МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Кокорев Антон Владимирович

Тригонометрические суммы Г.Вейля над кольцом целых алгебраических чисел

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре геометрии и методики преподавания математики физико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет».

Научный руководитель:	Авдеев Иван Федорович кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	Добровольский Николай Михайлович доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого», зав. кафедрой. Снурницын Павел Владимирович кандидат физико-математических наук (ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»)
Ведущая организация:	ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Защита диссертации состоится 11 октября 2013 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при ФГБОУ ВПО Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: РФ 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А).

Автореферат разослан 11 сентября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Область исследования диссертации относится к аналитической теории чисел. В ней рассматриваются вопросы, связанные с тригонометрическими суммами над полем вещественных алгебраических чисел.

Основной целью настоящей работы являеются оценки модуля тригонометрической суммы

$$S\left(\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_n,\beta_n\right)=\sum_{\lambda\in\nu}e^{\pi i\left(\alpha_1\mathrm{Sp}(\lambda)+\beta_1\mathrm{Sp}(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)+\ldots+\alpha_n\mathrm{Sp}(\lambda^n)+\beta_n\mathrm{Sp}(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda^n)\right)},$$

где

$$\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_n,\beta_n\in\mathbb{R},$$
$$\mathrm{Sp}\left(\gamma\right)=\gamma+\overline{\gamma},\nu=\left\{a+b\sqrt{2};a,b\in[1;P]\,a,b\in\mathbb{N}\right\},$$
$$\overline{\gamma}-\text{сопряженное к}\,\gamma.$$

В работе рассматриваются тригонометрические суммы над целыми алгебраическими числами, являющиеся обобщением классических тригонометрических сумм вида

$$V=V(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)=\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x$, и $\alpha_n,\ldots,\alpha_1$ - любые вещественные числа.

Академик Иван Матвеевич Виноградов дал им название сумм Г. Вейля, которое стало общепринятым. Упомянутые в диссертации суммы по аналогии будем называть суммами Г.Вейля. И.М.Виноградов разработал теорию тригонометрических сумм Г.Вейля[1]. Центральную роль в ней играет теорема о среднем значении таких сумм, т.е. об оценке величины

$$I(P,n,k)=\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i(f(x))}\right|^{2k}d\alpha_1\ldots d\alpha_n.$$

Интеграл $I(P,n,k)$ получил название интеграла Виноградова[2]. По аналогии будем использовать это понятие и в случае наших сумм.

[1] Виноградов И.М., *"Новые оценки сумм Вейля"*, Докл. АН СССР, 1935, т.3, №6, с. 195-198.

[2] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н., *"Теория кратных тригонометрических сумм"*, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

Оказывается, что среднее значение сумм в точности равно числу решений в натуральных числах системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_k, \\ x_1^2 + \ldots + x_k^2 = y_1^2 + \ldots + y_k^2, \\ \ldots \\ x_1^n + \ldots + x_k^n = y_1^n + \ldots + y_k^n, \end{cases}$$

где $1 \leqslant x_s \leqslant P, 1 \leqslant y_s \leqslant P, s = 1, \ldots, n.$

В рамках теории тригонометрических сумм Г.Вейля важно получение возможно более точной оценки $I(P, n, k)$ для числа слагаемых k порядка n^2 и более.

И.М. Виноградов получил удобную для применения «упрощенную оценку» величины $I(P, n, k)$ вида[3]

$$I(P, n, k) \leqslant P^{2k - \frac{n(n+1)}{2}},$$

с ограничением вида $k = [n^2(2\ln n + \ln(\ln n) + 4)]$.

Академик Ю.В.Линник[4] предложил вариант доказательства теоремы о среднем значении, использовавший свойства сравнений по модулю степеней простого числа p. А. А.Карацуба и др. усовершенствовали этот метод[5], получивший название p-адического.

