МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Каримов Умед Хилолович

К РЕШЕНИЮ ОБОБЩЁННОЙ ПРОБЛЕМЫ АЛЕКСАНДРОВА-ЛЕФШЕЦА-БЕГЛЯ

01.01.04 - геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва - 2013

Работа выполнена в Институте математики
АН Республики Таджикистан

Официальные оппоненты: Щепин Евгений Витальевич,
доктор физико–математических наук,
член-корреспондент РАН,
главный научный сотрудник ФГБУН
"Математический институт
имени В. А. Стеклова РАН ",

Богатый Семеон Антонович,
доктор физико–математических наук,
профессор механико-математического
факультета ФГБОУ ВПО "МГУ
имени М.В. Ломоносова",

Чернавский Алексей Викторович,
доктор физико–математических наук,
главный научный сотрудник ФГБУН
"Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича РАН"

Ведущая организация ГБОУ ВПО "Московский городской
педагогический университет"

Защита диссертации состоится 6 декабря 2013 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 6 ноября 2013 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Проблемы, обсуждаемые и решаемые в диссертации, являются предметом комбинаторной топологии общих пространств - пространств со сложной, чаще всего с локально не полиэдральной структурой и с произвольными непрерывными отображениями.

Ценные научные результаты очень часто получаются на стыке противоречий, понимаемых в широком смысле этого слова. Одним из таких противоречий в математике является противоречие между непрерывностью и дискретностью. Такие "противоречия"возникают при построении естественных отображений из топологии в алгебру. Топологическим пространствам того или иного класса естественно сопоставляются различные алгебраические объекты: группы (ко)-гомологий, гомотопические группы, кольца непрерывных функций и т. д. Естественные отображения не обязательно функториальны, например, каждому пространству естественно сопоставить группу его автогомеоморфизмов и это сопоставление не функториально. Как известно, отображение естественно, если оно объективно. Такие отображения строятся обычно несколькими математиками независимо - либо параллельно, либо последовательно. Достаточно упомянуть группы когомологий Александера-Спеньера-Колмогорова, гомологии Стинрода-Ситникова, гомологии Бореля-Мура. Гомотопические группы были построены Пуанкаре (в размерности 1) и Гуревичем. Топологическим пространствам естественно сопоставляются также дискретные числовые инварианты: Эйлерова характеристика пространства, число Люстерника-Шнирельмана, различные размерности, которых в настоящее время известно достаточно много, в том числе такие, как размерности Менгера-Урыссона, Лебега-Чеха, трансфинитные размерности и другие кардинальнозначные инварианты (теснота, вес, калибр, число Суслина и т.д.).

Топологическим пространствам естественно сопоставляются дискретные инварианты другого типа: *нервы* покрытий. Нерв покрытия по существу представляет собой "схему пересечений" элементов покрытий, это симплициальный комплекс, дискретный объект, который может быть задан матрицами инцидентности.

Часто в математике приходится восстанавливать процесс, объект или его свойства по данной информации о них. По *нерву* некоторого специального покрытия любого компактного метрического пространства можно полностью восстановить топологию этого пространства.

Известная теорема П.С. Александрова[1] утверждает, что любой $n-$мерный компакт может быть произвольно близко приближен $n-$мерным конечным полиэдром (кусочно-линейным пространством) и не может быть близко приближен полиэдром меньшей размерности. Эти полиэдры являются телами *нервов* некоторых покрытий.

Всё это говорит о том, что нервы покрытий играют большую роль в комбинаторной топологии. Нервы конечных покрытий были определены П.С. Александровым в 1927 году.

Каждому целому неотрицательному числу r и компакту F П.С. Александров[2] и С. Лефшец[3] сопоставили числа $N^r(F)$ и $p^r(F)$, соответственно. Для конечномерного компакта F размерности m П.С. Александров определил также число, которое обозначим символом $N_r(F)$[4]. Число $N^r(F)$ определяется как такое наименьшее целое число N, что для произвольного положительного числа ε существует конечное ε-покрытие компакта F, r-е число Бетти нерва (а это конечный комплекс и для них число Бетти было определено ещё А. Пуанкаре) которого есть N. Если такого числа ε не существует, то полагают $N^r(F) = \infty$. Число $p^r(F)$ равно максимальному числу линейно независимых элементов r-мерной группы гомологии Виеториса с коэффициентами в поле рациональных чисел. Число $N_r(F)$ определяется аналогично $N^r(F)$ с той лишь разницей, что рассматриваются покрытия кратности $m = \dim F + 1$.

Так как класс всех конечных покрытий шире класса конечных покрытий данного фиксированного порядка, то $N_r(F) \geq N^r(F)$. Так как ранг обратного предела векторных пространств данного фиксированного ранга n не превосходит n, то $N^r(F) \geq p^r(F)$ (рассматриваются гомологии с коэффициентами в поле рациональных чисел, а такие гомологии являются векторными пространствами над полем рациональных чисел).

П.С. Александров[2] в работе 1934 года отметил, что вопрос о равенстве чисел $N^r(F)$ и $p^r(F)$ открыт. С. Лефшец[3] в работе, опубликованной в 1928 году, на стр. 232 пишет, что проблема эквивалентности различных обобщений чисел Бетти на произвольные компакты представляет интерес.

В 1942 году Э. Бегль[5] доказал, что если X $n-$гомологически локально связное пространство, то группы гомологии $H_q(X; \mathcal{G})$, $n \geq q$, могут быть

---

[1] *Aleksandroff P. S.* Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung // Math. Ann. –1928.–V.98.–P.617–636.

[2] *Aleksandroff P. S.* Bettische zahlen und $\varepsilon-$Abbildungen // Fund. Math.–1934.–V.22. – P. 17-20.

