Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.237.3

Кашицын Павел Александрович

НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ И ИХ СВОЙСТВА В МОДЕЛЯХ МНОГОМЕРНОГО ГАУССОВСКОГО АНАЛИЗА

Специальность: 01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Тюрин Юрий Николаевич.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Пирогов Сергей Анатольевич**,
главный научный сотрудник
ИППИ РАН;

кандидат физико-математических наук
Уфимцев Михаил Валентинович,
старший научный сотрудник,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
факультет ВМК МГУ,
кафедра автоматизации научных исследований.

Ведущая организация: Национальный исследовательский
университет "Высшая школа экономики".

Защита состоится 25 октября 2013 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8 этаж).

Автореферат разослан 24 сентября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Многомерный статистический анализ — это раздел математической статистики, который изучает многомерные наблюдения. В гауссовком анализе также делается предположение о том, что распределение многомерных наблюдений, или векторов, является нормальным.

Проблемы, связанные с проверкой гипотез в многомерном гауссовском анализе, исследуются учеными с момента оформления этой науки в самостоятельную область в первой половине 20-го века. Основополагающие результаты в этой области были получены Р. А. Фишерем[1], С. С. Уилксом[2], С. Н. Роем[3], М. С. Бартлеттом[4], Г. Хотеллингом[5].

Результаты исследований того времени были подведены к 60-м годам 20-го века в монографиях С. Н. Роя[6] и Т. В. Андерсона[7]. В монографии Т.В. Андерсона линейные модели были изложены в форме регрессионного анализа без общего понятия линейных моделей и линейных гипотез. Общее понятие линейной модели и линейной гипотезы было недавно предложено Ю. Н. Тюриным[8].

Проблемы, связанные с проверкой гипотез в многомерном гауссовском анализе, включают в себя следующие задачи:

- Проверка многомерных гипотез о наличии линейных связей между математическими ожиданиями наблюдений (линейные гипотезы);
- Проверка многомерных гипотез о наличии связей типа неравенств между математическими ожиданиями наблюдений (конические гипотезы);
- Проверка гипотез о независимости многомерных признаков (гипотезы о структуре ковариационной матрицы).

[1] R.A. Fisher. "The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient". — *Proc. Roy. Soc.*, A121, pp. 654-673, 1928.

[2] S.S. Wilks. "Certain generalizations in the analysis of variance". — *Biometrika*, 24, pp. 471-494, 1932.

[3] S.N. Roy. "Analysis of variance for multivariate normal populations. The sampling distribution of the requisite p-statistics on the null and non-null hypothesis". — *Sankhya*, 6, pp. 35-50, 1942.

[4] M.S. Bartlett. "On the theory of statistical regression". — *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, pp. 260-283, 1933.

[5] H. Hotelling. "The generalization of Student's ratio". — *Ann. Math. Stat.*, 2, pp. 360-378, 1931.

[6] S.N. Roy. *Some Aspects of Multivariate Analysis.* — N.Y.: Wiley, 1957.

[7] Т.В. Андерсон. *Введение в многомерный статистический анализ.* — М.: Физматлит, 1963.

[8] Ю.Н. Тюрин. *Многомерная статистика: гауссовские линейные модели.* — Издательство МГУ, 2011.

В ходе многолетних исследований были выработаны основные требования, предъявляемые к критериям, которые могут быть использованы при проверке гипотез в многомерном гауссовском анализе:

- Инвариантность критерия по отношению к аффинным преобразованиям наблюдений, у которых сдвиги не меняют гипотетическое множество;
- Свобода критерия от неизвестных параметров модели при гипотезе.

Следствием условия инвариантности оказывается то, что статистические критерии должны быть функциями от собственных значений произведений матриц, распределенных по Уишарту. Свобода распределения от параметров модели при гипотезе для таких критериев достигается автоматически. Изучению свойств распределения Уишарта посвящены работы Дж. Уишарта[9], С. С. Уилкса[10], А. Т. Джеймса[11] и других.

