

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.538.5+517.54+517.57

Мазалов Максим Яковлевич

**Критерии равномерной приближаемости
в классах гармонических и
полианалитических функций**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор Парамонов Петр Владимирович

Официальные оппоненты: Буслаев Виктор Иванович,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
Математический институт имени
В.А. Стеклова РАН, ведущий научный
сотрудник отдела комплексного анализа

Колесников Сергей Викторович,
доктор физико-математических наук, доцент,
Ивановский государственный
энергетический университет,
профессор кафедры высшей математики

Широков Николай Алексеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный
университет, математико-механический факультет,
заведующий кафедрой математического анализа

Ведущая организация: Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН

Защита диссертации состоится 20 сентября 2013 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8-й этаж).

Автореферат разослан “___” _____ 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В работе изучаются равномерные приближения в классах гармонических и полианалитических функций на компактах евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Начнем с постановки основных задач. Далее L — дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^d$ с постоянными комплексными коэффициентами, символ которого — однородный эллиптический многочлен. Примеры таких операторов — Δ^n и $\bar{\partial}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$, $\bar{\partial}$ — оператор Коши-Римана на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Напомним¹, что *полианалитическими* функциями порядка n (кратко — *n -аналитическими*, при $n = 2$ — бианалитическими) называются решения уравнения $\bar{\partial}^n f = 0$ на открытых подмножествах $\mathbb{C}$.

Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^d$, X° — множество всех внутренних точек X , $C(X)$ — пространство непрерывных функций на X с равномерной нормой; $h(X, L)$ — класс функций $f \in C(X)$, таких, что $Lf = 0$ в X° ; $H(X, L)$ — замыкание в $C(X)$ множества функций F , каждая из которых удовлетворяет уравнению $LF = 0$ в (своей) окрестности X . Ясно (в силу эллиптичности оператора L), что $H(X, L) \subset h(X, L)$. Естественно возникают следующие две задачи (первая из них более общая).

Задача А1 (о приближении индивидуальных функций). Для заданных компакта X и оператора L найти все функции из $H(X, L)$.

Задача А2 (о равенстве классов функций). Для заданного оператора L найти все компакты X , такие, что $H(X, L) = h(X, L)$.

Для аналитических функций ($L = \bar{\partial}$) классические результаты о равномерных приближениях были получены М. А. Лаврентьевым, М. В. Келдышем, С. Н. Мергеляном, а полное решение задач А1 и А2 было дано в 60-е годы прошлого века А. Г. Витушкиным (см. обзор²).

Без ограничения общности можем считать, что функция $f \in h(X, \bar{\partial})$ непрерывна на всей плоскости $\mathbb{C}$ и финитна; пусть ω_f — модуль непрерывности f в $\mathbb{C}$. А. Г. Витушкиным установлен следующий критерий³.

¹Балк. М. Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники. Сер. Совр. проб. матем. Фундам. напр. М.: ВИНТИ. 1991. Т. 85, С. 187–246.

²Мельников М. С., Синянян С. О. Вопросы теории приближений функций одного комплексного переменного // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. М.: ВИНТИ. 1975. Т. 4. С. 143–250.

³Витушкин А.Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6, С. 141–199 (см. гл. 4, §2, Теорема 2).

Теорема 1В. Условие $f \in H(X, \bar{\partial})$ выполнено тогда и только тогда, когда существует постоянная $A > 0$, такая, что для любого открытого квадрата Q с границей ∂Q и длиной стороны δ выполнена оценка

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| \leq A \omega_f(\delta) \alpha(Q \setminus X), \quad (1)$$

где $\alpha(\cdot)$ — (непрерывная) аналитическая емкость.

Заметим, что вместо квадратов в теореме 1В можно, в частности, взять и открытые круги — результат П. В. Парамонова⁴.

Рассмотрим задачу А2. А. Г. Витушкиным был установлен следующий критерий⁵.

Теорема 2В. Равенство классов $h(X, \bar{\partial}) = H(X, \bar{\partial})$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого ограниченного открытого множества D выполнено равенство

$$\alpha(D \setminus X^o) = \alpha(D \setminus X). \quad (2)$$

Для решения задач А1 и А2 (в случае $L = \bar{\partial}$) А. Г. Витушкин разработал конструктивную схему приближения, состоящую в разделении особенностей и приближении функции по частям. Именно, приближаемая функция с помощью подходящего разбиения единицы представляется в виде конечной суммы *локализаций* — функций с локализованными особенностями, а затем строятся приближающие функции, уравнивающие у локализаций необходимое число коэффициентов ряда Лорана.

В дальнейшем схема А. Г. Витушкина была усовершенствована. Так, Р. Харви и Дж. Полкинг предложили⁶ удобную конструкцию разбиений единицы, А. Г. О'Фаррелл, Т. Багби, Дж. Вердера, Дж. Матеу, Дж. Оробич и другие упростили концепцию рядов Лорана для решений эллиптических

⁴Парамонов П.В. Некоторые новые критерии равномерной приближаемости функций рациональными дробями // Матем. сборник. 1995. Т. 186. №9, С. 97–112 (см. §2).

⁵Витушкин А.Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6, С. 141–199 (см. гл. 5 §3, Теорема 1).

⁶Harvey R., Polking J. Removable singularities of solutions of linear partial differential equations // Acta Math. 1970. V. 125, P. 39–56 (см. Lemma 3.1).

уравнений с помощью теории распределений, П. В. Парамонов предложил⁷ метод группировки индексов, при котором лорановский коэффициент уравнивается не у отдельных локализаций, а у специально построенных "групп локализаций". В частности, все это позволило установить критерии приближаемости в классах аналитических и гармонических функций в пространствах Липшица C^m , $m > 0$ (кроме приближения индивидуальных гармонических функций при $m < 1$).

Отметим, что указанных усовершенствований схемы А. Г. Витушкина оказалось недостаточно для построения техники равномерных приближений в случае операторов L порядка выше первого, в частности, для гармонических и полианалитических функций (при $n > 1$). Основная причина в следующем: чем выше порядок оператора, тем больше лорановских коэффициентов локализаций приходится уравнивать (как по количеству, так и по порядку).

Задача А2 для гармонических функций была решена в 40-е годы прошлого века независимо М. В. Келдышем⁸ и Дж. Дени⁹ методами классической теории потенциала. Имеет место следующий критерий.

Теорема Д–К. *Равенство $h(X, \Delta) = H(X, \Delta)$ выполнено тогда и только тогда, когда дополнение к X и дополнение к X^o разрежены в одних и тех же граничных точках X .*

В силу критерия Н. Винера¹⁰ условие разреженности означает следующее (ограничимся случаем пространства $\mathbb{R}^3$). Пусть x — граничная точка X , $n \in \mathbb{N}$, Cap_n — гармоническая емкость множества точек дополнения к X , расстояния от которых до x находятся в пределах $[2^{-n+1}, 2^{-n}]$, тогда разреженность дополнения к X в точке x равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \text{Cap}_n$. Точки разреженности дополнения к X^o определяются аналогично.

Заметим, что из критерия Д–К следует (например, ¹¹) критерий

⁷Парамонов П.В. О гармонических приближениях в C^1 -норме // Матем. сборник. 1990. Т. 181. №10, С. 1341–1365.

⁸Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле // УМН. 1941. №8, С. 171–231.

⁹Deny J. Systèmes totaux de fonctions harmoniques // Ann. Inst. Fourier. 1949. V. 1, P. 103–113.

¹⁰Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966 (см. теоремы 5.2 и 5.10).