[3] *Lefshets S.* Closed point-sets on a manifold // Ann. Math. –1928.–V.29.–P. 232–254.

[4] *Aleksandroff P. S.* Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque // C.r.Acad.Sci.Paris–1927.–V.184. – P. 317-320.

[5] *Begle E. G.* Locally connected spaces and generalised manifolds // Amer. J. Math. –1942.–V.64.–P. 553–574.

мономорфно отображены в группу гомологии нерва мелкого покрытия.

В 1949 году С. Эйленберг[6] опубликовал список проблем, предложенных участниками топологической конференции, посвященной 200-летию Принстонского Университета. Пятая проблема из этого списка принадлежит Э. Беглю, которую на современном языке можно сформулировать следующим образом:

Проблема. *Пусть $S-$ компактное метрическое пространство и $\mathcal{U}-$ его конечное открытое покрытие. Для любого натурального числа n имеется естественный гомоморфизм гомологий Чеха пространства S в гомологии нерва покрытия $\mathcal{N}(\mathcal{U})$. Верно ли, что для любого абсолютного окрестностного ретракта существует конфинальная система открытых покрытий, для которых соответствующие гомоморфизмы являются изоморфизмами?*

Следующая проблема обобщает упомянутые вопросы П.С. Александрова, С. Лефшеца и Э. Бегля:

Обобщённая проблема Александрова-Лефшеца-Бегля: *Верно ли, что для $n-$мерного когомологически локально связного компакта (ANR-а) F и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое покрытие $\mathcal{U}$ кратности $n+1$ и мелкости ε такое, что гомоморфизмы $\check{H}^r(\mathcal{N}(\mathcal{U})) \to \check{H}^r(F)$ при всех r, порождённые естественным отображением пространства F в нерв покрытия $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, являются изоморфизмами?*

Если ответ на сформулированную проблему положителен, то есть когомологии соответствующих пространств и нервов соответствующих покрытий изоморфны, то, естественно, и числа, определённые П.С. Александровым и С. Лефшецем, будут одинаковыми.

Диссертация посвящена решению вопросов, поставленных более 50 лет тому назад и полностью не решённых до настоящего времени, и поэтому тема работы актуальна.

Цель и задачи исследования.

Цель работы состоит в том, чтобы решить Обобщённую проблему Александрова-Лефшеца-Бегля в классе когомологически локально связных компактов и наметить новые направления исследований задач для полного решения проблемы в классе абсолютных окрестностных ретрактов.

Обобщённая проблема Александрова-Лефшеца-Бегля не решена в общем случае и ответ на вопрос не известен, поэтому общая стратегия состоит в двух подходах:

[6] *Eilenberg S.* On the problems of topology // Ann. Math.–1949.–V.50.–P. 246–280.

1. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ. Попытаться найти условия, при которых $n-$мерный компактный ANR X обладает сколь угодно мелким покрытием кратности $n+1$, нерв которого гомотопически эквивалентен X.

2. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ. Попытаться получить контрпример к проблеме, построить $n-$мерный компактный AR, все мелкие покрытия кратности $n+1$ которого цикличны.

Как известно, при решении сложных задач, которые не поддаются решению, бывает полезным решать сначала приближённые, упрощённые задачи. Это достигается либо добавлением, либо удалением некоторых условий, вообще говоря, некоторой переформулировкой условий задач. И в диссертации неоднократно для решения вышеупомянутой проблемы применяется метод частичного получения ответов при тех или иных дополнительных предположениях и ограничениях. Все задачи распадаются на три круга задач:

1. Задачи, связанные с изучением топологически тривиальных в том или ином смысле пространств (ацикличность, асферичность, клеточноподобность).

2. Задачи, связанные с исследованиями покрытий пространств.

3. Задачи, связанные с исследованиями нервов покрытий ацикличных пространств.

Вопросы из первого круга задач, изученные в диссертации, следующие:

- Существует ли нестягиваемый клеточноподобный компакт, надстройка над которым стягиваема? (Проблема 677 Бествины-Эдвардса).[7]

- Доказать, что факторпространство Евклидова пространства по букету двух континуумов Кейса-Чемберлина является обобщённым ацикличным многообразием, которое не является гомологически локально связным в сингулярных гомологиях.

- Доказать, что существует клеточноподобный односвязный неасферичный 2-мерный континуум Пеано.

- Доказать, что существует гомотопически нетривиальный континуум Пеано, все гомотопические и гомологические группы которого тривиальны.

Ко второму классу задач относятся следующие:

[7] *Mill J. van, Reed G. M. Eds.* Open Problems in Topology. North-Holland, Amsterdam, 1990.

- Доказать, что компактные метрические пространства гомеоморфны в том и только в том случае, когда они обладают базами тонких покрытий, нервы которых симплициально изоморфны.

- Привести критерий тривиальноси шейпа компактов в терминах нервов открытых покрытий.

- Доказать, что, если $X \subset \mathbb{R}^2$ есть объединение двух односвязных компактных подмножеств $X_1, X_2 \subset X$ и если пересечение $X_1 \cap X_2$ линейно связно и клеточно, то X односвязное пространство.

- Доказать, что для любого натурального числа n существует семейство $\mathcal{F} = \{X_i\}_{i=0}^n$ односвязных компактных подмножеств $\mathbb{R}^2$ такое, что (см.рис. 2 при $n = 1$):

  1. Объединения $\cup_{k=0}^l X_{i_k}$ при всех $l < n$ и пересечения $\cap_{k=0}^l X_{i_k}$ при $l \leq n$ односвязны.
  2. Пересечение $\cap_{i=0}^n X_i$ непусто.
  3. Объединение $\cup_{i=0}^n X_i$ не односвязно.