В последние годы привлекают к себе внимание многомерные задачи, наблюдения в которых не являются независимыми, но имеют заданную ковариационную структуру. М. С. Сривастава[12] и Д. фон Розен[13] решили задачу оценивания параметров модели, в которой совместная ковариационная структура наблюдений задается в виде произведения Кронекера двух положительно определенных матриц. В 1-й главе настоящей диссертации для описанной структуры зависимых наблюдений была разработана теория линейных моделей. Эта теория, естественно, включает оценивание неизвестных параметров.

Во 2-й главе исследуется свойство монотонности функции мощности инвариантных критериев, возникающих при проверке гипотез в моделях многомерного гауссовского анализа как для независимых наблюдений, так и для зависимых наблюдений с заданной ковариацинной структурой. В 1980 г. И. Олкин и М. Д. Перлман[14] сформулировали гипотезу о монотонности функции мощности инвариантных критериев, верность которой в общем виде до сих пор не доказана и не опровергнута. В настоящей диссертации доказана монотонность функции мощности для широкого класса инвариантных критериев. Этот класс включает в себя все основные известные критерии, которые используются в прикладных задачах.

[9] J. Wishart. "The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population". — *Biometrica*, 20A (1-2), pp. 32-52, 1928.

[10] S.S. Wilks. "Sample criteria for testing equality of means, equality of variances and equality of covariances in a normal multivariate distribution". — *Ann. Math. Statist.*, Vol. 17, pp. 257-281, 1946.

[11] A.T. James. "Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples". — *Ann. Math. Statist.*, Vol. 35, No. 2, pp. 475-501, 1964.

[12] M.S. Srivastava. "Estimation of interclass correlations in familial data". — *Biometrika*, Vol. 71, pp. 177-185, 1984.

[13] M.S. Srivastava, T. Nahtman, D. von Rosen. "Estimation of interclass correlations in familial data". — *Math. Meth. of Statist.*, Vol. 17, No. 4, pp. 357-370, 2008.

[14] I. Olkin, M.D. Perlman. "Unbiasedness of invariant tests for MANOVA and other multivariate problems". — *Ann. Math. Statist.*, Vol. 8, pp. 1326-1341, 1980.

Полученные результаты обобщают соответствующие результаты И. Олкина, М. Д. Перлмана, С. Н. Роя[15], Т. В. Андерсона[16], П. Гроенбума[17] и Д. Р. Труа[17].

В последние десятилетия интенсивно развивается теория проверки гипотез о положении с ограничениями типа неравенств. Вначале данные гипотезы рассматривались как альтернативные к нулевым гипотезам в линейных моделях. Однако в приложениях часто возникают самостоятельные задачи, когда требуется проверить гипотезу о принадлежности параметра некоторому заданному выпуклому конусу. Теория конических гипотез в одномерном случае разрабатывалась такими учеными как Т. Робертсон[18,19], Ф. Т. Райт[18], Р. Л. Дэйкстра[19]. Однако единого подхода к проверке многомерных конических гипотез в гауссовском случае до сих пор разработано не было. В 3-й главе настоящей диссертации вводится понятие многомерного матричного конуса, и с его помощью решается задача о проверке многомерных конических гипотез в той общности, которая достаточна для решения прикладных задач.

Таким образом, тема диссертации представляется актуальной с теоретической точки зрения, и имеет практическую значимость.

Цель работы

Целью данной диссертации является исследование новых свойств статистических критериев, возникающих при проверке линейных и конических гипотез для моделей многомерного гауссовского анализа с зависимыми наблюдениями, которые имеют заданную ковариационную структуру.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. В модели многомерных зависимых наблюдений с ковариационной структурой, заданной в виде произведения Кронекера двух положительно определенных матриц, предложен альтернативный метод получения состоятельных и несмещенных оценок с помощью техники,

[15] S.N. Roy, W.F. Mikhail. "On the monotonic character of the power functions of two multivariate tests". — *Ann. Math. Statist.*, Vol. 32, pp. 1145-1151, 1961.

[16] S. Das Gupta, T.W. Anderson, G.S. Mudholkar. "Monotonicity of the power functions of some tests of the multivariate linear hypothesis". — *Ann. Math. Statist.*, Vol. 35, pp. 200-205, 1964.

