \to B$ d-открыто,

(T4) LDH(H) компоненты X совпадают с компонентами действия α.

[63] А. В. Островский, Непрерывные образы произведения $C \times \mathbb{Q}$ канторова совершенного множества C и рациональных чисел, Изд. МГУ, Семинар по общей топологии, под. ред. П. С. Александрова, (1981) 78–85.

[64] J. van Mill, Characterization of some zero-dimensional separable metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 264 (1) (1981) 205–215.

Теорема 5.1.2. Пусть X – польское LDH пространство. Тогда

(1) на X непрерывно и открыто действует польская группа,

(2) если X однородно, то оно является пространством левых смежных классов польской группы,

(3) X — SLH пространство.

Показано, что любое сепарабельное метризуемое LDH (SLH) пространство обладает расширением, которое является польским SLH пространством. При этом пополнение реализуется согласованно с пополнением действующей группы по двусторонней равномерности. Отметим, что в [46] показано, что не всякую SLH группу X можно использовать для получения польского SLH пополнения.

Теоремы 5.1.3. Пусть X — сепарабельное метризуемое LDH пространство, T — его произвольная счетная LDH группа. Тогда существуют:

(A) польское SLH пространство Y, являющееся расширением X и соответствующее вложение $i_X : X \to Y$,

(B) польская группа G, являющаяся SLH группой Y, в которой подгруппа T всюду плотна (тем самым G – пополнение T по двусторонней равномерности) и соответствующее вложение $i_T : T \to G$

такие, что

(1) действие α группы G на Y непрерывно и открыто,

(2) действие α' топологической группы T (рассматриваемой как подгруппы G) на X непрерывно и d-открыто,

(3) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \overset{i_T \times i_X}{\hookrightarrow} & G \times Y \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} & Y \end{array}$$

коммутативна.

Теоремы 5.1.4. Пусть X — сепарабельное метризуемое SLH пространство. Тогда существуют:

(A) польское SLH пространство Y, являющееся расширением X и соответствующее вложение $i_X : X \to Y$,

(B) польская группа G, являющаяся SLH группой Y, в которой всюду плотна подгруппа H, являющаяся SLH группой X (тем самым G — пополнение H по двусторонней равномерности) и соответствующее вложение $i_H : H \to G$

такие, что

(1) действие α группы G на Y непрерывно и открыто,

(2) действие α' группы H на X непрерывно и открыто,

(3) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H \times X & \overset{i_T \times i_X}{\hookrightarrow} & G \times Y \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} & Y \end{array}$$

коммутативна,

(4) диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & G = \hat{H} \\ \downarrow q_x & & \downarrow q'_x \\ X_x = H/H_x & \hookrightarrow & Y_x = G/G_x \end{array}$$

коммутативны, где X_x, Y_x — SLH(H) и SLH(G) компоненты [15] содержащие точку x, q_x, q'_x — факторотображения, $x \in X$.

В § 5.2 получено обобщение результата Я. ван Милла [40].

Теоремы 5.2.2. Пусть X — однородный CDH компакт. Тогда существует польская группа G такая, что она она допускает транзитивное действие на счетном всюду плотном подмножестве $\mathbb{Q}$, при котором компакт X является единственной G-бикомпактификацией $\mathbb{Q}$.

Приведен пример группы G и ее действия на пространстве рациональных чисел, которое не продолжается ни на какую его бикомпактификацию (Пример 5.2.1).
В § 5.3 показано, что бикомпакт из [65], построенный с использованием резольвент В. В. Федорчука [66], является примером однородного бикомпакта, который „очень далек“ от алгебраически однородного — действие группы гомеоморфизмов в любой допустимой топологии не слабо d-открыто (Пример 5.3.1). Первый пример однородного бикомпакта, не являющегося

[65] В. А. Чатырко, Бикомпакты с несопадающими размерностями, Труды Моск. мат. об-ва 53 (1990) 192–228.

[66] S. Watson, The construction of topological spaces: planks and resolutions, Recent progress in General Topology, M. Hušek, J. van Mill, Elsevier Science Publishers, (1992) 675–757.