  В частности, доказать, что существует плоский компакт и его покрытие из двух односвязных континуумов, пересечение которых односвязно, а объединение неодносвязно.

- Восполнить пробел в одном из вариантов Топологической теоремы Хелли, на который указал в своей работе С.А. Богатый [8] (стр. 399). Доказать следующее утверждение: Семейство $\{X_i\}_{i=0}^2$ трёх односвязных компактных подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет односвязное пересечение, если пересечения $X_i \cap X_j,\ \ i, j \in \{0, 1, 2\}$ любых двух из них линейно связны и пересечение $\cap_{i=0}^2 X_i$ всех трёх членов непусто.

К третьему кругу задач относятся следующие:

- Показать, что существуют ацикличные в гомологиях Чеха подпространства плоскости, все мелкие покрытия которых цикличны.

- Построить 1-мерный ацикличный в когомологиях Чеха компакт, числа Бетти всех мелких покрытий которого положительны. То есть для некоторых 1-мерных компактов $N^1 > p^1$.

[8] *Богатый С. А.* Топологическая теорема Хелли //Фундамент. и прикл. матем., –2002.– Т. 8: 365 – 405; http://mech.math.msu.su/ fpm/rus/k02/k022/k02204h.htm

- Доказать, что существует 2-мерный клеточноподобный когомологически-локально связный компакт, все мелкие покрытия кратности 3 которого цикличны.

- Дать альтернативное доказательство того, что все компактные абсолютные окрестностные ретракты обладают сколь угодно мелкими покрытиями, нервы которых гомотопически им эквивалентны. Отсюда следует, что для ANR пространств $N^n = p^n$. В то же время вопрос о равенстве $N_n = p^n$ для ANR пространств остается открытым.

Методика исследования.

Основными методами исследований являются методы геометрической и алгебраической топологии, а также методы комбинаторной теории групп: Теория обратных пределов; Теория когомологий Чеха; Приведённая комплексная $\widetilde{K}^*_{\mathbb{C}}$–теория; Метод Дж. Красинкевича построения абсолютных окрестностных ретрактов; Теория шейпов; Теория размерности; Коммутаторное исчисление комбинаторной теории групп (соотношения коммутаторных длин элементов групп), функция А. Ремтуллы; Теорема Зейферта - ван Кампена; Метод модификации открытых покрытий, разработанный диссертантом и изложенный в главе 2; Теорема А. Застрова об асферичности подмножеств плоскости; Триангуляционная теорема Т. Чепмэна и теорема Р. Эдвардса в теории бесконечномерных многообразий.

Научная новизна.

- Доказано, что существует 2-мерный клеточноподобный когомологически локально связный компакт X, все мелкие покрытия кратности 3 которого цикличны. В частности, ацикличный компакт X не допускает $\varepsilon-$отображений при всех достаточно малых ε на 2-мерные ацикличные полиэдры. Это ответ на Обобщённую проблему Александрова-Лефшеца-Бегля в классе когомологически локально связных пространств.

- Доказано, что существует 1-мерный ацикличный в когомологиях Чеха (и, следовательно, в гомологиях Чеха) компакт, числа Бетти всех мелких покрытий которого ненулевые. То есть, вообще говоря, $N^1 > p^1$. Это ответ на вопрос П.С. Александрова[2], поставленный в 1934 году.

- Доказано, что существует плоский компакт и его покрытие из двух односвязных континуумов, пересечение которых односвязно, а объединение неодносвязно (это ответ на вопрос С.А. Богатого[8]).

- Доказано, что компактные метрические пространства гомеоморфны в том и только в том случае, когда они обладают тонкими базами, нервы которых симплициально изоморфны.

- Доказано, что шейп компакта тривиален в том и только в том случае, когда он обладает произвольно мелкими открытыми покрытиями, нервы которых гомеоморфны конечномерным кубам.

- Доказано, что существует гомотопически не тривиальный континуум Пеано, все гомотопические и гомологические группы которого тривиальны.

- Доказано, что существует клеточноподобный односвязный неасферичный 2-мерный континуум Пеано.

- Построен нестягиваемый клеточноподобный когомологически локально связный компакт, приведённая надстройка над которым является стягиваемым абсолютным окрестностным ретрактом.

- Доказано, что существует нестягиваемый клеточноподобный компакт, надстройка над которым стягиваема. Это решение проблемы Бествины-Эдвардса.

- Предложен метод построения обобщённых ацикличных когомологических многообразий, которые не являются гомологически локально связными.

Результаты, изложенные в диссертации, в утвердительной форме упомянуты в работах Давермана-Дранишникова, Тимчатина-Валова, П. Минца и ещё в ряде работ ("индекс цитирования" включает более 40 работ).

В частности, Р. Даверман и А. Дранишников[9] пишут: "At one time we thought perhaps every 2-dimensional compact metric space which is $k - UV$ for all $k > 2$ could be expressed as an inverse limit of aspherical 2-dimensional polyhedra. However, the proof of Karimov's result shows this is false".

В работе Э. Пеарл[10], на стр. 62 отмечено: "Problem 677. U.H. Karimov and D. Repovš showed that there exists noncontractible cell-like compactum whose suspension is contractible. Their example is 3-dimensional, so they asked whether there exist 1- or 2-dimensional counterexamples.". Проблема 677 - это проблема, поставленная М. Бествиной и Р.Д. Эдвардсом в 1990 году.

[9] *Daverman R. J., Dranishnikov A. N.* Cell-like maps and aspherical compacta // Illinois. J. Math. –1996.–V.40.–P. 77–90.

[10] *Pearl E.* Open problems in topology // Topol. Appl. –2004.–V.136.–P. 37–85.