И.М.Виноградов поставил проблему оценки кратных тригонометрических сумм. В начале 70-х годов прошлого века[6] Г.И. Архипов получил первые оценки двукратных сумм Г. Вейля для многочленов общего вида. Позже Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков дали обобщение результатов Г.И. Архипова на кратный случай[7].

Результаты исследований по кратным тригонометрическим суммам Г. Вейля составили содержание монографии «Теория кратных тригонометрических сумм»[8]. С.Б. Стечкиным[9], О.В. Тыриной[10] и др.

[3] Виноградов И.М., *"Метод тригонометрических сумм в теории чисел"*, М.: Наука. Главная редакция физико-маетиматическогой литература, 1980, 144 с.

[4] Линник Ю.В., *"Оценки сумм Вейля"*, Докл. АН СССР, 1942, т.34, №7, с. 201-203.

[5] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н., *"Теория кратных тригонометрических сумм"*, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

[6] Архипов Г.И., *"Теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы"*, Мат. заметки, 1975, №1, с. 143-153.

[7] Архипов Г.И.,Чубариков В.Н., *"О кратных тригонометрических суммах"*, Док. АН СССР, 1975, т. 222, №5, с. 1017-1019.

[8] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н., *"Теория кратных тригонометрических сумм"*, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

[9] Стечкин С. Б., *"О средних значениях модуля тригонометрической суммы"*, Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1975, т. 134, с. 283-309.

[10] Тырина О.В., *"Новая оценка тригонометрического интеграла И. М. Виноградова"*, Изв. АН СССР, 51 (1987), 2,-с. 363-378.

было продолжено развитие метода тригонометрических сумм в поле рациональных чисел. Результаты теории кратных тригонометрических сумм используются в диссертационной работе.

Естественным развитием метода тригонометрических сумм является его обобщение в поля алгебраических чисел.

Первые исследования в этом направлении провел К.Л.Зигель[11]. Он применил метод тригонометрических сумм для решения задач варинговского типа в кольце целых алгебраических чисел. Эти исследования были продолжены Т.Татудзавой[12] и О.Кернером[13]. Ими была доказала теорема о среднем для сумм Г. Вейля в полях алгебраических чисел. В дальнейшем И.Еда доказал теорему о среднем p - адическим методом[14].

Тригонометрические суммы, рассматриваемые в данной диссертации, существенно отличаются областями изменения переменных от тригонометрических сумм, которые изучались в приведенных выше работах. Суммами подобными нашим в последнее время занимались И.М. Козлов[15] и П.Н. Сорокин[16].

С формальной точки зрения тригонометрическую сумму в квадратичном поле можно рассматривать, как частный случай двойных тригонометрических сумм, которые оценивались в общей теории кратных тригонометрических сумм[17], но в нашем частном случае получены более сильные оценки индивидуальных сумм и их средного значения, которые являются близкими к окончательным по главному параметру.

Заметим, что если теорему о среднем, аналогичной нашей, выводить из общей теоремы о среднем для двухкратной суммы Г.Вейля, то степень осреднения будет иметь порядок $n^3 \log n$. В то время как в нашем случае порядок $n^2 \log n$, при этом выполняется неравенство

$$n^3 \log > n^2 \log n.$$

В этом состоит принципиальное отличие нашего результата от общей

[11] Siegel C.L. *"Generalization of Warings problem to algebraic number fields"*, Amer. J. Math., 66 (1944), pp. 122-136.

[12] Tatuzava N., *"On the Waring problem in an algebraic number field"*, Jour. Math. Soc. Japan, 10 (1958), No. 3, pp. 322-341.

[13] Korner O., *"Uber Mittelwerte trigometrischen Zahlkorpern"*, Math/ Ann// 147(1962), pp.205-309.

[14] Eda Y., *"On the meanvalue theorem in an algebraic number fields"*, Jap. J. Math., 36 (1967), pp. 5-21

[15] Siegel C.L. *"Generalization of Warings problem to algebraic number fields"*, Amer. J. Math., 66 (1944), pp. 122-136.