¹¹Labrèche M. De L'approximation harmonique uniforme. Thèse. 1982. Université de Montréal.

равенства классов $h(X, \Delta) = H(X, \Delta)$, аналогичный (2):

$$h(X, \Delta) = H(X, \Delta) \iff \text{Cap}(D \setminus X^o) = \text{Cap}(D \setminus X), \quad (3)$$

где D — произвольное ограниченное открытое множество, $\text{Cap}(\cdot)$ — гармоническая емкость.

Задача A1 для гармонических функций оказалась сложнее, чем для аналитических. Имеет место следующий результат А. Дебьярда и Б. Гаво¹²:

функция f принадлежит классу $H(X, \Delta)$ тогда и только тогда, когда она непрерывна на компакте X и является тонко гармонической (finely harmonic) в тонкой внутренности (fine interior) X .

Заметим, что тонкая внутренность X есть объединение X^o и множества точек границы X , в которых дополнение к X разрежено. Важно отметить, что условие тонкой гармоничности существенно сложнее для проверки, чем, например, (1), так как является качественным, причем нужно проверять, совпадает ли функция f со своим интегральным представлением по гармонической мере.

Отправной точкой настоящего исследования послужила совокупность следующих проблем, отмеченных, например, Дж. Вердерой¹³.

1. *Отсутствие полных результатов в задачах равномерного приближения для операторов, отличных от $\bar{\partial}$ и Δ .*

2. *Отсутствие единого подхода к доказательствам критериев (2) и (3) в общем случае, несмотря на родственные формулировки.*¹⁴

Отсюда, в частности, вытекают следующие задачи:

1. Для гармонических функций получить естественный аналог критерия (1), по крайней мере, при $d = 3$ (А. Г. О'Фаррелл¹⁵).

2. Установить, верно ли равенство $h(X, \bar{\partial}^2) = H(X, \bar{\partial}^2)$ для произвольного компакта $X \subset \mathbb{C}$ (Дж. Вердера¹⁶).

¹²Debiard A., Gaveau B. Potentiel fin et algèbre de fonctions analytiques // J. Funct. Anal. 1974. V. 16, P. 289–304.

¹³Verdera J. Removability, capacity and approximation // NATO Adv. Sci. Int. Ser. C Math. Phys. Sci., 439. Kluwer. Dordrecht. 1994, P. 419–473 (см. Ch. 5, Sect. 1).

¹⁴В случае $X^o = \emptyset$ критерий равенства $H(X, \Delta) = C(X)$ конструктивно получил А. А. Гончар (Гончар А. А. О равномерном приближении непрерывных функций гармоническими // Изв. АН СССР. 1963. №27, С. 1239–1250).

¹⁵Lecture notes in mathematics. V. 1574. Problem book 3. Part 2. Ed. by V. P. Havin and N. K. Nikol'skiy. Springer-Verlag, 1994, Problem 12.15.

¹⁶там же, Problem 12.16.

Предположение об отсутствии каких-либо ограничений на компакт объясняется тем, что L_∞ -емкость точки¹⁷ положительна в силу (локальной) ограниченности фундаментального решения $\pi^{-1}\frac{\bar{z}}{z}$ оператора $\bar{\partial}^2$; тем самым равенство $h(X, \bar{\partial}^2) = H(X, \bar{\partial}^2)$ для произвольного компакта X представляет собой естественный аналог (2) и (3).

Следующими авторами равенство $h(X, \bar{\partial}^2) = H(X, \bar{\partial}^2)$ было установлено при дополнительных ограничениях.

Т. Трент и Дж. Ванг¹⁸ — компакт X нигде не плотен.

Х. Кармона¹⁹ — внутренняя граница X пуста.

Дж. Вердера²⁰ — компакт X произволен, но модуль непрерывности приближаемой функции удовлетворяет условию Дини.

В развитие сформулированной выше задачи Дж. Вердеры естественно возникает следующая задача.

Задача А3. Найти операторы L (однородные, эллиптические, с постоянными комплексными коэффициентами), такие, что для произвольного компакта X имеет место равенство $H(X, L) = h(X, L)$.

Отметим два естественных необходимых условия (I) и (II).

(I) Фундаментальное решение оператора L локально ограничено (в противном случае L_∞ -емкость точки равна нулю, и пример отсутствия равномерного приближения строится аналогично известному примеру Е. П. Долженко для аналитических функций²¹).

(II) Размерность d пространства равна двум (при $d \geq 3$ для любого оператора L существует компакт X , такой, что $H(X, L) \neq h(X, L)$ ²²).

Таким образом, задача А3 по существу сводится к следующей.

Задача А3'. Установить, верно ли, что при выполнении условий (I) и (II) для любого компакта X имеет место равенство $H(X, L) = h(X, L)$.

¹⁷Harvey R., Polking J. A notion of capacity which characterizes removable singularities // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 169, P. 183–195.

¹⁸Trent T., Wang J.L. Uniform approximation by rational modules on nowhere dense sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, P. 62–64.

¹⁹Carmona J.J. Mergelyan approximation theorem for rational modules // J. Approx. Theory. 1985. V. 44, P. 113–126.

²⁰Verdera J. On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy-Riemann operator // Pacific J. of Math. 1993. V. 159. P. 379–396.

²¹Долженко Е.П. О приближении на замкнутых областях и о нуль-множествах // ДАН. 1962. Т. 143. No 4, С. 771–774.

²²Gauthier P., Tarkhanov N. N. Degenerate cases of uniform approximation by systems with surjective symbols // Canadian Journ. Math. 1993. V. 45. No. 4., P. 740–757 (см. Theorem 8.2).

Цели исследования вытекают из поставленных выше задач.

1. Провести дальнейшее усовершенствование конструктивной схемы приближений А. Г. Витушкина так, чтобы ее можно было применить к задачам равномерного приближения, по крайней мере, для гармонических функций и полианалитических функций порядка $n \geq 2$.

2. Изучить задачи А. Г. О'Фаррелла и Дж. Вердеры, сформулированные выше, а также задачу АЗ'.

3. Изучить вопрос о приближении индивидуальных гармонических функций в пространствах Липшица C^m , $0 < m < 1$.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту.

Все результаты 1–5, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

1. Получен следующий критерий.

Пусть L — дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^2$ с постоянными комплексными коэффициентами, символ которого — однородный эллиптический многочлен. Если фундаментальное решение оператора L локально ограничено, то для любого компакта X всякая функция f , непрерывная на X и удовлетворяющая уравнению $Lf = 0$ внутри X , равномерно приближается на X с любой степенью точности функциями, удовлетворяющими тому же уравнению в окрестностях X .²³ Этот результат, в частности, при любом $n \geq 2$ применим к классу полианалитических функций порядка n , причем при $n = 2$ подтверждена гипотеза, сформулированная в середине 80-х годов Дж. Вердерой.²⁴

2. Получен критерий равномерной приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^3$ для индивидуальных функций в терминах гармонической емкости Н. Винера.²⁵ Соответствующая задача, известная с начала 70-х годов, была поставлена А.Г. О'Фарреллом.

3. Получен аналогичный критерий приближаемости индивидуальных функций гармоническими в нормах пространств Липшица C^m , $0 < m < 1$, в терминах обхвата по Хаусдорфу порядка $1 + m$.²⁶

²³Основной результат статьи [1], завершающий решение задачи АЗ; в диссертации — Теорема 1.3.

²⁴Основной результат статьи [2]; в диссертации — Теорема 1.2.

²⁵Основной результат статьи [3]; в диссертации — Теорема 3.1.