О. Богопольский и А. Застров[11] пишут: "...we investigate Karimov's space K .... We show, that $H_1(K)$ is uncountable, and that each element of $H_1(K)$ can be represented as an infinite commutator product".

В работе А. Бобои, Б. Машахи, Х. Миребрахими[12] отмечено: "Also they (Karimov, Repovš) construct a Peano continuum with trivial homotopy, homology (singular, Čech and Borel-Moore), cohomology (singular and Čech) and finite dimensional Hawaiian groups, which is not contractible and particularly has nontrivial infinite dimensional Hawaiian group".

Практическая и теоретическая значимость.

Результаты, изложенные в работе, имеют теоретической характер и открывают новые перспективы для исследований топологии пространств, имеющих сложную локальную структуру. Они могут быть применены при чтении специальных курсов и в специальных семинарах по топологии для студентов и аспирантов высших учебных заведений.

Апробация результатов диссертации.

Результаты работы докладывались на семинарах в МГУ имени М.В. Ломоносова (на общемосковском топологическом семинаре имени П.С. Александрова кафедры общей топологии и геометрии, на семинарах профессоров С.А. Богатого, Е.Г. Скляренко – многократно на протяжении 1975–2009 годов, на семинаре профессора В.В. Федорчука), в Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН (на семинаре профессора М.А. Штанько, 1985 год), в Институте математики Университета Любляны на семинаре профессора Д. Реповша (многократно на протяжении 1997–2013 годов, см. например www.pef.uni-lj.si/sgt), в Институте математики Загреба на семинаре профессора С. Мардешича (сентябрь 2008 и 2010 годов), на семинарах Института математики АН Республики Таджикистан (многократно, в том числе и в 2012 году).

Результаты диссертации обсуждались также на Международных конференциях в Баку (1987 г.), Киеве (1995 г.), Москве (1996 г.), Йокогаме (1999 г.), Киото (2006 г.).

Публикации.

Основное содержание диссертации опубликовано в 20 работах, входящих в список изданий, рекомендуемых ВАК России для опубликования научных результатов диссертации на соискание учёной степени доктора наук.

---

[11] *Bogopolski O., Zastrow A.* The word problem for some uncountable groups given by countable words // Topol. Appl. –2012.–V.159.–569–586

[12] *Babaee A., Mashayekhy B., Mirebrahimi H.* On Hawaiian groups of some topological spaces // Topol. Appl.–2012.–V.159.–P. 2043–2051.

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

- Существует 2-мерный клеточноподобный когомологически локально связный компакт X, все мелкие покрытия кратности 3 которого цикличны. В частности, ацикличный компакт X не допускает $\varepsilon-$отображений при всех достаточно малых ε на 2-мерные ацикличные полиэдры. Это ответ на Обобщённую проблему Александрова-Лефшеца-Бегля в классе когомологически локально связных пространств.

- Существует 1-мерный ацикличный в когомологиях Чеха (и, следовательно, в гомологиях Чеха) компакт, числа Бетти всех мелких покрытий которого не нулевые. То есть, вообще говоря, число Александрова больше числа Лефшеца, $N^1 > p^1$. Это ответ на вопрос П.С. Александрова[4].

- Существует плоский компакт и его покрытие из двух односвязных континуумов, пересечение которых односвязно, а объединение неодносвязно (это ответ на вопрос С.А. Богатого[8]).

- Компактные метрические пространства гомеоморфны в том и только в том случае, когда они обладают тонкими базами, нервы которых симплициально изоморфны.

- Доказано, что шейп компакта тривиален в том и только в том случае, когда он обладает произвольно мелкими открытыми покрытиями, нервы которых гомеоморфны конечномерным кубам.

- Существует гомотопически не тривиальный континуум Пеано, все гомотопические и гомологические группы которого тривиальны.

- Существует клеточноподобный односвязный неасферичный 2-мерный континуум Пеано.

- Построен нестягиваемый клеточноподобный когомологически локально связный компакт, приведённая надстройка над которым является стягиваемым абсолютным окрестностным ретрактом.

- Существует клеточноподобный нестягиваемый компакт, надстройка над которым стягиваема. Это решение проблемы Бествины-Эдвардса.

- Существует обобщённое ацикличное когомологическое многообразие, которое не является гомологически локально связным пространством.

Структура и объём диссертации.

Диссертация включает в себя оглавление, введение, три главы, заключение, библиографический список, насчитывающий 158 наименований. Для обозначения теорем, лемм, предложений, определений, проблем, замечаний используется тройная нумерация: первая цифра – номер главы, вторая – номер параграфа, третья – текущий номер утверждения.

Полный объём диссертации составляет 118 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** формулируется цель исследования, обосновывается актуальность темы работы, описываются методика и техника исследования, указывается научная новизна, их практическая и теоретическая значимость. Формулируются положения, выносимые на защиту.

В **Первой главе** изучаются тривиальные относительно тех или иных инвариантов пространства: ацикличные, асферичные, клеточноподобные пространства.

В первом параграфе первой главы строится 2-мерный нестягиваемый компакт тривиального шейпа, надстройка над которым нестягиваема, а приведённая надстройка является абсолютным ретрактом. Доказана

Теорема. *Если надстройка $\sum X$ над компактом X стягиваема, то X слабо стягиваемо, то есть для любой точки $x_0 \in X$, существует окрестность V точки x_0, такая, что включение $V \subset X$ гомотопически тривиально.*

Так, например, если для каждого $i \in \mathbb{N}$, P_i - нестягиваемый ацикличный полиэдр и $Y = \bigvee_{i=1}^{\infty} P_i$ - компактный букет пространств P_i, то, хотя все надстройки $\sum P_i$ стягиваемы, $\sum Y$ нестягиваемо согласно этой Теореме.