[16] Сорокин П.Н., *"Среднее значение тригонометрических сумм в кольце гауссовых чисел"*, Дис. ...канд. физ.-мат. наук.-М., 2008

[17] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н., *"Теория кратных тригонометрических сумм"*, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

теоремы. Это обстоятельство связано с тем, что в нашем случае осреднение тригонометрической суммы ведется по $2n$ коэффициентов многочлена в её экспоненте, а в общем случае количество таких коэффициентов равно n^2.

Другим основным результатом диссертации является оценка тригоногметрических сумм над квадратичным полем на I и II классах. Заметим, что для II класса получены равномерные оценки имеющие вид: $O\left(P^{2-\rho}\right)$, где $\rho \sim \frac{1}{n^2 \log n}$, в то время как для двойных сумм общего вида в настоящее время известна равномерная оценка только порядка[18] $P^{2-\rho_1}$, где $\rho_1 \sim \frac{1}{n^3 \log n}$.

Путем применения полученных выше результатов, в диссертации находится асимптотическая формула для количества решений системы уравнений, при $k > n^2 \log n$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = \mu_1 + \ldots + \mu_k + \sigma_1, \\ \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2 = \mu_1^2 + \ldots + \mu_k^2 + \sigma_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \lambda_1^n + \ldots + \lambda_k^n = \mu_1^n + \ldots + \mu_k^n + \sigma_n, \end{cases}$$

где неизвестные $\lambda_i, \mu_i, \sigma_i \in \nu, i = \overline{1, n}$, ν область, состоящая из целых алгебраических чисел поля K - алгебраических чисел 2 степени, полученного как расширение поля рациональных чисел присоединением $\sqrt{2}$, вида $a + b\sqrt{2}$, где, $a, b \in [1; P] \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{N}$.

Цель работы

Целью работы является получение новых оценок среднего значения модуля тригонометрических сумм в квадратичном поле, оценок индивидуальных сумм Г.Вейля над квадратичным полем вещественных алгебраических чисел, доказательство асимптотической формулы для аналога интеграла И.М.Виноградова в квадратичном поле вещественных алгебраических чисел, что дает оценку числу решений некоторой системы уравнений над квадратичным полем вещественных алгебраических чисел.

Методы исследования

В работе используются методы элементарной и аналитической теории чисел, в том числе метод кратных тригонометрических

[18] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н., *"Теория кратных тригонометрических сумм"*, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

сумм И.М.Виноградова, формула И.М.Виноградова для обращения тригонометрических сумм, методы комплексного анализа.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Доказана теорема о среднем значении модуля тригонометрической суммы в квадратичном поле вещественных алгебраических чисел.

2. Получены оценки модуля тригонометрических сумм Г.Вейля в квадратичном поле на I и II классах.

3. Найдена асимптотическая формула для аналога интеграла И.М.Виноградова в квадратичном поле вещественных алгебраических чисел.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

- семинар «Аналитическая теория чисел» (д.ф.-м.н., проф. В.Н. Чубариков, д.ф.-м.н., проф. Г.И. Архипов), МГУ, неоднократно в 2011-2012 гг.

- Международная научно-практическая конференция «Математика и её приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы» (Орел, Орловский государственный университет, 20-21 мая 2011 г.).

- X международная конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения г. Волгоград, УКЦ ФМИФ ВГ-СПУ, 10-16 сентября 2012 г.

- XI Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы теории чисел и приложения», г. Саратов, 9-14 сентября 2013 г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата [1], [2], [3], [4], [5]. Работ в соавторстве нет.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации методы и результаты представляют интерес для специалистов аналитической теории чисел. Они позволяют обобщить метод тригонометрических сумм на поля вещественных алгебраических чисел и уточнить полученные ранее оценки модуля кратных тригонометрических сумм.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и библиографии (31 наименование). Общий объем диссертации составляет 90 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении диссертации приводится история рассматриваемых вопросов, показана актуальность темы и изложены основные результаты. Приведены полученные ранее результаты, снабженные подробными ссылками, показаны основные отличия получаемых в диссертации результатов с существующими на данный момент.

