МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн

So-множества и их приложения

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Российский университет дружбы народов» на кафедре высшей математики.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, профессор
Клюшин Владимир Леонидович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Геворкян Павел Самвелович (Образовательное учреждение профсоюзов ВПО «Академия труда и социальных отношений, заведующий кафедрой)
кандидат физико-математических наук, доцент
Перегудов Станислав Александрович (ФГБОУ ВПО «Государственный университет управления»).

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Защита диссертации состоится 27 сентября 2013 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: РФ,119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени . М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени. М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан 27 августа 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А.О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теоретико-множественная топология есть прежде всего теория топологических пространств и непрерывных отображений. Классификация топологических пространств основана, как известно, на возможности вписать в произвольное открытое покрытие покрытий того или иного типа, состоящих из открытых множеств, а непрерывность отображения характеризуется тем, что прообраз открытого множества открыт. Интересные и содержательные обобщения известных и хорошо изученных пространств и отображений возможны, в частности, если заменять открытые множества обобщенно-открытыми множествами того или иного типа.

В диссертации изучается понятие просто-открытого множества и основанные на нем обобщения основных классов топологических пространств и непрерывных отображений.

Понятие просто-открытого множества (simply-open set) ввел Н.Бисвас[1]. В данной работе мы для краткости называем такие множества so-множествами. Подмножество топологического пространства называется so-множеством, если оно есть объединение открытого и нигде не плотного множеств. Ранее Н.Левин[2] ввел понятие полуоткрытого множества – это множество, содержащее открытое множество и содержащееся в замыкании этого открнытого множества. Очевидно, всякое полуоткрытое множество является so-множеством.

[1] Biswas N. On some mappings in topological spaces. Bull. Cal. Math. Soc. 61(1969). 127-135.

[2] Levine N. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces. Amer. Math. Monthly. 70(1963), 36-41.

Ряд интересных результатов об sc-отображениях[3], основанных на so-множествах и квазинепрерывных отображениях[4], основанных на полуоткрытых множествах получила А. Нойбруннова.

В последнее время регулярно появляются работы, посвященные обобщениям наиболее важных классов пространств, основанным на полуоткрытых множествах. Это, в частности, работы К. Аль-Зуби[5], Ли и Сонга[6], а также Xun Ge [7]. В данной работе рассматриваются дальнейшие обобщения, основанные на so-множествах.

Цель работы. Работа посвящена изучению понятия просто-открытого множества (so-мноожества) и основанных на этом понятии обобщении основных классов топологических пространств и непрерывных отображений.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- Установлены связи между so-множествами и другими обобщениями открытых множеств, доказано, что свойства so-множеств сохраняются при топологическом удвоении пространств, найдены условия, при которых семейство so-множеств образует топологию, совместимую с исходной.
- Введен и исследован класс so-паракомпактных пространств. Доказано, что секвенциально компактное so-паракомпактное пространство бикомпакт-

---

[3] Neubrunnova A. On transfinite sequences of certain types of functions. Acta F.R.N. Univ. Comen. – Mathematica XXX, 1975.

[4] Neubrunnova A. On certain generalizations of the notion of continuity. Matematicky Časopis,vol. 23(1973), №4, 374-380.

[5] Al-Zoubi K.Y. S-paracompact spaces.Acta Math. Hungar. 110(1-2) (2006), 165-174.

[6] Li P.-Y., Song Y.-K. Some remarks on S-paracompact spaces. Acta Math. Hungar., 118(4) (2008), 345-355.

[7] Xun Ge. Mappings on S-paracompact spaces. Acta universitatis apulensis. №19/2009.

но. Доказано, что произведение so-паракомпактного и бикомпактного пространств so-паракомпактно.

- Исследованы топологические дубликаты so-паракомпактных пространств. Доказано, что при топологическом удвоении свойства этих пространств сохраняются (а в отдельных случаях усиливаются).

- Получены примеры so-паракомпактного не паракомпактного пространства и so-паракомпактного не S-паракомпактного пространства.

- Получены характеристики so-непрерывных отображений и их продолжений на дубликат пространства. Доказано, что экстремально несвязное пространство есть паракомпакт тогда и только тогда, когда для всякого его открытого покрытия ω существует квазинепрерывное ω-отображение на некоторое метрическое пространство.