Во втором параграфе строятся примеры 3-х мерных несягиваемых компактов тривиального шейпа (клеточноподобных компактов), надстройки над которыми стягиваемы. Это ответ на вопрос Бествины-Эдвардса.

В третьем параграфе усиливается результат Н. Шриханде и С. Арментраута. Доказывается, что фундаментальная группа ацикличного в когомологиях Чеха факторпространства $\mathbb{R}^3$ по континууму Кейса-Чемберлина несчётна (Н. Шриханде и С. Арментраут доказали, что эта группа нетривиальна).

В диссертации показано, что это факторпространство гомотопически эквивалентно одноточечной компактификации 2-мерного полиэдра.

В четвертом параграфе первой главы строится 2-мерный односвязный клеточноподобный континуум Пеано, в которое можно существенно отобразить 2-мерную сферу. Позже, в нашей совместной работе с К. Эда и Д. Реповшем [20] построение было упрощено. Это компактное пространство представляет собой счётное объединение непересекающихся конусов фиксированной высоты, приклеенных к квадрату. На рис. 1 схематически представлено это пространство.

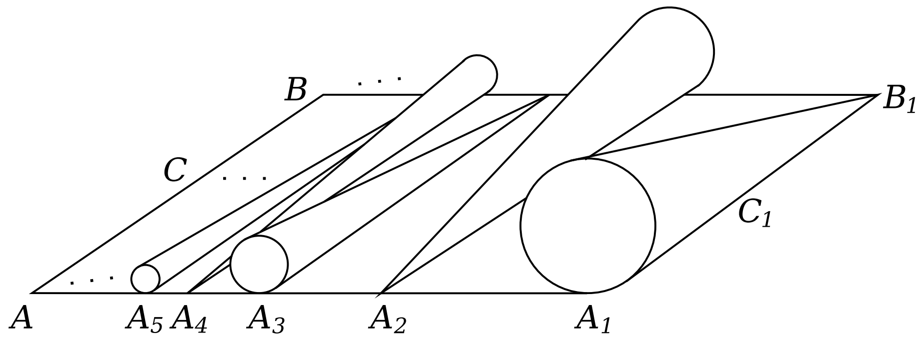

Рис. 1.

В пятом параграфе построен нестягиваемый континуум Пеано, у которого все гомотопические, гомологические и когомологические группы тривиальны. Этот континуум является одноточечной компактификацией полиэдра и является гомологически локально связным в сингулярных гомологиях. Все классические группы гомологий (сингулярные, Чеховские, Бореля-Мура), все классические группы когомологий (сингулярные, Чеховские, пучковые) и все конечномерные Гавайские группы континуума X тривиальны.

В шестом параграфе предложен новый метод построения когомологических многообразий, которые не являются гомологически локально связными.

Во **Второй главе** исследуются покрытия топологических пространств.

Первый параграф этой главы вводный, даются основные определения и леммы. В частности, покрытие (не обязательно открытое) топологического пространства называется *тонким*, если замыкания любых двух непересекающихся элементов не пересекаются. Открытая база называется *тонкой базой*, если это тонкое покрытие.

Приводится фундаментальное определение комбинаторной топологии: нерва покрытия. Определение нерва конечного покрытия было дано П.С. Александровым в 1927 году, а истоки этого понятия содержатся в работе

А. Пуанкаре[13], опубликованной в 1899 году, в работах Л. Брауэра[14] и О. Веблена[15]. Нервы бесконечных покрытий были введены в топологию К.Х. Даукером[16].

Нерв покрытия – это симплициальный комплекс, грубо говоря, представляющий собой "схему пересечений элементов покрытия". Симплициальным изоморфизмом комплекса K в L называется биективное отображение $\mathcal{F}$ множества K в L, при котором вершинам K соответствуют вершины L, а граням произвольного симплекса Δ соответствуют грани симплекса $\mathcal{F}(\Delta)$.

Во втором параграфе второй главы приводится критерий гомеоморфности компактных метрических пространств.

Доказано, что всякое метрическое пространство обладает тонкой базой.

Доказано, что два компакта гомеоморфны в том и только в том случае, когда они обладают тонкими базами, нервы которых симплициально изоморфны.

В третьем параграфе дан критерий тривиальности шейпов компактов в терминах нервов открытых покрытий. Доказана теорема:

Теорема. *Всякий метризуемый $k-$мерный компакт X тривиального шейпа допускает сколь угодно мелкое покрытие, пространство нерва которого гомеоморфно $(2k+1)-$мерному кубу. Бесконечномерный компакт тривиального шейпа допускает сколь угодно мелкое покрытие, пространство нерва которого гомеоморфно конечномерному кубу.*

В частности, всякий стягиваемый компакт обладает сколь угодно мелким покрытием, нерв которого стягиваем.

В четвертом параграфе изучаются покрытия плоских компактов замкнутыми односвязными множествами, в частности, доказаны следующие теоремы, которые дают ответ на вопросы С.А. Богатого [17].

Теорема. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ есть объединение двух односвязных компактных подмножеств $X_1, X_2 \subset X$ и пусть пересечение $X_1 \cap X_2$ линейно связно и клеточно. Тогда $X-$ односвязное пространство.*

---

[13] *Poincare H.* Complement a l'analysis situs // Rendic. Circ. Mat. Palermo. –1899.–V.13.–P. 314–321.

[14] *Brouwer L. E. J.* Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve // Math. Ann–1912.–V.72.–S.422–425.

[15] *Veblen O.* Analysis Situs. Cambridge Colloquium–1916.

[16] *Dowker C. H.* Čech cohomology theory and the axioms // Ann. of Math.–1950.–V.51.–P. 278–292.