Содержание главы 1

Первая глава «Интеграл Виноградова над квадратичным полем вещественных алгебраических чисел» состоит из четырех параграфов. В первом параграфе проводится формулировка основной теоремы о среднем значении.

Теорема 1. *Пусть* $n, k, \tau \in \mathbb{N}$. *Тогда, при* $k \geqslant n\tau$, $P \geqslant 1$ *для числа* I *решений системы имеет место оценка*

$$I = I\left(P; n, k\right) \leqslant n^{4n\delta(\tau)} 2^{4\chi(\tau)} k^{4n\tau} P^{4k-2\delta(\tau)},$$

где $\delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau}, \chi(\tau) = 4n^2\tau + n\tau^2.$

Далее проводится доказательство вспомогательных лемм.

Во втором параграфе приведено авторское доказательство теоремы о попадании k простых целых алгебраических чисел в промежуток $(x; 2x]$, при x, превосходящем некоторую величину. А также аналог леммы Линника о количестве решений некоторой системы сравнений в квадратичном поле вещественных алгебраических чисел .

Третий параграф посвящен выводу основного рекуррентного неравенства в случае поля вещественных алгебраических чисел.

Четвертый параграф содержит доказательство основной теоремы о среднем значении модуля тригонометрической суммы над кольцом целых алгебраических чисел при помощи рекуррентного неравенства, полученного в третьем параграфе.

Содержание главы 2

Во второй главе «Суммы Г. Вейля на основном множестве» содержится теорема об оценке модуля тригонометрической суммы, наименьшее общее кратное знаменателей которых превышает некоторую степень интервала суммирования. Итак, мы рассматриваем тригонометрическую сумму вида

$$S\left(\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_n,\beta_n\right)=\sum_{\lambda\in\nu}e^{\pi i\left(\alpha_1\mathrm{Sp}(\lambda)+\beta_1\mathrm{Sp}(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)+\ldots+\alpha_n\mathrm{Sp}(\lambda^n)+\beta_n\mathrm{Sp}(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda^n)\right)},$$

где $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_n,\beta_n\in\mathbb{R},\mathrm{Sp}\left(\gamma\right)=\gamma+\overline{\gamma}=2\mathrm{Re}\left(\gamma\right),\overline{\gamma}-$ сопряженное кγ, $\nu=\left\{a+b\sqrt{2};a,b\in[1;P]\,a,b\in\mathbb{N}\right\}$.

Каждое α_s,β_s можно представить в виде

$$\alpha_s=\frac{c_s}{q_s}+\frac{\theta_s}{\left|q_s\right|\tau_s},\beta_s=\frac{d_s}{q'_s}+\frac{\theta'_s}{\left|q'_s\right|\tau'_s},$$

где $c_s,d_s,\ q_s,q'_s\ \in\ Z,\text{НОК}\left(c_s,q_s\right)\ =\ 1,\text{НОК}\left(d_s,q'_s\right)\ =\ 1,\ 1\ <\ |q_s|\ \leqslant\ \tau_s$, $1<|q'_s|\leqslant\tau_s,\ |\theta_s|\leqslant 1,\ s=\overline{1,n}$. Определим для c,d область $\Omega(c;d)\in\mathbb{R}$ следующим образом:

$$\Omega=\left\{\begin{array}{ll}\alpha_i\in(0;1):\left|\alpha_i-\Gamma_i\left(c;d\right)\right|<\frac{1}{2\binom{t_1+t_2}{t_2}}L_iP^{-\rho},i=\overline{1,n},t_2-\text{четное},\\ \beta_i\in(0;1):\left|\beta_i-\Gamma'_i\left(c;d\right)\right|<\frac{1}{2\binom{t_1+t_2}{t_2}}L_iP^{-\rho},i=\overline{1,n},t_2-\text{нечетное}.\end{array}\right\},$$