²⁶Основной результат статьи [4]; в диссертации — Теорема 4.1. В совокупности с результатами А. Г. О'Фаррелла, Дж. Вердеры, П. В. Парамонова получено решение общей задачи о приближениях индивидуальных функций гармоническими функциями в пространствах $C^m(X)$ при всех $m \geq 0$.

4. В задаче о равномерной аппроксимации функций решениями уравнения $Lf = 0$ (где L — произвольный однородный эллиптический оператор в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, с постоянными комплексными коэффициентами) получен технический результат общего характера,²⁷ позволяющий снизить на 1 порядок требование к асимптотике на бесконечности у разностей между исходными и приближающими функциями, по сравнению со схемой приближений, предложенной А.Г. Витушкиным в 60-е годы. Это базовый результат, используемый в доказательствах сформулированных выше критериев.

5. Доказано, что для любой жордановой области G пространства $\mathbb{R}^2$ с границей Дини-Ляпунова множество граничных значений функций, полианалитических в G и непрерывных вплоть до границы Γ , имеет первую категорию в пространстве $C(\Gamma)$. Построена жорданова область с липшицевой границей, для которой задача Дирихле в классе бианалитических функций разрешима при любой граничной функции f из $C(\Gamma)$.²⁸

Методы исследования.

В работе применяются методы функционального анализа, классической теории потенциала, теории сингулярных интегралов (в частности, на липшицевых кривых и поверхностях), теории приближений аналитическими функциями. Автором разработаны новые геометрические конструкции для оценки лорановских коэффициентов локализаций приближаемой функции.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в задачах приближения функций решениями эллиптических уравнений в различных функциональных пространствах. Так как метод приближения в целом конструктивен, результаты могут быть использованы в задачах моделирования соответствующих векторных полей (в теории упругости, электростатике, геодезии).

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались:

²⁷ [1, Теорема 2]; в диссертации — Теорема 1.4.

²⁸Основной результат статьи [5]; в диссертации — Теорема 2.1 и Пример 2.1.

на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова — на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН Б. С. Кашина, профессоров Б. И. Голубова и М. И. Дьяченко, члена-корреспондента РАН С. В. Конягина (2008), на семинаре по многомерному комплексному анализу под руководством академика РАН А. Г. Витушкина (2002), под руководством члена-корреспондента РАН Е. М. Чирки, члена-корреспондента РАН С. Ю. Немировского, профессоров В. К. Белошапки и А. Г. Сергеева (2008, 2009), на семинаре по теории приближений и граничным свойствам функций под руководством профессора Е. П. Долженко (неоднократно, 1997–2012), на семинаре по теории приближений под руководством профессора П. В. Парамонова (неоднократно, 1997–2012);

в МИАН им. В. А. Стеклова — на семинаре по комплексному анализу под руководством академика РАН А. А. Гончара, члена-корреспондента РАН Е. М. Чирки и профессора А. И. Аптекарева (2007, 2008), под руководством члена-корреспондента РАН Е. М. Чирки и профессора А. И. Аптекарева (2013);

в ПОМИ РАН — на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций под руководством члена-корреспондента РАН С. В. Кислякова и профессора В. П. Хавина (2009–2012);

на международной конференции, посвященной 70-летию академика А. Г. Витушкина (Москва, МГУ-МИАН, 2001), на 19-й летней международной конференции по математическому анализу (Санкт-Петербург, ММИ им. Л. Эйлера, 2010);

в Автономном университете Барселоны (Испания) в виде цикла лекций (октябрь–ноябрь 2005).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы с подробными доказательствами в 9 статьях автора [1]– [9] (без соавторов) в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК и входящих в международные системы цитирования.²⁹ Список публикаций приведен в конце автореферата.

²⁹Основные результаты диссертации также опубликованы в обзоре: Мазалов М.Я., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. Условия C^m -приближаемости функций решениями эллиптических уравнений // Успехи математических наук. 2012. Т. 67. Вып. 6 (408), С. 53–100 (см. теоремы 1.7, 1.8, 1.17 при $m \in (0, 1)$, 2.1 и 2.10).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на параграфы. Общий объем диссертации составляет 216 страниц. Список литературы включает (вместе с публикациями автора) 76 наименований.

Содержание работы

Во **введении** приводится краткая история изучаемых вопросов, формулируются основные результаты диссертации.

В **главе 1** (состоящей из 5 параграфов) установлен следующий результат о равномерных приближениях полианалитическими функциями порядка $n \geq 2$.

Теорема 1.1. *При $n \geq 2$ для произвольного компакта $X \subset \mathbb{C}$ имеет место равенство $H(X, \bar{\partial}^n) = h(X, \bar{\partial}^n)$.*

Напомним, что в случае $n = 1$ имеет место критерий А. Г. Витушкина (1)–(2), а примеры компактов $X \subset \mathbb{C}$, таких, что $H(X, \bar{\partial}) \neq h(X, \bar{\partial})$, хорошо известны (С. Н. Мергелян, Е. П. Долженко).

Так как фундаментальное решение оператора $L = \bar{\partial}^n$ имеет вид

$$E(z) = \frac{\bar{z}^{n-1}}{\pi z},$$

теорема 1.1 получается как следствие более общего утверждения, установленного в §1.4.

Теорема 1.3. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ — произвольный компакт, и фундаментальное решение оператора L локально ограничено. Тогда имеет место равенство $H(X, L) = h(X, L)$.*

В §1.1 рассматривается схема приближения, предложенная А. Г. Витушкиным и усовершенствованная Р. Харви и Дж. Полкингом, А. Г. О’Фарреллом, Дж. Вердерой, П. В. Парамоновым, Н. Н. Тархановым и другими. Здесь рассматривается упрощенный вариант схемы, не использующий емкостей (он применяется в случае операторов L с локально ограниченным фундаментальным решением).

В §1.2 доказывается теорема 1.4 о приближении функции по частям для

произвольных операторов L в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ (однородных, эллиптических, с постоянными коэффициентами). Прежде, чем формулировать теорему 1.4, сделаем ряд пояснений.

Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^d$, E — фундаментальное решение оператора L , функция $f \in h(X, L)$ продолжена на дополнение к X (например, по известной теореме Л. Брауэра – П.С. Урысона) как непрерывная финитная функция в $\mathbb{R}^d$.

Далее $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ означает мультииндекс, то есть, набор из d целых неотрицательных чисел. При этом:

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^d \alpha_k, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Через $\text{Spt}(\cdot)$ обозначим замыкание носителя функции (или распределения).

Рассмотрим всевозможные покрытия $\{Q_j\}$ компакта $\text{Spt}(Lf)$ конечными семействами раздельных двоичных кубов с длинами сторон $s_j \leq 1$. Каждому покрытию подчинено $\{\varphi_j\}$ — разбиение единицы на $\{Q_j\}$ из следующей леммы 1.1, принадлежащей Р. Харви и Дж. Полкингу³⁰.

Лемма 1.1. *Пусть $\{Q_j\}$ — конечное множество раздельных двоичных кубов. Тогда существует множество функций $\{\varphi_j\}$, таких, что $\text{Spt} \varphi_j \subset (3/2)Q_j$, $\|\partial^\alpha \varphi_j\|_{L^\infty} \leq A(s_j)^{-|\alpha|}$ для соответствующих номеров j (где A зависит только от α), и $\sum_j \varphi_j = 1$ в некоторой окрестности $\bigcup_j Q_j$.*

Используя указанное разбиение единицы, разложим функцию f в конечную сумму локализаций: $f = \sum_j f_j$, где $f_j = E * (\varphi_j Lf)$, ” $*$ ” означает операцию свертки, понимаемую в обобщенном смысле.