[17] *Богатый С. А.* Топологическая теорема Хелли //Фундамент. и прикл. матем., –2002.– Т. 8: 365 – 405; http://mech.math.msu.su/ fpm/rus/k02/k022/k02204h.htm

Теорема. *Для любого натурального числа* n *существует семейство* $\mathcal{F} = \{X_i\}_{i=0}^n$ *односвязных компактных подмножеств* $\mathbb{R}^2$, *такое, что (см. рис. 2 при* $n = 1$*):*

1. *Объединения* $\cup_{k=0}^l X_{i_k}$ *при всех* $l < n$ *и пересечения* $\cap_{k=0}^l X_{i_k}$ *при* $l \leq n$ *односвязны.*
2. *Пересечение* $\cap_{i=0}^n X_i$ *непусто.*
3. *Объединение* $\cup_{i=0}^n X_i$ *неодносвязно.*

В частности, при $n = 2$ вытекает следующий результат:

Теорема. *Существуют два односвязных подпространства* $\mathbb{R}^2$, *пересечение которых односвязно, а объединение не односвязно,–*

это контрпример к Теореме 1 работы М. Брин[18] - даже, если учесть, что наше определение односвязности слегка отличается от определения, данного в статье М. Брин и к Гипотезе 1 С.А. Богатого[17].

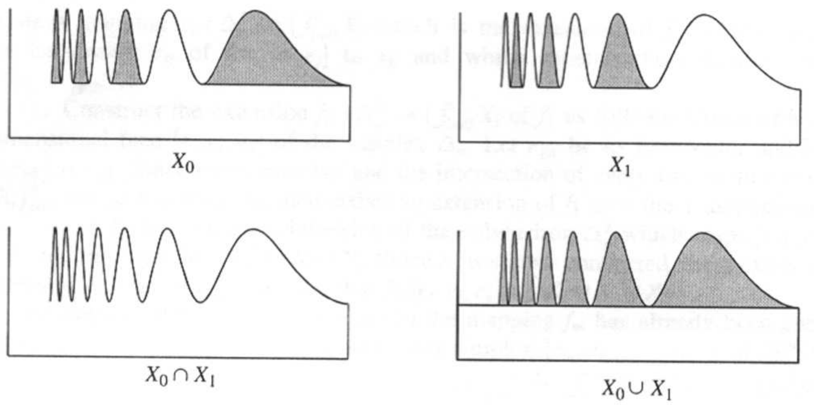

Рис. 2.

Ответ на Гипотезу 4 С.А. Богатого[17] (стр. 400): *Если в семействе плоских односвязных континуумов объединение любых двух и любых трех континуумов односвязно, то и объединение всех континуумов односвязно* – следует из нашей Теоремы при $n \geq 3$.

Эти плоские компакты являются простыми примерами, показывающими, что без дополнительных предположений, даже в классе компактов, прямое обобщение Теоремы Зейферта-ван Кампена неверно (стандартные доказательства этого факта затруднительны - см., например, работу[19] и ссылки там же).

[18] *Breen M.* A Helly-type theorem for intersections of compact connected sets in the plan // Geom. dedicata–1998.–V.71.–P. 111–117.

[19] *Brown R.* Topology: A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types and the Fundamental Groupoid // Ellis Horwood, West Sussex–1988.

Положительный ответ на Гипотезу 3 С.А. Богатого вытекает из нашего следующего результата:

Теорема. *Если в семействе плоских односвязных компактных или открытых подпространств* $\mathcal{F} = \{X_i\}_{i=0}^n \subset \mathbb{R}^2$ *пересечение любых двух его элементов линейно связно и пересечение любых трех непусто, тогда пересечение всех элементов семейства непусто* $\cap_{i=0}^n X_i \neq \emptyset$.

В пятом параграфе уточняется доказательство Топологической теоремы Хелли. Следующий классический результат принадлежит Э. Хелли:

Теорема. (*Топологическая теорема Хелли*). *Пусть* $\mathcal{K} = \{K_i\}_{i=0}^m$, $m \geq n$, *есть конечное семейство замкнутых подмножеств* n*-мерного Евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$, *такое, что пересечения* k *членов* $\mathcal{K}$ *есть сингулярная клетка, при* $k \leq n$, *и непусто, при* $k = n+1$. *Тогда пересечение* $\cap_{i=0}^m K_i$ *есть сингулярная клетка.*

Все известные доказательства Теоремы индуктивны и начальный шаг (то есть, когда $m = n = 2$) основывается на следующем Предложении:

Предложение А. *Семейство* $\{X_i\}_{i=0}^2$ *трёх односвязных компактных подмножеств плоскости* $\mathbb{R}^2$ *имеет односвязное пересечение, если пересечения* $X_i \cap X_j$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$ *любых двух из них линейно связны и пересечение* $\cap_{i=0}^2 X_i$ *всех трёх членов непусто.*

С.А. Богатый в выше упомянутой работе на стр. 399 отметил, что это утверждение нигде не доказано. Диссертантом в совместной работе с Д. Реповшем[20] была доказана сначала следующая теорема:

Теорема. *Семейство* $\{X_i\}_{i=0}^2$ *трёх односвязных компактных подмножеств плоскости* $\mathbb{R}^2$ *имеет клеточноподобно связное пересечение* $\cap_{i=0}^2 X_i$, *если пересечения* $X_i \cap X_j$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$, *любых двух его элементов линейно связно и пересечение* $\cap_{i=0}^2 X_i$ *всех членов непусто.*

Пространство X называется *клеточноподобно связным*, если для любых двух точек a и b существует клеточноподобный континуум C в X, такой, что $a,\ b \in C$.

Предложение "А" полностью было доказано Тимчатиным-Валовым и П. Минцем, которые привели доказательство нашей Гипотезы, сформулированной в работе[20].