где $L_k=P^{-k},i=t_1+t_2,k=\overline{1,n},\,\overline{\Gamma}_{t_1;t_2}$ коэффициенты разложения разности

$$\sum_{x=1}^{P+c}\sum_{y=1}^{P+d}-\sum_{x=1}^{c}\sum_{y=1}^{d}.$$

В этом случае верна следующая теорема

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 3$. Для $s = \overline{1,n}$ положим $\tau_s = P^{s-\frac{1}{3}}$. Каждое α_s, β_s можно представить в виде*

$$\alpha_s = \frac{c_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s \tau_s}, \beta_s = \frac{d_s}{q'_s} + \frac{\theta'_s}{q'_s \tau'_s},$$

где $c_s, d_s,\ q_s, q'_s \in Z, \text{НОК}\,(c_s, q_s) = 1, \text{НОК}\,(d_s, q'_s) = 1,\ 1 < q_s \leqslant \tau_s,\ 1 < q'_s \leqslant \tau'_s,\ |\theta_s|\,, |\theta'_s| \leqslant 1,\ s = \overline{1,n}$.

Пусть $Q_0 = \text{НОК}\,(q_2, q'_2, \ldots, q_n),\ |Q_0| \geqslant P^{\frac{1}{6}}$ и

$$p = \frac{1}{k}, k = 24n^2 \ln\left(3n^2\right).$$

Тогда

$$\left|\sum_{\lambda \in \nu} e^{\pi i(\mathrm{f}(\lambda))}\right| \leqslant CP^{2-\rho}, C = 2^{8n^2}.$$

Содержание главы 3

Третья глава «Общая оценка сумм Г.Вейля над квадратичным полем вещественных алгебраических чисел» состоит из трех параграфов.

В первом параграфе проведится разбиение коэффициентов многочлена на 2 класса следуюшим образом: точка $(\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_n, \beta_n)$ принадлежит Ω_1, если выполняются данные условия

1) $Q < P^{0,1}, Q = \text{НОК}(q_1, q'_1, \ldots, q_n, q'_n)$,

2) $\zeta_s < P^{-s+0,1}, \zeta'_s < P^{-s+0,1}, s = \overline{1,n}$.

Все остальные точки отнесём ко второму классу Ω_2.

Далее показано, что область первого класса Ω_1 состоит из непересекающихся окрестностей рациональных чисел с малым знаменателями. Такое же представление множества первого класса используется в четвертой главе, при получении асимптотической формулы среднего значения тригонометрической суммы над квадратичным полем вещественным алгебраических чисел.

Второй параграф посвящен оценке суммы Г. Вейля на первом классе, а именно верна теорема

Теорема 3. *Пусть $(\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_n, \beta_n)$- точка первого класса Ω_1. Тогда имеет место оценка*

$$|S(\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_n, \beta_n)| < 2(5n^{2n})^{2\nu(Q)}\tau(Q)P^2Q^{\frac{1}{n}},$$

где $\tau(Q)$*- количество различных делителей* Q*,* $\nu(Q)$*-количество различных простых делителей* Q*. Учитывая, что*

$$\gamma(t_1;t_2)=\binom{t_1+t_2}{t_2}\zeta_{t_1+t_2}, \text{ при четном } \quad t_2,$$

$$\gamma(t_1;t_2)=\binom{t_1+t_2}{t_2}\zeta'_{t_1+t_2}, \text{ при нечетном } \quad t_2,$$

$$\overline{\gamma}(t_1;t_2)=(QP_1)^{t_1+t_2}\gamma(t_1;t_2), \overline{\gamma}=\max_{1\leqslant t_1+t_2\leqslant n}\overline{\gamma}(t_1;t_2), 0\leqslant t_1;t_2\leqslant n,$$

при $\overline{\gamma}>1$ *справедлива оценка*

$$|S(\alpha_1,\beta_1,...,\alpha_n,\beta_n)|<2^{12}(5n^{2n})^{2\nu(Q)}\tau(Q)P^2(\overline{\gamma}Q)^{-\frac{1}{n}}\ln(\overline{\gamma}+2).$$

В третьем параграфе получены оценки для оставшихся точек.