алгебраически однородным, построил В. В. Федорчук [67]. Используя его метод, в [68] построен пример однородного бикомпакта, для которого показано, что действие группы гомеоморфизмов в любой допустимой топологии не d-открыто.
Бикомпакт X называется *сильно однородным*, если существует отображение X^2 в $\mathrm{Hom}_{co}(X)$ $((x,y) \to h_{xy})$ такое, что $h_{xy}(x) = y$ для любых $x, y \in X$. Топологическое пространство X называется *пространством с выпрямляемой диагональю*, если существует гомеоморфизм $\varphi : X \times X \to X \times X$ такой, что $\varphi(\{x\} \times X) = \{x\} \times X$ для любых $x \in X$ и $\varphi(\Delta) = X \times \{a\}$ для некоторой точки $a \in X$, где $\Delta = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$. В. В. Успенский [8] доказал, что бикомпакты с выпрямляемой диагональю совпадают с сильно однородными бикомпактами и являются бикомпактами Дугунджи.

Предложении 5.3.2 Сильно однородный бикомпакт является факторпространством σ-бикомпактной группы.

Хочу выразить глубокую благодарность зав. кафедрой общей топологии и геометрии профессору $\boxed{\text{Федорчуку Виталию Витальевичу}}$, профессору Ставросу Илиадису и коллегам за поддержку и помощь.

Основные публикации автора по теме диссертации

(из официального Перечня ВАК)

1. К. Л. Козлов, О $\varkappa$-замкнутых образах подмножеств топологических произведений, Фунд. и Прикл. Мат. 4 (1) (1998) 127–134.

2. К. Л. Козлов, Об относительной размерности подмножеств топологических произведений, Вестник Московского университета, Сер. 1 Мат. Мех. N 1 (2002) 21–25.

3. K. Kozlov, V. Chatyrko, The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions, Proceedings of the 9-th Prague Topological Symposium (Prague 2001). 2002. 15–21.

Диссертанту принадлежат: определения (слабо) d-открытых действий; теорема о максимальной эквиравномерности на G-пространстве со слабо d-открытым действием; теорема о разложении на компоненты действия.

4. К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, О бикомпактных G-расширениях, Мат. заметки 78 (5) (2005) 695–709.

Диссертанту принадлежат: подход, связанный с рассмотрением полурешеток G-бикомпактификаций и их связи с топологией действующей

[67] В. В. Федорчук, Пример однородного бикомпакта с несопадающими размерностями, Докл. АН СССР 198 (6) (1971) 1283–1286.

[68] D. P. Bellamy, K. F. Porter, A homogeneous continuum that is non-Effros, Proc. Amer. Math.Soc. 113 (2) (1991) 593–598.

группы; определение подмножества, содержащегося во всех G-бикомпактификациях; результаты о наименьшем, минимальных и единственном элементе в (полу)решетке G-бикомпактификаций.

5. K. Kozlov, B. Pasynkov, Covering dimension of topological products, J. Math. Sci. (N.Y.), 144 (3) (2007) 4031–4110. Translated from Sovrem. Mat. Prilozh. N 34, Obshchaya Topol (2005) 3–86 (in Russian).

Диссертанту принадлежит вторая часть статьи (раздел 4), посвященная примерам пространств, размерность произведения которых больше суммы их размерностей.

6. K. Kozlov, Characterization of compact spaces with noncoinciding dimensions which are subsets of products of simple spaces, Topol. Appl. 155 (17-18) (2008) 2009–2016.

7. К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, Топологические группы преобразований и бикомпакты Дугунджи, Матем. сб. 201 (1) (2010) 103–128.

Диссертанту принадлежат: результаты о равномерных структурах на G-пространствах; результаты о действиях $\aleph_0$-уравновешенных, метризуемых и почти метризуемых групп; определения и свойства вполне ограниченных и равномерно локально вполне ограниченных действий.