Методы исследования. В работе применяются методы общей терии топологических пространств, их непрерывных отображений и дескриптивной теории множеств.

Теоретическая и практическая ценность работы. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теоретико-множественной топологии.

. **Апробация работы.** Результаты диссериации докладывались

- на 3-ей международной конференции Багдадского университета (24-26 марта 2009г., г. Багдад, Ирак),

-на Международной конференции по топологии и ее приложениям (2010г., г. Месолонги, Греция),

- на семинаре имени П.С.Александрова (неоднократно),

- на Международной топологической конференции «Александровские чтения» (21-25 мая 2012г., Москва),

-на Международной конференции, посвященной 90-летию Л.Д.Кудрявцева (25-29 марта 2013г., г. Москва).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приведен в конце автореферата [1-6].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав и 9 параграфов основной части и списка литературы. Текст диссертации содержит 73 страницы, библиография включает 74 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В работе изучается понятие просто-открытого множества и основанные на нем обобщения основных классов топологических пространств и непрерывных отображений.

Подмножество A пространства X называется просто-открытым (или so-множеством), если $A = O \cup N$, где O открыто, а N нигде не плотно (nwd). При этом не исключается, что любое из множеств O, или N может быть пустым. Напомним, что множество N называется нигде не плотным, если внутренность замыкания этого множества пусто: $\operatorname{int}[N] = \phi$. (Всюду в данной работе замыкание множества обозначается квадратными скобками). So-множество называеься sso-множеством, если оно содержит непустое открытое множество.

Следует заметить, что подмножество пространства X является просто-открытым тогда и только тогда, когда его граница нигде не плотна в X.

Отображение $f: X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется просто-непрерывным, если прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества $V \in Y$ просто-открыт в X.

Как уже отмечалось, понятие просто-открытого множества и основанное на нем понятие просто-непрерывного отображения ввел N.Biswas. Просто-непрерывные отображения будем называть также sc-отображениями. Ранее

Н.Левин (N.Levine) ввел понятия полуоткрытого множества и полунепрерывного отображения.

Подмножество A пространства X называется полуоткрытым, если существует такое открытое множество O, что $O \subset A \subset [O]$. Полузамкнутое множество определяется как дополнение к полуоткрытому.

Отображение называется полунепрерывным, если прообраз всякого открытого множества есть полуоткрытое множество.

Целью работы является систематическое изучение просто-открытых и в частности, полуоткрытых множеств, а также основанных на них обобщений основных классов топологических пространств и непрерывных отображений.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы научного исследования, вводятся основные понятия и излагаются основные результаты, полученные в диссертации.

Первая глава состоит из четырех параграфов

В первом параграфе изучаются и систематизируются свойства просто-открытых множеств и операций над ними. В частности, те свойства, совокупность которых позволяет утверждать, что семейство всех просто-открытых множеств является полем. Упомянем также следующие утверждения.

Предложение 1.1.11. Произведение двух so-множеств есть so-множество.

Предложение 1.1.18. Пусть S – подмножество пространства (X,T). Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) S есть so-множество

(b) Int[S] $\subset$[int(S)].

Предложение 1.1.22. Каждое просто-открытое множество обладает свойством Бэра.

Njastad[8] ввел понятие α-множества. Подмножество S пространства (X,T) называется α-множеством если $S\subset \text{int}\,[\text{int}\,S]$. Семейства α-множеств в (X,T) , будут обозначаться через T^{α} . Njastad показал, что T^{α} есть топология на X со следующими свойствами: $T \subset T^{\alpha}$, $(T^{\alpha})^{\alpha} = T^{\alpha}$ и $S\in T^{\alpha}$ тогда и только тогда, когда всякое nwd-множество в (X,T) замкнуто.

Andrijevic[9] заметил, что $SO(X,T)=SO(X,T^{\alpha})$ и что $N\subset X$ есть nwd в (X,T^{α}) тогда и только тогда, когда N есть nwd в (X,T). Таким образом, мы имеем следующее предложение:

Если S есть просто-открытое подмножество пространства (X,T), то X является просто-открытым в пространстве (X,T^{α}).

Доказательство основано на упомянутом выше результате Andrijevic.