Диссертантом дано альтернативное доказательство Предложения "А", которое основано на технике, разработанной в этой работе.

Третья глава посвящена изучению нервов покрытий специальных классов пространств.

[20] *Karimov U., Repovš D.* On the topological Helly theorem // Topol. Appl.–2006.–V.153.–P. 1614–1621.

В первом параграфе третьей главы построены ацикличные относительно гомологий Чеха подпространства плоскости, все мелкие покрытия которых цикличны. Первый пример такого пространства был построен в 1974 году, чуть позже было построено локально компактное подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$, обладающее аналогичными свойствами.

Соленоиды являются ацикличными в гомологиях Чеха (с коэффициентами в группе целых чисел) компактами в $\mathbb{R}^3$, все мелкие покрытия которых цикличны, так как когомологии Чеха всех соленоидов не тривиальны.

Во втором параграфе дается ответ на вопрос П.С. Александрова, поставленный им в 1934 году:

Теорема. *Существует 1-мерный компакт X, для которого $N^1(X)$ больше $p^1(X)$.*

В третьем параграфе решается обобщённая проблема Александрова-Лефшеца-Бегля в классе когомологически локально связных пространств. Доказана Теорема:

Теорема. *Существует двумерный, когомологически локально связный (clc) компакт, тривиального шейпа X и его открытое покрытие $\mathcal{U}$, такое, что приведённые гомологии нерва $N(\mathcal{V})$ любого открытого покрытия $\mathcal{V}$ кратности три, вписанного в $\mathcal{U}$, не тривиальны* ($\tilde{H}_*(N(\mathcal{V})) \neq 0$).

Основным результатом четвертого параграфа является следующая теорема:

Теорема. *Пусть A – монотонный неодноточечный ретракт связного компакта (X, ρ). Тогда мелкие покрытия X реализуются мелкими покрытиями пространства A.*

Из этой теоремы вытекает следствие:

Следствие. *Всякий компактный абсолютный окрестностный ретракт X обладает сколь угодно мелким покрытием, нерв которого гомотопически эквивалентен X.*

В пятом параграфе доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть Y - конечномерное неодноточечное пространство, являющееся $CE-$образом компактного связного ANR пространства X. Тогда для любого положительного числа ε существует ε-отображение* $g : Y \to X$, из которой вытекает следующий результат:

Следствие. *Пусть Y – конечномерное неодноточеное пространство, которое является CE-образом конечного $n-$ мерного полиэдра. Тогда для любого положительного числа ε существует ε-отображение Y на $n-$ мерный полиэдр, гомотопически эквивалентный Y.*

Пример. *Пусть Y - факторпространство куба $\mathbb{I}^3$ по любой содержащейся в нем дикой дуге. Тогда для любого ε существует $\varepsilon-$ отображение Y на $\mathbb{I}^3$, то есть существует сколь угодно мелкое открытое покрытие Y, нерв которого гомеоморфен $\mathbb{I}^3$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Результаты выполненных исследований дают основание утверждать, что в диссертации решена Обобщённая проблема Александрова-Лефшеца-Бегля в классе когомологически локально связных компактных пространств, доказано, что существует 2-мерный когомологически локально связный ацикличный компакт, все мелкие покрытия кратности 3 которого цикличны.

Вместе с тем, следует отметить, что проблема Александрова-Лефшеца-Бегля в классе ANR компактов остается открытой: Существует ли компактный конечномерный ANR X для которого $N_r(X) > p^r(X)$?

Эта проблема тесно связана со следующей проблемой, которая обобщает проблему К. Борсука о гомотопической эквивалентности компактных ANR конечным полиэдрам, решённую Дж. Вэстом, и теорему П.С. Александрова об аппроксимации $n-$мерных компкатов $n-$мерными конечными полиэдрами: Верно ли, что всякий $n-$мерный компактный ANR допускает произвольно мелкие $\varepsilon-$отображения на $n-$мерные конечные полиэдры, являющиеся гомотопическими эквивалентностями?

Следующие вопросы, сформулированные в диссертации, по-видимому, будут предметом дальнейших исследований в ближайшие годы. Почти все эти вопросы относятся к теории гомотопий континуумов Пеано. В настоящее время теория гомотопий достаточно хорошо разработана на категории пространств, имеющих гомотопический тип полиэдров, но на более широких категориях пространств, например на категории конечномерных пространств, являющихся одноточечными компактификациями бесконечных полиэдров, много естественных не решённых вопросов:

Верно ли, что слабая гомотопическая эквивалентность конечномерных континуумов Пеано (в частности, одноточечных компактификаций конечномерных бесконечных полиэдров) является гомотопической эквивалентностью?

Существует ли конечномерный континуум Пеано, все гомотопические группы которого тривиальны и который нестягиваем?

Существует ли конечномерный компакт, все гомотопические и когомологические группы которого тривиальны и который нестягиваем?

Существует ли конечномерное гомологически локально связное относительно сингулярных гомологий пространство, которое не является локально стягиваемым?

Существует ли нестягиваемый локально стягиваемый клеточноподобный компакт?

Существует ли нестягиваемый 1- или 2-мерный клеточноподобный компакт, надстройка над которым стягиваема?

Верно ли, что всякий $k-$мерный стягиваемый компакт обладает сколь угодно мелким покрытием кратности $k+1$ нерв которого стягиваем?

Существует ли нормальное пространство, в котором нет тонких баз?

В диссертации установлены некоторые соотношения между дискретными инвариантами топологических пространств, в частности, между числами Александрова и числами Лефшеца. Опыт работы над диссертацией позволяет утверждать, что в комбинаторной топологии по мере накопления знаний будут строится всё новые и новые дискретные инварианты тех или иных классов топологических пространств и выявляться взаимозависимости и соотношения между этими дискретными инвариантами, что, несомненно, углубит наше понимание свойств общих топологических пространств различных категорий.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ (из списка ВАК).