Теорема 1.4. *Пусть существует функция $\varepsilon(r)$, $r \in (0, 1]$, $\varepsilon \searrow 0$ при $r \searrow 0$, такая, что имеет место следующее. Для любого покрытия $\{Q_j\}$ и любой соответствующей функции f_j существует функция $F_j \in C(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) $\text{Spt} LF_j \subset (10Q_j \setminus X)$;
- 2) $\|r_j\|_{L^\infty} \leq \varepsilon(s_j)$, где $r_j = f_j - F_j$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^{d-1} r_j(x) = 0$.

Тогда $f \in H(X, L)$.

³⁰см. сноску ⁶ на с.2.

Заметим, что (в частном случае $L = \bar{\partial}$) критерий А. Г. Витушкина (1)–(2) является несложным следствием теоремы 1.4, так как каждое из условий (1) или (2) автоматически (в силу определения аналитической емкости) приводит к построению нужной функции F_j с асимптотикой из условия 3) теоремы 1.4 при $d = 2$.

Теорема 1.4 сразу же вытекает из леммы 1.5 (следствия известной теоремы об отделимости выпуклых множеств в нормированном пространстве) и леммы 1.6.

Лемма 1.5. Пусть $\mathbf{D}$ — куб в $\mathbb{R}^d$; $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ — конечное множество неотрицательных функций, непрерывных на $\mathbf{D}$; $b > 0$ — постоянная.

Пусть для любой неотрицательной функции $\nu \in L_1(\mathbf{D}, dm)$, такой, что $\int_{\mathbf{D}} \nu(x) dm_x = 1$, найдется номер $k = k(\nu)$, при котором выполнено неравенство $\int_{\mathbf{D}} \psi_k(x) \nu(x) dm_x \leq b$.

Тогда для некоторой (конечной) выпуклой комбинации $\psi = \sum_k \lambda_k \psi_k$ (то есть, $\lambda_k \geq 0$ и $\sum_k \lambda_k = 1$) выполнена оценка $\max_{x \in \mathbf{D}} \psi(x) \leq b$.

В качестве ψ_k возьмем функции вида $\left| \sum_j r_j \right|$ из следующей леммы, соответствующие подходящим покрытиям $\{Q_j\}$.

Лемма 1.6. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, причем $\delta = 2^{-n_0}$ столь мало, что $\varepsilon(\delta) < 1$; $\mathbf{D}$ — куб, такой, что $X \subset \text{Spt } f \subset (1/4)\mathbf{D}$.

Тогда для любой неотрицательной функции $\nu \in L_1(\mathbf{D})$, такой, что $\int_{\mathbf{D}} \nu(x) dm_x = 1$, существует покрытие $\{Q_j\}$ компакта $\text{Spt}(Lf)$, для которого выполнены следующие условия:

- 1) $\delta \leq s(Q_j) \leq \varepsilon(\delta) < 1$;
- 2) для функций $r_j = f_j - F_j$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.4, имеет место оценка

$$\int_{\mathbf{D}} \left| \sum_j r_j(x) \right| \nu(x) dm_x < \varepsilon_1, \text{ где } \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon, \delta) \text{ и } \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0.$$

Используемый здесь подход по существу опирается на известную в

функциональном анализе теорему С. Мазура:

если последовательность ψ_k элементов нормированного пространства слабо сходится к элементу Ψ , то некоторая последовательность их выпуклых комбинаций сходится к Ψ сильно.

Такой подход оказывается полезным и в других ситуациях (например, ³¹).

Идея доказательства леммы 1.6 состоит в следующем. Если $\nu(x) \leq 1/\varepsilon(\delta)$ при всех x , то в качестве требуемого покрытия возьмем совокупность кубов координатной сетки с длиной стороны δ . Там, где значения функции ν достаточно велики, кубы покрытия увеличим, используя стандартную процедуру Кальдерона–Зигмунда. При этом с применением теории сингулярных интегралов получается следующая оценка (где $A = A(L)$)

$$\int_{\mathbf{D}} \left| \sum_j r_j(x) \right| \nu(x) dm_x < A \left((m(\mathbf{D})\varepsilon(\delta))^{1/2} + \varepsilon(\varepsilon(\delta)^{1/d}) \right),$$

правая часть которой и представляет собой требуемую функцию ε_1 .

В §1.3 техника, развитая в §1.2, применяется к доказательству следующего частного случая теоремы 1.1 при $n = 2$.

Теорема 1.2. *Для произвольного компакта $X \subset \mathbb{C}$ имеет место равенство $H(X, \bar{\partial}^2) = h(X, \bar{\partial}^2)$.*

Доказательство теоремы 1.2 опирается на теорему 1.4 и использует следующую геометрическую конструкцию из леммы 1.12.

Пусть $Q_0 = [0, 1] \times [0, 1]$; $\mathcal{X}_o$ — непустое открытое подмножество квадрата Q_0 (имеющее смысл "порции" дополнения к X), $\mathcal{X}$ — замыкание $\mathcal{X}_o$.

Будем рассматривать покрытия компакта $\mathcal{X}$ конечными семействами замкнутых двоичных квадратов

$$Q = Q_k^{m_1, m_2} = [m_1 2^{-k}, (m_1 + 1) 2^{-k}] \times [m_2 2^{-k}, (m_2 + 1) 2^{-k}],$$

где k , m_1 и m_2 — целые числа. По индукции строим

³¹Колесников С.В. Об одной теореме М.В. Келдыша, касающейся поточечной сходимости последовательностей полиномов // Матем. сборник. 1984. Т. 124 (166). №4 (8), С. 568–570.

"невозрастающую" последовательность покрытий $\mathcal{Q}(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $\mathcal{Q}(0) = Q_0$, и каждый квадрат из $\mathcal{Q}(k+1)$ содержится (возможно, совпадая) в соответствующем квадрате из $\mathcal{Q}(k)$. Каждое покрытие состоит из квадратов двух типов: *белых*, которые на следующем шаге делятся, и *красных*, которые в дальнейшем не изменяются (исходный квадрат Q_0 — белый).

Два квадрата $Q_k^{m_1, m_2}$ и $Q_k^{n_1, n_2}$ (одного размера) назовем *согласованными* (*согласованной парой*), если $|m_1 - n_1| \leq 1$ и $2 \leq |m_2 - n_2| \leq 3$. Множество квадратов $\{Q_k^{m_1, m_2}\}$, где k и m_1 фиксированы, назовем *вертикальным рядом* (согласованные квадраты расположены в одном или в соседних вертикальных рядах).

Индукционный переход: построение $\mathcal{Q}(k)$. Разделим каждый белый квадрат Q покрытия $\mathcal{Q}(k-1)$ на четыре квадрата со стороной $s(Q)/2$. Из полученных квадратов включим в $\mathcal{Q}(k)$ только те, которые пересекают $\mathcal{X}$, назовем их *квадратами поколения k* ; покрытие $\mathcal{Q}(k)$ состоит из квадратов поколения k и всех красных квадратов предыдущих поколений. Определим цвет квадратов поколения k следующим образом. Если среди них найдется согласованная пара (Q_1, Q_2) , то назовем *красными* Q_1 и Q_2 , а также каждый квадрат из $\mathcal{Q}(k)$, находящийся с Q_1 или Q_2 в одном вертикальном ряду; затем в множестве квадратов, цвет которых еще не определен, продолжим поиск согласованных пар (определяя красные квадраты так же, как и выше). Когда все согласованные пары будут исчерпаны, оставшиеся квадраты поколения k назовем *белыми*, и тем самым покрытие $\mathcal{Q}(k)$ будет построено.