Во втором параграфе исследуются соотношения между SO- множествами и другими обобщениями открытых множеств. Установлены связи просто-открытых множеств с регулярно-открытыми, локально-замкнутыми, полуоткрытыми множествами, β-множествами и др.

Подмножество A пространства (X,T) называется β-открытым если $A\subset [\text{int}\,[A]]$.

Очевидно, что что всякое полуоткрытое множество является so-множеством. Следующее утверждение отвечает на вопрос, при каких условиях so-множество есть полуоткрытое множество.

Для подмножества A пространства (X,T), следующие условия эквивалентны:

(1) A so-множество и β- открытое множество.
(2) A полуоткрыто.

---

[8] Njastad O. On some classes of nearly open sets. Pacific J. Math., 15 (1965), 961-970.

[9] Andrijevic D. Some properties of the topology of α-sets. Mat. Vesnik, Vol. 36(1984), 1-10

В разное время в литературе появлялось много различных обобщений открытых и замкнутых множеств – обобщений, основанных не различных комбинациях замыканий, внутренностей и дополнений. В связи с этим появлялись и новые термины для этих множеств. Результаты второго параграфа первой главы позволяют исключить из употребления некоторые из этих терминов (в частности, NDB-множества, β-множества, полу-локально замкнутые множества), так как классы множеств, обозначаемые этими терминами совпадают с классом просто-открытых множеств.

В параграфе третьем первой главы рассматриваются топологические удвоения so-множеств.

Хорошо известен пример бикомпактного топологического пространства «двойная окружность Александрова». В разное время разные авторы (прежде всего Р. Энгелькинг) рассматривали всевозможные обобщения этого примера.

Здесь мы рассматриваем удвоение топологических пространств по методу П.С.Александрова и изучаем поведение so-множеств при этой операции. Доказано, что свойство множества быть просто-открытым множеством не только сохраняется, но, более того, усиливается.

Предложение 1.3.2. Дубликат so-множества есть sso-множество.

Предложение 1.3.4. Дубликат полуоткрытого множества есть полуоткрытое множество.

В четвертом параграфе первой главы мы выясняем, при каких условиях семейство всех просто-открытых множеств образует топологию, и как эта топология связана с исходной.

Семейство всех просто-открытых множеств (so-множеств) пространства (X,T) обозначается через T^{so}.

Доказано следующее утверждение

ТЕОРЕМА1.4.1. Если семейство T^{so} локально конечно, то T^{so} есть топология на X.

Доказательство этой теоремы основано на том, что объединение локально конечного семейства so-множеств есть so-множество.

Подмножество A топологического пространства X называется α-открытым, или α-множеством, если $A \subset \operatorname{int}[\operatorname{int} A]$. Доказано следующее утверждение

ТЕОРЕМА 1.4.9. Для всякого топологического пространства (X,T) мы имеем $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^{\alpha} \subset \mathrm{T}^{so}$.

Вторая глава состоит из трех параграфов

В первом параграфе рассматриваются С-компактные и CSO- компактные пространства.

Пространство X называется С-компактным, если для всякого его замкнутого подпространства и всякого открытого покрытия этого подпространства существует такая подсистема элементов этого покрытия, что замыкания элементов этой подсистемы покрывают X. Справедливо утверждение:

Уплотнение С-компактного пространства в хаусдорфово пространство есть гомеоморфизм.

Центральное место в Главе 2 занимают so-паракомпактные пространства и их различные модификации: S-паракомпактные, sso-паракомпактные, почти паракомпактные пространства.

so-паракомпактные пространства исследуются во втором параграфе.

Пространство X называется просто-паракомпактным, или so-паракомпактным, если во всякое открытое покрытие X можно вписать локально конечное покрытие просто-открытыми множествами.

Очевидно, в классе регулярных пространств просто-паракомпактные пространства совпадают (в силу известного результата Э.Майкла) с паракомпактами. Поэтому все результаты, полученные для просто паракомпактных пространств, представляют интерес только для нерегулярных пространств.

Дан **пример** просто-паракомпактного пространства, не являющегося паракомпактным. Доказаны следующие утверждения

Предложение 2.2.8. Всякое замкнутое подпространство so-паракомпактного пространства so-паракомпактно.

ТЕОРЕМА 2.2.16. Полурегулярное пространство so-паракомпактно тогда и только тогда, когда во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие (состоящее из любых множеств).