Теорема 4. *Пусть* $(\alpha_1,\beta_1,...,\alpha_n,\beta_n)$*- точка второго класса* Ω_2*. Для* $s=\overline{1,n}$ *положим* $\tau_s=P^{s-\frac{1}{3}}$*. Каждое* α_s,β_s *можно представить в виде*

$$\alpha_s=\frac{c_s}{q_s}+\zeta_s, |\zeta_s|<\frac{\theta_s}{q_s\tau_s},$$

$$\beta_s=\frac{d_s}{q'_s}+\zeta'_s, |\zeta'_s|<\frac{\theta'_s}{q'_s\tau'_s},$$

где $d_s,c_s,q_s,q'_s\in\mathbb{Z}, \text{НОД}(c_s,q_s)=1, \text{НОД}(d_s,q'_s)=1, 1<q_s\leqslant\tau_s, 1<q'_s\leqslant\tau'_s, 0<c_s\leqslant q_s,\ 0<d_s\leqslant q'_s,\ |\theta_s|,|\theta'_s|\leqslant 1,\ s=\overline{1,n}.$

Пусть $Q=\text{НОК}(q_1,q'_1,\ldots,q_n,q'_n)$*, а* $Q_0=\text{НОК}(q_2,q'_2,\ldots,q_n,q'_n)$*. Обозначим через* $\nu(q)$*- число различных простых делителей* q*,* $\tau(q)$*-число различных делителей* q*, тогда*

1) *Если* $Q<P^{0,1}, \delta_s=P^s\zeta_s\geqslant P^{0,1}$*, т.е.* $\zeta_s\geqslant P^{-s+0,1}$*, при четном* t_2*,* $\delta'_s=P^s\zeta'_s\geqslant P^{0,1}$*,* $\zeta'_s\geqslant P^{-s+0,1}$*, при нечетном* t_2*,* $1\leqslant s\leqslant n$*, то*
$$|S(\alpha_1,\beta_1,...,\alpha_n,\beta_n)|<8^6n^3(5n^{2n})^{2\nu(Q)}\tau(Q)P^{2-\frac{1}{30n}}.$$

2) *Если* $Q>P^{0,1}, Q_0\geqslant P^{\frac{1}{6}}$*, то*
$$|S(\alpha_1,\beta_1,...,\alpha_n,\beta_n)|\leqslant 2^{8n^2}P^{2-\rho},$$
где $\rho=(24n^2\ln(3n^2))^{-1}$*.*

3) *Если* $Q>P^{0,1}, Q_0<P^{\frac{1}{6}}$*,* $(Q\neq Q_0; Q>Q_0)$*, то*
$$|S(\alpha_1,\beta_1,...,\alpha_n,\beta_n)|\leqslant 2^{12}n^{2+n}\tau(Q_0)P^{2-\frac{1}{18n}}.$$

4) *Если* $Q>P^{0,1}, Q_0<P^{\frac{1}{6}}$*,* $(Q=Q_0)$*, то*
$$|S(\alpha_1,\beta_1,...,\alpha_n,\beta_n)|\leqslant(5n^{2n})^{2\nu(Q)}\tau(Q)P^{2-\frac{1}{n}}.$$

Содержание главы 4

Последняя глава «Асимптотическая формула для аналога интеграла И.М. Виноградова в квадратичном поле» посвящена выводу асимптотической формулы при $k \geqslant 110n^2\ln(3n^2), P \to \infty$, где P - произвольное целое (натуральное) число, для интеграла

$$I(P,n,k) = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 \left| e^{\pi i\left(\alpha_1 \mathrm{Sp}(\lambda)+\beta_1 \mathrm{Sp}(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)\dots+\alpha_n \mathrm{Sp}(\lambda^n)+\beta_n \mathrm{Sp}(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda^n)\right)}\right|^{2k} *$$
$$* \, e^{\pi i\left(\alpha_1 \mathrm{Sp}(\sigma_1)+\beta_1 \mathrm{Sp}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_1)+\dots+\alpha_n \mathrm{Sp}(\sigma_n)+\beta_n \mathrm{Sp}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_n)\right)} d\alpha_1 d\beta_1 \dots d\alpha_n d\beta_n,$$

где $k,n \in \mathbb{N}, \nu = \left\{ a + b\sqrt{2} \middle| \, a,b \in [1;P] \, a,b \in \mathbb{N} \right\}, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$.