1. *Каримов У. Х.* Пример одномерного ацикличного в смысле когомологий Александрова-Чеха компакта, все достаточно мелкие покрытия которого цикличны // Успехи матем. наук.–1977.–Т. 32.–С.245–246.

2. *Каримов У. Х.* О трёх леммах комбинаторной теории групп // ДАН Тадж. ССР.–1986.–Т. 29.–С.191–192.

3. *Каримов У. Х.* Пример пространства тривиального шейпа, все мелкие открытые покрытия которого цикличны // ДАН СССР.–1986.–Т. 286.–С.531–534.

4. *Каримов У. Х.* Об одном критерии тривиальности шейпа компактного пространства // ДАН Республики Таджикистан–1990.–Т. 33.–С.9–12.

5. *Каримов У. Х.* Об аппроксимации полиэдрами некоторых пространств // ДАН Республики Таджикистан–1991.–Т. 34.–С.270–274.

6. *Каримов У. Х.* Числа Бетти и нервы покрытий компактов // ДАН Республики Таджикистан–1992.–Т. 35.–С.326–327.

7. *Karimov U., Repovš D.* A noncontractible cell-like compactum whose suspension is contractible // Indagationes Mathematicae–1999.–V.10:4.–P. 513–517. Формулировка и доказательство Теоремы 3.2 принадлежит диссертанту.

8. *Karimov U., Repovš D.* On suspensions of noncontractible compacta of trivial shape // Proc. Amer. Math. Soc.–1999.–V.127.–C.627–632. Утверждение Теорем 1.1 и 1.2 принадлежит диссертанту. Понятие плоской гомотопии введено и исследовано диссертантом.

9. *Karimov U., Repovš D.* On nerves of fine coverings // Publ. Math. Debrecen.–1999.–V.54.–P. 295–302. Понятие тонкой базы, формулировка и идеи доказательства Теорем 1.3, 1.4, 1, 5 принадлежат диссертанту.

10. *Eda K., Karimov U. H., Repovš D.* On homological local connectedness // Topol. Appl.–2002.–V.120.–P. 397–401. Постановка задачи, формулировка Теоремы 1.1, идея применения понятия коммутаторной длины элемента группы принадлежат диссертанту.

11. *Karimov U., Repovš D.* On the union of simply connected planar sets // Topol. Appl.–2002.–V.122.–P. 281–286. Теоремы 1.1 и 1.2 сформулированы и доказаны диссертантом.

12. *Karimov U., Repovš D., Zeljko M.* On the union and intersections of simply connected planar sets // Monatsh. für Math.–2005.–V.145.–P. 239–245. Формулировка и доказательство Теоремы 1.1 принадлежит диссертанту.

13. *Каримов У. Х., Реповш Д.* Гавайские группы топологических пространств // Успехи. Матем. Наук.–2006.–Т. 61.–С.185–186. Диссертанту принадлежит построение примера континуума Пеано, все гомотопические группы которого тривиальны, концепция Гавайской группы, формулировка Теоремы 1.

14. *Karimov U., Repovš D.* On the topological Helly theorem // Topol. Appl.–2006.–V.153.–P. 1614–1621. Леммы 2.1, 2.2, Предложение 2.3 сформулированы и доказаны диссертантом.

15. *Eda K., Karimov U. H., Repovš D.* On the fundamental groups of R^3 modulo the Case-Chamberlin continuum // Glasnik Matematicki.–2007.–V.42 (62).–P. 89–94. Постановка задачи, Лемма 3.1, формулировка Леммы 3.2, идея использования веса элемента в группе принадлежат диссертанту.

16. *Eda K., Karimov U. H., Repovš D.* A construction of noncontractible simply connected cell-like two-dimensional Peano continua // Fund. Math.–2007.–V.195.–P. 193–203. Диссертантом предложено для изучения пространство $SC(S^1)$. Применяется метод плоской гомотопии, разработанный диссертантом ранее. Доказана односвязность этого пространства.

17. *Karimov U., Repovš D.* Examples of cohomology manifolds which are not homologically locally connected // Topol. Appl.–2008.–V.155.–P. 1169–1174. Формулировка Теоремы 1.3, концепция и свойства коммутаторной длины принадлежат диссертанту.

18. *Eda K., Karimov U. H., Repovš D.* A nonaspherical cell-like 2-dimensional simply connected continuum and related constructions // Topol. Appl.–2009.–V.156.–P. 515–521. Диссертантом построено пространство $SC(S^1)$, которое изучается и модифицируется в этой работе. Следствие 3.2 на стр. 516 принадлежит диссертанту.

19. *Karimov U., Repovš D.* On noncontractible compacta with trivial homology and homotopy groups // Proc. Amer. Math. Soc.–2010.–V.138.–P. 1525–1531. Формулировка и основные идеи доказательства Теоремы 3.1 принадлежат диссертанту. Понятие Гавайской конечномерной и бесконечно-мерной группы и проблема 5.1 также принадлежат диссертанту.

20. *Eda K., Karimov U. H., Repovš D.* On 2-dimensional nonaspherical cell-like Peano continua: A simplified approach // Mediterr. J. Math. –2013.–V. 10.–P. 519-528. Диссертантом построен двумерный континуум Пеано $AC(S^1)$. Доказано, что он не асферичен, односвязен и имеет тривиальный шейп. Диссертанту принадлежит концепция плоской гомотопии, коммутаторной длины. Доказаны Теоремы 3.2 и 3.3 в случае когда $X = S^1$.