ТЕОРЕМА 2.2.22. Всякое секвенциально компактное so-паракомпактное пространство бикомпактно.

Аналогичное утверждение верно и для счетно компактных so-паракомпактных пространств: Всякое so-паракомпактное счетно-компактное пространство X бикомпактно.

Усилением понятия so-паракомпактного пространства является понятие ss-паракомпактного пространства.

Пространство называется ss-паракомпактным, если во всякое его покрытие можно вписать локально-конечное покрытие, состоящее из sso-множеств.

ТЕОРЕМА 2.2.26. Дубликат A(X) просто-паракомпактного пространства является ss-паракомпактным пространством.

Этот результат является одним из центральных во второй главе.

M.K.Singal и S.P.Arya[10] ввели понятие почти паракомпактного пространства. Пространство X называется почти паракомпактным, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечную систему открытых множеств, плотную в X. Доказана

ТЕОРЕМА 2.2.28. Всякое ss-паракомпактное пространство почти паракомпактно.

---

[10]Singal M.K.,Arya S.P. On M-paracompact spaces. Math. Ann. 181(1969),129-133

K.Y.Al-Zoubi[5] ввел понятие S-паракомпактного пространства. Пространство называется S-паракомпактным, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из полуоткрытых множеств. Нами доказана

ТЕОРЕМА 2.2.33. Дубликат S-паракомпактного пространства есть S-паракомпактное пространство.

Даны следующие примеры:

Пример почти паракомпактного не S-паракомпактного пространства.

Пример so-паракомпактного не S-паракомпактного пространства.

Примеры счетно компактных не so-паракомпактных пространств.

Пример секвенциально компактного псевдо-паракомпактного не so-паракомпактного пространства.

Рассмотрены топологические произведения, где одним из сомножителей является so-паракомпактное пространство. Показано, что не только произведение двух so-паракомпактных пространств может не быть so-паракомпактным, но даже произведение двух паракомпактов может не быть so-паракомпактным.

Отметим еще следующий результат в §2 главы 2.

ТЕОРЕМА 2.2.39. Если X есть so-паракомпактное пространство, а Y бикомпактно, то произведение $X \times Y$ есть so-паракомпактное пространство.

В третьем параграфе главы 2 рассматриваются cso-паракомпактные пространства, являющиеся обобщениями счетно паракомпактных пространств. Пространство называется cso-паракомпактным, если во всякое его счетное открытое покрытие можно вписать счетное локально конечное покрытие, состоящее из просто-открытых множеств.

Получена следующая характеристика cso-паракомпактного пространства

ТЕОРЕМА 2.3.2. Топологическое пространство X cso-паракомпактно тогда и только тогда, когда во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из дизъюнктных просто-открытых множеств.

Третья глава состоит из двух параграфов

В первом параграфе изучаются so-непрерывные отображения.

Понятие просто-непрерывного, или so-непрерывного отображения, основанное на понятии просто-открытого множества ввел также N.Biswas в упомянутой ранее работе.

Отображение $f : X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется просто-непрерывным, или sc-отображением, если прообраз всякого открытого в Y множества есть so-множество. Отображение называется сильно просто-непрерывным, или ssc-отображением, если прообраз всякого открытого множества есть sso-множество.

Справедливы следующие простые утверждения

Пусть X и Y - два топологических пространства. Функция f: X $\to$Y просто-непрерывна тогда и только тогда, когда для всякого замкнутого в Y подмножества B его прообраз f^{-1} (Y) просто-замкнут в X.

Пусть отображение $f : X \to Y$ просто-непрерывно и U открыто в X .

Тогда сужение f/U просто- непрерывно.

Отображение $f : X \to Y$ называется полунепрерывным (N.Levine), если прообраз всякого открытого множества полуоткрыт.

Существуют простые примеры просто-непрерывных отображений (т.е., sc-отображений), не являющихся полунепрерывными. Один из таких примеров (пример 3.1.3) приводится в §1 главы 3.

Задолго до понятия полунепрерывного отображения С.Кемписти[11] ввел понятие квазинепрерывного отображения.

---

[11] Kempisty S. Sur les fonctions quasicontinues. Fund. Math. 19(1932), 184-197.