В первом параграфе доказана следующая теорема

Теорема 5. *Положим для $n \geqslant 3$ $\rho = \frac{1}{k}, k = 24n^2\ln(3n^2)$. Тогда, при любом натуральном $k \geqslant n\tau$ и $P \to +\infty$ верна следующая асимптотическая формула*

$$I\left(P,n,k\right) = \sigma\theta P^{4k-n(n+1)} + \vartheta\left(P^{4k-n(n+1)-0,1}\right),$$

где $\rho_1 = n\rho = \frac{1}{24n\ln(3n^2)}$ и

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |V(\delta_1, \delta_1', \dots, \delta_n, \delta_n')|^{2k} d\delta_1 d\delta_1' \dots d\delta_n d\delta_n',$$

$$V(\delta_1, \delta_1', \dots, \delta_n, \delta_n') =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 e^{\pi i\left(\delta_1 \mathrm{Sp}(\xi_1+\xi_2\sqrt{2})+\delta_1' \mathrm{Sp}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi_1+\xi_2\sqrt{2})\right)+\dots+\delta_n' \mathrm{Sp}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi_1+\xi_2\sqrt{2})^n\right)\right)} d\xi_1 d\xi_2 + 16\theta n P_1,$$

$$\sigma = \sum_{q_1 \geqslant 1, \dots, q_n' \geqslant 1} \; \sum_{\substack{0<c_1 \leqslant q_1,\dots,0<d_n \leqslant q_n' \\ \text{НОД}(c_1;q_1)=1,\dots,\text{НОД}(d_n;q_n')=1}} \left| U(\overline{c}, \overline{d}, \overline{q}) \right|^{2k},$$

$$U(\overline{c}, \overline{d}, \overline{q}) = \frac{1}{Q^2} \sum_{\substack{\eta_{1,2}=1 \\ \lambda=\eta+\xi p \\ \eta=\eta_1+\eta_2\sqrt{2}}}^{Q} e^{\pi i\left(\frac{c_1}{q_1}\mathrm{Sp}(\lambda)+\dots+\frac{d_n}{q_n'}\mathrm{Sp}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda^n\right)\right)}.$$

В §4.2 показано, что особый интеграл θ сходится при $k > n^2$, а особый ряд σ сходится при $2k > n^2$.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Кокорев А.В.* Теорема о среднем значении тригонометрической суммы в поле алгебраических чисел второй степени, Ученые записки Орл. гос. ун., Орел, №3, 2011, с. 42-48.

[2] *Кокорев А.В.* Теорема о среднем значении тригонометрической суммы в поле алгебраических чисел 2 степени, Ученые записки Орл. гос. ун., Орел, №3, 2012, с. 29-38.

[3] *Кокорев А.В.* Оценка суммы Г. Вейля по вещественным алгебраическим числам, Алгебра и теория чисел: сов. проб. и приложения: тезисы докладов X межд. конф. , Волгоград 10-16 сен. 2012г. - Волгоград: изд. ВГСПУ Перемена, 2012. с. 32.

[4] *Кокорев А.В.* Об оценках тригонометрических сумм над квадратичным полем, Ученые записки Орл. гос. ун., Орел, №6(50) часть I, 2012, с. 39-42.

[5] *Кокорев А.В.* О суммах Вейля над квадратичным полем вещественных алгебраических чисел, Ученые записки Орл. гос. ун., Орел, №6(50) часть II, 2012, с. 114-117.