8. K. Kozlov, Rectangularity of products and completions of their subsets, Topol. Appl. 157 (4) (2010) 698–707.

9. K. Kozlov, Rectangular conditions in products and equivariant completions, Topol. Appl. 159 (7) (2012) 1863–1874.

10. K. Kozlov, D. Georgiou, S. Iliadis, The covering dimension invariants, Topol. Appl. 159 (9) (2012) 2392–2403.

Диссертанту принадлежат: установление соответствия между равномерными размерностями Хараламбуса (относительными размерностями Чигогидзе) пространства и размерностями его β-подобных бикомпактификаций; теорема о совпадении минимальных значений размерности различных типов бикомпактификаций.

11. К. Л. Козлов, Топология действий и однородные пространства, Матем. сб. 204 (4) (2013) 127–160.

12. K. Kozlov, Spectral decompositions of spaces induced by spectral decompositions of acting groups, Topol. Appl. 160 (11) (2013) 1188–1205.

(**прочие**)

13. К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, Об эквивариантных расширениях G-пространств, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 2 (2003) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 60.

Совместный доклад.

14. К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, Максимальные эквивариантные бикомпактификации G-пространств как пополнения, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 2 (2003) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 62.
Совместный доклад.

15. К. Л. Козлов, О псевдокомпактности в категории G-пространств, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 2 (2003) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 62.

16. К. Л. Козлов, О максимальных эквивариантных бикомпактификациях G-пространств со специальным действием, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 4 (2004) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 68.

17. К. Л. Козлов, Двусторонность отображений и бикомпакты с несовпадающими размерностями, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 2 (2006) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 65.

18. К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, О бикомпактификациях G-пространств, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 2 (2006) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 67.
Совместный доклад.

19. К. Л. Козлов, О произведениях, для размерности которых не выполняется логарифмическое неравенство, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 2 (2006) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 68.

20. K. Kozlov, V. Chatyrko, Lattices of equivariant open mappings, d-spaces and Dugundji compacta, Abstracts 2006 International Conference on Topology and its Applications (June 23-26, 2006, Aegion, Greece), 52–54.
Совместный доклад.

21. K. Kozlov, On the equality $\dim X \times Y > \dim X + \dim Y$, Abstracts Tenth Prague Topological Symposium (Prague, August 13-19, 2006), 46-47.

22. К. Л. Козлов, n-Мощность и свойства типа нормальности и паракомпактности топологических произведений, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 1 (2008) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 65.

23. К. Л. Козлов, О размерности некоторых топологических произведений, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 1 (2008) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 66.

24. К. Л. Козлов, Пример такого нульмерного пространства X, что пространство X^m совершенно нормально не нульмерно, Вестник Московского

университета, сер. мат. мех., N 1 (2008) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 66.

25. К. Л. Козлов, Пример такого нульмерного пространства X, что пространство X^m нормально и счетно паракомпактно, но не нульмерно, Вестник Московского университета, сер. мат. мех., N 1 (2008) Научно–исследовательский семинар по общей топологии, 67.

26. K. Kozlov, Topological transformation groups and Dugundji compacta, Тезисы докладов международной конференции „Дифференциальные уравнения и топология“, посвященной 100-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина (1908-2008) (Москва, 17-22 июня, 2008 г.), 441.

27. К. Л. Козлов, Действия метризуемых и почти метризуемых групп, Материалы международной конференции „Современные проблемы математики, механики и их приложений“, посвященной 70-летию ректора МГУ В.А.Садовничего (Москва, 3 марта - 2 апреля, 2009 г.), 392–393.

28. K. Kozlov, Rectangularity of products and extensions of actions, Abstracts 2010 International Conference on Topology and its Applications (June 26-30, 2010, Nafpaktos, Greece), 143-144.

29. K. Kozlov, Strongly locally homogeneous spaces and their completions, Abstracts International topological conference „Alexandroff readings“ (Moscow, May 21-25, 2012), 40.

30. K. Kozlov, Correspondence between lattices of mappings on acting groups and phase spaces, Abstarcts of reports of International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach Lviv, Ukraine (September 17-21, 2012), 292 Appendix.

31. К. Л. Козлов, О редукции действий, Тезисы докладов Четвертой Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д.Кудрявцева (Москва, РУДН 25-29 марта 2013 г.), 348.