Лемма 1.12. *Каждое покрытие $\mathcal{Q}(k)$ обладает следующими свойствами.*

1) *Разложим все квадраты покрытия $\mathcal{Q}(k)$ на группы так, чтобы каждая группа располагалась в своем вертикальном ряду. Тогда проекции групп на ось Ox не имеют общих внутренних точек, а цвет квадратов в каждой группе одинаков. Если группа состоит из белых квадратов, то их не более двух, причем соседних, а если из красных — то не более четырех $Q_k^{m_1, m_2}$, причем индекс m_2 отличается не более, чем на три. Длина стороны белого квадрата равна 2^{-k} , а красного — не меньше 2^{-k} .*

2) *Пусть $Q_k^{m_1, m_2}$ и $Q_k^{m_1+1, n_2}$ — квадраты поколения k в соседних*

вертикальных рядах. Тогда $|m_2 - n_2| \leq 3$, а если оба квадрата белые, то $|m_2 - n_2| \leq 1$.

3) Если в вертикальном ряду есть красный квадрат, то существует согласованная пара красных квадратов, один из которых находится в том же вертикальном ряду, а другой — в том же вертикальном ряду или в соседнем.

4) Пусть Q и Q' — квадраты из $\mathcal{Q}(k)$ с центрами, соответственно, (x, y) и (x', y') , находящиеся в различных вертикальных рядах. Тогда выполнено неравенство $|y' - y|/|x' - x| < 7$.

Лемма 1.12 доказывается в §1.3.

Комментарии.

1. Так как компакт $\mathcal{X}$ — замыкание непустого открытого множества и в силу свойства 1) покрытий $\mathcal{Q}(k)$ не может быть для всех k покрыт только белыми квадратами, при достаточно больших k будет зафиксирована хотя бы одна согласованная пара красных квадратов.

2. Момент остановки, то есть, номер k , на котором покрытие $\mathcal{Q}(k)$ окончательно фиксируется, определяется с помощью модуля непрерывности приближаемой функции $f \in h(X, \bar{\partial}^2)$. Именно, берется минимальный номер k , для которого выполнено условие

$$\omega_f(2^{-k}) < \sum_{\text{согл}} s(Q),$$

где в правой части для каждой согласованной пары красных квадратов (Q_1, Q_2) суммируется длина стороны $s = s(Q_1) = s(Q_2)$.

3. Для каждой согласованной пары красных квадратов (Q_1, Q_2) возьмем точки $z_1 \in 1.1Q_1 \cap \mathcal{X}^o$ и $z_2 \in 1.1Q_2 \cap \mathcal{X}^o$, расстояние между которыми (в силу определения согласованных пар) "не мало" по сравнению с s , и поэтому функции вида

$$K(z, z_1, z_2) = \frac{\overline{z - z_2}}{z - z_2} - \frac{\overline{z - z_1}}{z - z_1},$$

ограниченные и бианалитические вне множества $\{z_1, z_2\}$, могут быть использованы для построения функций, приближающих локализации f .

4. В силу свойств 1), 2) и 4) покрытий $\mathcal{Q}(k)$, квадраты "накапливаются" к липшицевой кривой $\Gamma: y = \Psi(x)$, причем $|\Psi'(x)| < 7$. Это (в

сочетании с техникой доказательства теоремы 1.4) позволяет использовать для доказательства теоремы 1.2 теорию сингулярных интегралов на липшицевой кривой Γ (включая L_2 -оценки).

В §1.4 доказывается теорема 1.3. Напомним³², что дифференциальный оператор L порядка n в $\mathbb{R}^d$, символ которого — однородный эллиптический многочлен, имеет фундаментальное решение вида

$$E(x) = E_0(x) - E_1(x) \log |x|,$$

где E_0 — вещественно аналитическая функция в $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, однородная степени $n - d$, E_1 — однородный многочлен степени $n - d$ (если $n < d$, то $E_1 \equiv 0$). Напомним, что при $d \geq 3$ для любого оператора L (в том числе и с локально ограниченным фундаментальным решением) существует компакт X , такой, что $H(X, L) \neq h(X, L)$.

При $d = 2$ имеет место интегральное представление (где $n \geq 2$)³³:

$$E_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2(n-2)!} \int_0^{2\pi} \frac{(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)^{n-2}}{L(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta.$$

В случае $E_1 \equiv 0$ теорема 1.3 доказывается по существу так же, как и теорема 1.2; случай $E_1 \not\equiv 0$ (при этом, очевидно, $n \geq 3$) нетривиален и требует отдельного рассмотрения: для построения приближающих функций нужно специально подбирать ограниченные линейные комбинации частных производных E порядка $n - 2$, и в итоге их оказывается "достаточно".

В §1.5 показывается (результат установлен в [6]), что для доказательства теоремы 1.2 вместо применения теоремы 1.4 можно адаптировать метод П. В. Парамонова группировки индексов, предложенный им для гармонических приближений в C^1 -норме и равномерных аналитических приближений.

Суть метода в следующем. Напомним, что стандартная схема А. Г. Витушкина требовала бы в условии 3) теоремы 1.4 замены в показателе $d - 1$ на d (то есть, 1 на 2) — существенно более

³²Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986, см. Теорема 7.1.20.

³³Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965, §22.

жесткого ограничения на асимптотику разностей $f_j - F_j$. Оказывается, для приближения функции f достаточно, чтобы такая асимптотика имела место не для каждого индекса j в отдельности, а суммарно, для специально подобранных групп индексов, причем индексов, которые нельзя "сгруппировать" оказывается "мало".

Основное достоинство метода — его полная конструктивность, однако по мере увеличения порядка оператора строение групп усложняется, что затрудняет применение метода в случае произвольных операторов L .

В **главе 2** (состоящей из 3 параграфов) изучается вопрос о массивности множества граничных значений полианалитических функций в случае жордановых областей G с липшицевой границей ∂G . Это во многом мотивировано исследованиями о равномерном приближении непрерывных функций полианалитическими многочленами³⁴.

Пусть $C(\partial G)$ — банахово пространство функций, непрерывных на ∂G , с равномерной нормой; $S_n = S_n(\partial G, G)$ — подпространство $C(\partial G)$, элементами которого являются граничные значения функций, n -аналитических в G и непрерывных в замкнутой области $\bar{G}$; $S = \bigcup_n S_n$. Основным результатом §2.1 является теорема 2.1, установленная в [5].

Напомним, что (гладкая) кривая называется *Дини-гладкой*, если угол наклона ее касательной $\beta(s)$ к вещественной оси как функция длины дуги s удовлетворяет условию $|\beta(s_2) - \beta(s_1)| < \omega(|s_2 - s_1|)$, где для функции ω выполнено условие Дини $\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty$. В частности, каждая кривая Ляпунова является Дини-гладкой.

Теорема 2.1. *Пусть ∂G — Дини-гладкая кривая. Тогда S имеет первую категорию в $C(\partial G)$.*

Так как $C(\partial G)$ — полное метрическое пространство, по теореме Бэра о категории имеем неравенство $S \neq C(\partial G)$ для Дини-гладких кривых ∂G .

Теорема 2.1 является следствием леммы 2.1 и леммы 2.2.