[17] P. Groeneboom, D.R. Truax. "A monotonicity property of the power function of multivariate tests". — *Indag. Math.*, Vol. 11, pp. 209-218, 2000.

[18] T. Robertson, F.T. Wright. "On approximation of the level probabilities and associated distributions in order restricted inference". — *Biometrika*, Vol. 70, No. 3, pp. 597-606, 1983.

[19] T. Robertson, F.T. Wright, R.L. Dykstra. *Order restricted statistical inference.* — John Wiley and Sons, 1988.

разработанной С.Н. Роем. Для указанной модели зависимых наблюдений разработаны методы проверки линейных гипотез. Доказана теорема об ортогональном разложении случайной матрицы с зависимыми столбцами. Предложенный подход проиллюстрирован на примере задачи многомерного дисперсионного анализа.

2. Доказана монотонность функции мощности для широкого класса инвариантных критериев многомерного гауссовского статистического анализа. При исследовании функции мощности инвариантных критериев получен ряд новых результатов, касающихся стохастических свойств нецентрального распределения Уишарта.

3. Введено понятие матричного конуса и исследованы его основные свойства. На базе введенного понятия ставится задача о проверке многомерных конических гипотез, обобщающая соответствующие одномерные аналоги. Распределение критической статистики исследовано при гипотезе.

Методы исследования

В работе применяются общие методы теории вероятностей и математической статистики, функционального анализа, а также элементы матричной и линейной алгебры. Широко используется теория стохастических порядков случайных векторов.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Одновременно она направлена на приложения математической статистики. Предложенные в диссертации критерии могут быть полезны для решения практических задач, в которых распределение многомерных наблюдений с хорошей точностью можно считать нормальным.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей МГУ под руководством академика РАН, проф. А.Н. Ширяева в 2013 г.

- Семинар «Непараметрическая статистика и временные ряды» под руководством проф. В.Н. Тутубалина, проф. Ю.Н. Тюрина и доц. М.В. Болдина в МГУ — неоднократно делал доклады в 2008-2013 гг.

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в МГУ в 2013 г.

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в МГУ в 2012 г.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в МГУ в 2011 г.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в МГУ в 2010 г.
- Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения» в МГУ, посвященная столетию со дня рождения Б.В. Гнеденко в 2012 г.
- Международная конференция по многомерной статистике в Тарту, Эстония в 2011 г. (the 9th Tartu conference on Multivariate statistics).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 6 работах автора, из которых 2 входят в перечень ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка обозначений и списка литературы, насчитывающего 75 наименований и организованного в алфавитном порядка. Вначале приведен список используемой литературы на русском языке, затем - зарубежные источники. Результаты, полученные автором диссертации, оформлены в виде Теорем и Лемм; необходимые известные факты сформулированы в виде Утверждений с указанием источника цитирования. Нумерация утверждений, лемм, теорем и формул начинается в каждой главе заново и состоит из двух чисел: первое число относится к номеру главы, второе — к номеру соответствующего утверждения (леммы, теоремы или формулы). Общий объем работы составляет 97 страниц.

Краткое содержание диссертации

Диссертация посвящена статистическим критериям и их свойствам, которые возникают в многомерном гауссовском анализе, в частности в следующих трех случаях:

- Проверка линейных гипотез;
- Проверка гипотез о независимости многомерных признаков;
- Проверка конических гипотез.

Первая глава диссертации состоит из девяти разделов. В ней вводится вспомогательный аппарат матричных алгебраических модулей, а также исследуются методы проверки многомерных линейных гипотез для зависимых наблюдений.

В Разделах 1.1–1.3 изложены необходимые сведения из многомерного статистического анализа, которые используются в дальнейших разделах работы.

В Разделах 1.4–1.9 построена теория линейных моделей для набора зависимых наблюдений, совместное распределение которых имеет ковариационную структуру, заданную в виде произведения Кронекера двух положительно определенных матриц.