Отображение $f: X \to Y$ называется квазинепрерывным в точке $x \in X$, если для любых таких открытых множеств U и V, что $x \in U$, $f(x) \in V$ существует непустое открытое множество $G \subset U$, удовлетворяющее условию $f(G) \subset V$.

A.Neubrunnova[12] доказала, что отображение является полунепрерывным тогда и только тогда, когда оно квазинепрерывно. Поэтому из двух упомянутых выше эквивалентных терминов естественно выбрать один – «квазинепрерывное отображение».

Рассматриваются также множества точек разрыва sc-отображений и, в частности, квазинепрерывных отображений.

Нестрого говоря, в общей топологии нигде не плотные множества и множества первой категории играют роль множеств меры нуль.

Справедлива

ТЕОРЕМА 3.1.8. Если $f: X \to Y$ - действительная функция, определенная на отрезке, являющаяся sc-отображением, то в предположении CH множество точек разрыва функции эквивалентно множеству меры нуль.

Эта теорема не является нашим результатом, она следует из рассуждений N.Levine, N.Biswas и их предшественников, но нам не удалось найти ее сформулированной в явном виде.

Следует заметить, что эта теорема и теорема А.Нойбрунновой о поточечной сходимости трансфинитной последовательности sc-функций к sc-функции побудили нас заняться so-множествами и основанными на них отображениями.

В §2 главы 3 рассматриваются квазинепрерывные ω-отображения и продолжения sc-отображений на дубликаты пространств.

Полуокрестностью точки называется любое полуоткрытое множество, содержащее эту точку.

Система множеств называется s-локально конечной (K.Y. Al-Zoubi [5]),

---

[12] Neubrunnova A. On certain generalizations of the notion of continuity. Mat. Cas.,23(1973), 374-380.

если для каждой точки существует полуокрестность этой точки, пересекающаяся не более чем с конечным числом элементов этой системы. Системы, являющиеся s-локально конечными, связаны с квазинепрерывными ω-отображениями.

В §2 главы 3 доказано следующее утверждение

ТЕОРЕМА 3.2.4. Экстремально нресвязное пространство X паракомпактно тогда и только тогда, когда для всякого его открытого покрытия ω существует квазинепрерывное ω-отображение на некоторое метрическое пространство.

Всякое отображение $f : X \to Y$ естественно продолжается на дубликат $A(X)$ пространства X. Доказано следующее утверждение

ТЕОРЕМА 3.2.9. Если пространство Y есть образ бикомпактного (линделефова, паракомпактного, S-паракомпактного so-паракомпактного) пространства при sc-отображении, то Y есть образ бикомпактного (линделефова, паракомпактного, S-паракомпактного, sso-паракомпактного пространства при ssc-отображении.

Автор искренне благодарит научного руководителя профессора Клюшина Владимира Леонидовича за постановку задачи и и поддержку.

Автор выражает благодарность участникам семинара имени П.С.Александрова за внимание.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Jalal Hatem Hussein. On SO-continuous function. Proceedings of 3-rd Scientific conference of college of science. University of Baghdad, 24-26, 2009.

[2] Джелал Хатем Хуссейн Аль-Баяти. Некоторые результаты о просто-непрерывных функциях Вестник РУДН. Серия Математика, Информатика, Физика. 1(2012), 9-13.

[3] Jalal Hatem Hussein. Weak and strong forms of so-continuous functions. Selected papers of the International Conference on Topology and its Applications. Technological Education Institute of Messolonghi. 2010, 86-91.

[4] Клюшин В.Л., Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн. О просто-открытых множествах. Вестник РУДН. Серия Математика, Информатика, Физика, №(2011), 34-38. (В.Л.Клюшину принадлежит постановка задачи и редакция текста введения, Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейну принадлежит содержание пп. 2 и 3.)

[5] Al Bayati Jalal Hatem Hussein. On simply paracompact spaces. Alexandroff Readings International Topological Conference. Moscow (Russia) May 21-25, 2012. Сборник тезисов Alexandroff Readings, с. 9.

[6] Клюшин В.Л., Аль-Баяти Джелал Хатем Хуссейн. Топологическое удвоение so-множеств и продолжение отображений. Тезисы Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л.Д.Кудрявцева. Москва, 2013, с. 346-347. (Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейну принадлежит теорема 1 и первоначальный вариант теоремы 2, усиленной затем В.Л.Клюшиным.)