Лемма 2.1. *Пусть H — функция, аналитическая в круге $K : |w| < 1$ и однолистно отображающая K на жорданову область G со спрямляемой границей ∂G , причем в K выполнено неравенство $|H'(w)| > c_0 > 0$. Если*

³⁴Кармона Х.Х., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций // Матем. сборник. 2002. Т. 193. №10, С. 75–98.

выполнено условие

$$\iint_K |H''(w)| r dr d\varphi < \infty$$

(где $w = re^{i\varphi}$), то S имеет первую категорию в $C(\partial G)$.

В лемме 2.2 доказывается, что, если ∂G — Дини-гладкая кривая, то выполнены условия леммы 2.1; этот факт по существу вытекает из теоремы С. Е. Варшавского³⁵.

Теорему 2.1 интересно сопоставить с результатом К. Ю. Федоровского³⁶: для "большинства" областей G , в том числе и с аналитической границей (кроме весьма специальных областей, так называемых неванлинновских) $S_2(\partial G, G)$ является всюду плотным подпространством $C(\partial G)$. О неванлинновских областях с нигде не аналитическими границами см. также [7].

Возникает естественный вопрос, можно ли в теореме 2.1 избавиться от ограничений на ∂G . В §§2.2-2.3 на него дается отрицательный ответ (соответствующий пример был построен в [5]).

Пример 2.1. Существует жорданова область G с липшицевой границей, такая, что $S_2(\partial G, G) = C(\partial G)$.

Основным результатом §2.2 является следующая теорема 2.3.

Рассмотрим лакунарный ряд

$$h_{k_0}(w) = w + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k\alpha_k} w^{\alpha_k},$$

где $w \in \mathbb{C}$, $|w| < 1$, $k_0 \in \mathbb{N}$, возрастающая последовательность $\{\alpha_k\}$ натуральных чисел настолько разрежена, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} < \infty$$

(достаточно взять $\alpha_k = 2^{k^2}$). Пусть K (как и выше) — единичный круг в $\mathbb{C}$, ∂K — единичная окружность.

³⁵Pommerenke Ch. Univalent functions. Göttingen. Studia Math, 1975, см. Theorem 10.2.

³⁶Федоровский К.Ю. О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4, С. 604–610.

Теорема 2.3. Для любых функции $f \in C(\partial K)$ и $k_0 \in \mathbb{N}$ существует функция $F_f = \Phi_1 \overline{h_{k_0}} - \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 — аналитические функции в K , такая, что F_f непрерывно продолжается на ∂K , причем $F_f = f$ на ∂K .

Так как (в силу расходимости гармонического ряда) функция h_{k_0} не является однолистной в K ни при каком k_0 , пример 2.1 непосредственно не следует из теоремы 2.3. Однако важно, что $h'_{k_0} \in H^2$ и

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} \|h'_{k_0} - 1\|_{L_2(\partial K)} = 0.$$

Построение примера 2.1 завершается в §2.3. Здесь существенно используются "эскиммо-конструкция" Н.Н. Лузина — И.И. Привалова (функция h_{k_0} однолистка на "достаточно массивном" подмножестве K), техника конформных отображений и методы функционального анализа, в частности, теорема У. Рудина — Л. Карлесона об интерполяционных множествах пика для непрерывных аналитических функций.

В главе 3 (состоящей из 5 параграфов) техника равномерных приближений, развитая в §§1.2–1.3, применяется для получения критерия равномерной приближаемости функции, непрерывной на компакте $X \subset \mathbb{R}^3$ и гармонической внутри X , функциями, гармоническими в окрестностях X , в терминах гармонической емкости Винера. Напомним, что в теории потенциала принято следующее определение гармонической емкости: для компакта $K \subset \mathbb{R}^3$

$$\text{Cap}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mu} \left\{ \|\mu\| : \left\| \mu * \frac{1}{|x|} \right\|_{L_\infty} \leq 1 \right\},$$

где $\|\mu\|$ — полная масса μ — неотрицательной меры Радона, распределенной на K . Емкость ограниченного множества — точная верхняя грань емкостей его компактных подмножеств.

При изучении устранимых особенностей непрерывных решений уравнения $Lf = 0$ Р. Харви и Дж. Полкинг ввели емкости, естественно обобщающие аналитическую и гармоническую емкости. Рассмотрим случай $n < d$. Емкостью компакта K называется величина

$$\sup_g \{ |\langle Lg | 1 \rangle| : \|g\|_{L_\infty} \leq 1, g \in C(\mathbb{R}^d), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0, \text{Spt}(Lg) \subset K \},$$

которую будем обозначать $\text{Cap}_L(K)$ (здесь и далее $\|\cdot\|_{L_\infty} = \|\cdot\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$). Запись $\langle \Psi | \varphi \rangle$, означает действие распределения Ψ с компактным носителем на функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Для гармонических функций в $\mathbb{R}^3$ оба указанных определения емкости равносильны³⁷.

Хорошо известно, что гармоническая емкость полуаддитивна:

если $U = U_1 \cup U_2$, то $\text{Cap}(U) \leq \text{Cap}(U_1) + \text{Cap}(U_2)$.

Вопрос о полуаддитивности емкости $\text{Cap}_L(\cdot)$, по-видимому, в общем случае открыт; полуаддитивность аналитической емкости — весьма тонкий факт, который сравнительно недавно доказал Х. Толса. Полуаддитивность гармонической емкости в настоящей работе в доказательствах нигде не используется.

Введем упрощенные обозначения $h(X) = h(X, \Delta)$ и $H(X) = H(X, \Delta)$, где $X \subset \mathbb{R}^3$ — компакт, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Продолжив произвольную функцию $f \in h(X)$ по теореме Л. Брауэра–П.С. Урысона, будем считать ее непрерывной на всем пространстве $\mathbb{R}^3$ и финитной.

Теорема 3.1. Пусть существуют постоянная $k \geq 1$ и функция $\epsilon(t) \searrow 0$ при $t \searrow 0$, такие, что для любого открытого шара B радиуса r с границей ∂B имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{\sigma(\partial B)} \int_{\partial B} f(x) d\sigma_x - \frac{1}{m(B)} \int_B f(x) dm_x \right| \leq \epsilon(r) r^{-1} \text{Cap}(kB \setminus X), \quad (4)$$

где $x \in \mathbb{R}^3$, $\sigma(\cdot)$ — поверхностная мера на ∂B , $m(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^3$, kB — шар радиуса kr , concentричный B . Тогда $f \in H(X)$.

Обратно, если $f \in H(X)$, то оценка (4) выполнена для $k = 1$, а в качестве функции ϵ достаточно взять $A\omega_f$, где $A > 0$ — подходящая абсолютная постоянная, ω_f — модуль непрерывности f в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 3.1 представляет собой естественный аналог теоремы А.Г. Витушкина о равномерном приближении аналитическими функциями на компактах в $\mathbb{C}$. Теорему 3.1 в качестве гипотезы формулировал П. В. Парамонов, им было предложено естественное условие (4).

Доказательство теоремы 3.1 опирается на следующее утверждение —

³⁷Harvey R., Polking J. A notion of capacity which characterizes removable singularities // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 169, P. 183–195.

естественный аналог леммы А. Г. Витушкина³⁸.

Лемма 3.1. *Если выполнена оценка*

$$\left| \int_B f(x) \Delta \varphi(x) dm_x \right| \leq \epsilon(r) \|\nabla^2 \varphi\|_{L_\infty} r^2 \text{Cap}(kB \setminus X) \quad (5)$$

(где B , k и ϵ — те же, что и в теореме 3.1, φ — произвольная функция из $C_0^2(B)$), то $f \in H(X)$. Обратно, если $f \in H(X)$, то оценка (5) выполнена с $k = 1$ и $\epsilon = A\omega_f$.

Необходимость каждой из оценок (4) и (5) для выполнения условия $f \in H(X)$ доказывается стандартно: так же, как для равномерных приближений аналитическими функциями или гармонических приближений в C^1 -норме. Вопрос о достаточности указанных оценок значительно сложнее, чем в случае аналитических функций. Напомним, что гипотезу о достаточности оценки вида (5) для $f \in H(X)$ формулировал А. Г. О'Фаррелл.

Доказательство достаточности оценки (5) проводится по той же схеме, по которой в главе 1 доказывается теорема 1.2. Именно, применяется теорема 1.4, а геометрическая конструкция обобщает проводимую в §1.3.

Заметим, что теорема 3.1 переносится (с несущественным изменением доказательства) на гармонические функции в $\mathbb{R}^d$, $d > 3$, при этом правая часть неравенства (4) изменяется на $\epsilon(r)r^{2-d}\text{Cap}(kB \setminus X)$. Лемма 3.1 на $\mathbb{R}^d$, $d > 3$, переносится без изменений.

Напомним, что задача о равенстве классов $H(X)$ и $h(X)$ изучена значительно лучше более общей задачи описания функций $f \in H(X)$. Имеет место следующий критерий Дж. Дени – М. В. Келдыша.

(Д–К): равенство $H(X) = h(X)$ выполнено тогда и только тогда, когда дополнения к X и к X^o разрежены в одних и тех же точках ∂X .

Из **(Д–К)** следует критерий (3) равенства $H(X) = h(X)$ (см. с. 4).

Аналогично случаю аналитических функций, (3) является несложным следствием леммы 3.1, так как равенство емкостей влечет выполнение оценки (5) для всех функций $f \in h(X)$ и всех соответствующих φ .

Заметим, что теорема 3.1 и лемма 3.1 ранее (до работы [3]) были

³⁸Витушкин А.Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6, см. гл. 4, §2, Лемма 1.

установлены автором при следующих дополнительных ограничениях:

1) существует постоянная $k_0 \geq 1$, такая, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^3 \setminus X^\circ$ и для всех $r > 0$ имеет место оценка [8]

$$\text{Cap}(B(x, 2r) \setminus X) \leq k_0 \text{Cap}(B(x, r) \setminus X);$$

2) модуль непрерывности функции f удовлетворяет условию Дини [9].

Сопоставим формулировки теорем 1.3 и 3.1 и рассмотрим ситуацию в случае операторов L порядка выше двух. Отметим следующее.

1. Особая роль размерности $d = 2$.

В случае локальной ограниченности фундаментального решения эллиптического оператора L равенство $H(X, L) = h(X, L)$ имеет место для любого компакта $X \subset \mathbb{R}^2$; вместе с тем, как отмечалось выше³⁹, при $d > 2$ для любого оператора L (в том числе, и с локально ограниченным фундаментальным решением) существует компакт X , такой, что $H(X, L) \neq h(X, L)$.

2. Значение порядка оператора $n \leq 2$ при $d > 2$.

В случае $2 < n < d$ не имеет место аналога (3) (или аналога критерия А.Г. Витушкина (2)) в терминах соответствующей емкости Р. Харви и Дж. Полкинга $\text{Cap}_L(\cdot)$, характеризующей устранимые особенности непрерывных решений уравнения $Lf = 0$ (см. пример 3.1, установленный в §3.1).

Пример 3.1. Пусть $2 < n < d$. Тогда существуют компакт X , такой, что для любого куба Q выполнена оценка $\text{Cap}_L(Q \setminus X^\circ) \leq A \text{Cap}_L(2Q \setminus X)$, и функция $f \in h(X, L)$, такая, что $f \notin H(X, L)$.

Заметим, что вопрос о (естественном) критерии равенства $H(X, L) = h(X, L)$ в случае $d > 2$, $n > 2$ и компактов X с непустой внутренностью остается открытым.

В §3.1 получен ряд оценок, в частности, доказана лемма 3.2 об аддитивности гармонической емкости при специальных разбиениях множеств.

Лемма 3.2. Пусть Y — компакт, $\delta = \text{Cap}(Y) > 0$, D_j — семейство раздельных замкнутых кубов с $s(D_j) = \delta$, покрывающих Y , $\delta_j =$

³⁹см. сноску ²² на с. 5.

$\text{Cap}(2D_j \cap Y)$. Тогда выполнена оценка $\sum_j \delta_j \leq A\delta$.

Затем доказывается необходимость оценки (5) в лемме 3.1 и устанавливается лемма 3.5, связывающая оценки (5) и (3).

Лемма 3.5 Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ — компакт.

1) Если существует постоянная $A > 0$, такая, что для любого шара B имеет место оценка $\text{Cap}(B \setminus X^\circ) \leq A\text{Cap}(kB \setminus X)$, то для любых соответствующих функций f и φ выполнена оценка (5).

2) Если имеет место равенство $H(X) = h(X)$, то для любого ограниченного открытого множества D выполнено равенство

$$\text{Cap}(D \setminus X^\circ) = \text{Cap}(D \setminus X).$$

В конце §3.1 строится пример 3.1.

В §3.2 рассматривается связь между оценками (4) и (5). Как вытекает из формулы Грина, оценка (4) фактически представляет собой частный случай (5) для функций φ простой "радиальной" структуры.

Из оценки (4) выводится оценка (5) для "достаточно хороших" функций φ , которые в дальнейшем применяются для построения разбиений единицы. Именно, теорема 3.1 сводится следующей к лемме 3.12, которая доказывается в §§3.3–3.5.

Лемма 3.12 Пусть для фиксированного $k \geq 1$, произвольного шара B и всех соответствующих функций $\varphi \in C_0^3(B)$ имеет место оценка

$$\left| \int_B f(x) \Delta \varphi(x) dm_x \right| \leq Ak^3 \epsilon(r) \|\nabla^3 \varphi\|_{L_\infty} r^3 \text{Cap}((k+3)B \setminus X).$$

Тогда $f \in H(X)$.

В §3.3 применяется теорема 1.4 о приближении функции по частям, рассматриваются согласованные пары двоичных кубов (это понятие обобщает введенные в главе 1 согласованные пары двоичных квадратов). Заметим, что здесь ситуация сложнее, чем в главе 1, так как нужно оценивать емкость дополнения. Одно из утверждений об оценке емкости — сформулированная выше лемма 3.2; другое — следующее утверждение, представляющее собой вариант леммы 3.21, доказанной в §3.3 (с некоторым упрощением обозначений).

Пусть Q — двоичный куб, $\{Q_j\}$ — конечное множество двоичных кубов, таких, что $Q_j \subset Q$; $\tilde{Q}$ и $\tilde{Q}_j$ — соответственно, проекции кубов Q и Q_j на плоскость $x_3 = 0$, s и s_j — длины сторон кубов.

Пусть $Y \subset \mathbb{R}^3$ — компакт, $\beta = \beta(Q) = \text{Cap}((3/2)Q \cap Y)$; $\beta_j = \beta(Q_j)$.

Если для $\lambda_j = \lambda(Q_j) \geq 0$ и всех $x \in \tilde{Q}$ выполнено неравенство

$$\sum_j \lambda_j \chi(\tilde{Q}_j)(x) \leq 1,$$

где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция, то при $q \in [0, 1)$ имеет место оценка

$$\sum_j \lambda_j (\beta_j)^{1+q} (s_j)^{1-q} \leq A(q) \beta^{1+q} s^{1-q}.$$

В следующих двух параграфах проводится геометрическая конструкция (требования к которой даются в лемме 3.23), представляющая собой значительное обобщение конструкции из рассмотренной выше леммы 1.12. Важно отметить, что, по аналогии с леммой 1.12, кубы покрытия накапливаются к липшицевой поверхности.

Так как геометрическая конструкция весьма сложна, сначала в §3.4 проводим упрощенный вариант, в котором не требуем, чтобы кратность пересечений увеличенных кубов $(129/128)Q_j$ для кубов покрытия Q_j была ограничена сверху абсолютной постоянной. В §3.5 конструкция уточняется с целью контроля над указанной кратностью. По окончании доказательства леммы 3.23 доказательство леммы 3.12 завершается аналогично тому, как в §1.3 было завершено доказательство теоремы 1.2 (с применением теории сингулярных интегралов на липшицевой поверхности).

В **главе 4** (состоящей из 3 параграфов) рассматривается вопрос о приближении гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^3$ в пространствах Липшица C^m , где $0 < m < 1$.

Пусть $0 < m < 1$, $X \subset \mathbb{R}^3$ — компакт; напомним, что пространство Липшица $\text{Lip}^m(X)$ состоит из функций $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что для всех $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^m,$$

где $c = c(f, X, m) < \infty$. Точная нижняя грань значений c задает полунорму $\|f\|_{m,X}$. Пространство $C^m(X)$ — подпространство $\text{Lip}^m(X)$, состоящее из функций f , таких, что $|f(x) - f(y)| = o(|x - y|^m)$ при $|x - y| \rightarrow 0$.

Пространство $\text{Lip}^m(\mathbb{R}^3)$ с полунормой $\|f\|_m = \|f\|_{m,\mathbb{R}^3}$ и пространство $C^m(\mathbb{R}^3)$ определяется аналогично. По теореме Х. Уитни⁴⁰ продолжим функцию $f \in \text{Lip}^m(X)$ до функции из $\text{Lip}^m(\mathbb{R}^3)$, имеющей компактный носитель и принадлежащей классу C^∞ вне X , так, что $\|f\|_m \leq A\|f\|_{m,X}$ и $A \geq 1$ — абсолютная постоянная (при этом $f \in C^m(X)$ продолжается до функции из $C^m(\mathbb{R}^3)$).

Пусть $h_m(X) = C^m(X) \cap \{f|_X : \Delta f = 0 \text{ в } X^o\}$, $H_m(X)$ — замыкание в $C^m(X)$ множества функций, гармонических в окрестностях X .

Критерий принадлежности функций из $h_m(X)$ классу $H_m(X)$ установлен в [4]. В диссертации это теорема 4.1 из §4.1. Она близка по форме критерию равномерной приближаемости (теореме 3.1) с единственным отличием: вместо гармонической емкости используется $M^{1+m}(\cdot)$ — обхват по Хаусдорфу порядка $1 + m$. Напомним, что для ограниченного множества $U \subset \mathbb{R}^3$ и $t > 0$ имеем:

$$M^t(U) = \inf \sum_k (r_k)^t,$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям U не более, чем счетными наборами шаров B_k радиусов r_k .

Теорема 4.1 Пусть существуют постоянная $k \geq 1$ и функция $\epsilon(r) \searrow 0$ при $r \searrow 0$, такие, что для любого открытого шара $B = B(a, r)$ (где $a \in \mathbb{R}^3$ — центр, r — радиус) с границей ∂B выполнена оценка

$$\left| \frac{1}{\sigma(\partial B)} \int_{\partial B} f(x) d\sigma_x - \frac{1}{m(B)} \int_B f(x) dm_x \right| \leq \epsilon(r) r^{-1} M^{1+m}(kB \setminus X), \quad (6)$$

тогда $f \in H_m(X)$. Обратно, если $f \in H_m(X)$, то оценка (6) выполнена при $k = 1$.

В доказательстве теоремы 4.1 применяются схема А. Г. Витушкина,

⁴⁰Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, гл. 6, Теорема 3.

теорема Фростмана⁴¹ и специальная геометрическая конструкция §4.3.

Хотя формулировки теорем 4.1 и 3.1 близки, а схемы доказательств в ряде деталей совпадают, теорема 4.1 доказывается значительно проще и полностью конструктивно.

Напомним, что описание компактов X , таких, что $h_m(X) = H_m(X)$, получили⁴² Дж. Матеу и Дж. Оробич; по существу, это частный случай теоремы 4.1. Заметим, что в указанной работе (в отличие от доказательства теоремы 4.1) используются двойственные аргументы.

Теоремы 3.1 и 4.1, в сочетании с результатами работ П. В. Парамонова, Дж. Вердеры и А. Г. О'Фаррелла дают решение задачи о приближении индивидуальных гармонических функций в пространствах Липшица C^m при всех $m \geq 0$. Случай $m = 1$ изучен П. В. Парамоновым⁴³ в терминах гармонической C^1 -емкости, случаи C^m при $1 < m < 2$ и целых $m \geq 2$ — Дж. Вердерой⁴⁴; при остальных m — А. Г. О'Фарреллом⁴⁵.

Автор искренне благодарен профессору Петру Владимировичу Парамонову за постановку ряда задач, внимание к результатам и многочисленные рекомендации по улучшению работ, М.Б. Балку, Е. П. Долженко, М.С. Мельникову, В.П. Хавину, К.Ю. Федоровскому и всем коллегам из Автономного университета Барселоны — за многолетнее плодотворное сотрудничество.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] Мазалов М.Я. Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений // Матем. сборник. 2008. Т. 199. №1, С. 15–46.
- [2] Мазалов М.Я. О равномерных приближениях бианалитическими функциями на произвольных компактах в $\mathbb{C}$ // Матем. сборник. 2004. Т. 195. №5, С. 79–102.

⁴¹Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971, гл. 2.

⁴²Mateu J., Orobitg J. Lipschitz approximation by harmonic functions and some applications to spectral synthesis // Indiana Univ. Math. Journ. 1990. V. 39, P. 703–736.

⁴³см. сноску ⁷ на с. 3.

⁴⁴Verdera J. C^m approximation by solutions of elliptic equations, and Calderon-Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55, P. 157–187.

⁴⁵O'Farrell A.G. Metaharmonic approximation in Lipschitz norms // Proc. Roy. Irish Acad. 1975. V. 75A, P. 317–330.

- [3] Мазалов М.Я. Критерий равномерной приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^3$ // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2012. Т. 279, С. 120–165.
- [4] Мазалов М.Я. Критерий приближаемости гармоническими функциями в пространствах Липшица // Записки научных семинаров ПОМИ. 2012. Т. 401, С. 144–171.
- [5] Мазалов М.Я. О задаче Дирихле для полианалитических функций // Матем. сборник. 2009. Т. 200. №10, С. 59–80.
- [6] Мазалов М.Я. Равномерное приближение функций, непрерывных на произвольном компакте в $\mathbb{C}$ и аналитических внутри компакта, функциями, бианалитическими в его окрестности // Матем. заметки. 2001. Т. 69. №2, С. 245–261.
- [7] Мазалов М.Я. Пример непостоянной бианалитической функции, обращающейся в нуль всюду на нигде не аналитической границе // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 4, С. 629–632.
- [8] Мазалов М.Я. О задаче равномерного приближения гармонических функций // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. №4, С. 136–178.
- [9] Мазалов М.Я. О равномерном приближении гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^3$ // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Т. 389, С. 162–190.