Рассмотрим левый алгебраический модуль $\mathbb{R}^p_n$, элементами которого являются $(p \times n)$-матрицы над кольцом $(p \times p)$-матриц из $\mathbb{R}^p_p$ с естественными операциями матричного сложения и умножения на $(p \times p)$-матрицу слева.

Определение. *Подмодулем $\mathcal{L}$ называется подмножество $\mathbb{R}^p_n$, замкнутое относительно операций суммы и умножения на $(p{\times}p)$-матрицу слева:*

1. *$(X + Y) \in \mathcal{L}$ для любых $X, Y \in \mathcal{L}$.*
2. *$KX \in \mathcal{L}$ для любых $X \in \mathcal{L}, K \in \mathbb{R}^p_p$.*

Определение. *Матричным скалярным произведением двух $(p \times n)$-матриц $X, Y \in \mathbb{R}^p_n$ будем называть $(p \times p)$-матрицу*

$$\langle X, Y \rangle_Q = XQY',$$

где Q — положительно определенная $(n{\times}n)$-матрица (обозначение: $Q \succ 0$ или $Q \in \mathbb{P}_n$). Будем говорить, что матрица Q определяет введенное матричное скалярное произведение.

Определение. *Ортогональным дополнением к подмодулю $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^p_n$ назовем подмодуль*

$$\mathcal{L}^\perp = \{Y |\ Y \in \mathbb{R}^p_n, \langle Y, X \rangle_Q = 0 \text{ для любого } X \in \mathcal{L}\}.$$

Определение. *Проекцией $X \in \mathbb{R}^p_n$ на подмодуль $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^p_n$ назовем $(p \times n)$-матрицу $Z = \mathrm{proj}_{\mathcal{L}}(X)$, если*

1. *$Z \in \mathcal{L}$;*
2. *$X - Z \in \mathcal{L}^\perp$.*

Ю. Н. Тюриным[20] было показано, что для любого подмодуля $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^p_n$ существует линейное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $(g_1, \ldots, g_p)' \in \mathcal{L}$, $g_i \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1,p}$, тогда и только тогда, когда $g_i \in L, i = \overline{1,p}$. Линейное

[20] Ю.Н. Тюрин. *Многомерная статистика: гауссовские линейные модели.* — Издательство МГУ, 2011.

подпространство L будем называть *порождающим* для матричного подмодуля $\mathcal{L}$.

Размерностью матричного подмодуля $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^p_n$ (обозначение: $\dim \mathcal{L}$) будем далее называть размерность порождающего его линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^1_n$.

В Разделе 1.3 приводится ряд свойств нецентрального распределения Уишарта, которые используются в дальнейшем в настоящей работе.

Определение. *Случайная $(p \times p)$-матрица $W_p(n, \Sigma, \Delta)$ имеет нецентральное распределение Уишарта с n степенями свободы, ковариационной матрицей Σ и параметром нецентральности Δ, если данная матрица может быть представлена в виде:*

$$W_p(n, \Sigma, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + m_i)(\xi_i + m_i)',$$

где случайные векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ суть независимые одинаково распределенные (н.о.р.) $N_p(0, \Sigma)$, и параметр нецентральности

$$\Delta = \Sigma^{-\frac{1}{2}} M M' \Sigma^{-\frac{1}{2}},$$

где $M = (m_1, \ldots, m_n)$. В случае, если $\Delta = 0$, распределение Уишарта называется центральным и обозначается $W_p(n, \Sigma)$.

В Разделе 1.4 рассматривается набор зависимых наблюдений $x_1, \ldots, x_q$, ковариационная структура совместного распределения которых определяется произведением Кронекера двух положительно определенных матриц:

$$\mathrm{Cov}(x_i, x_j) = \psi_{ij} \Sigma, \;\; \Psi = (\psi_{ij}) \succ 0, \;\; \Sigma \succ 0.$$

Точнее, рассмотрим $(p \times q)$-матрицу $X = (x_1, \ldots, x_q)$, состоящую из наблюдений $x_1, \ldots, x_q$, где pq-вектор $vec(X) = (x'_1, \ldots, x'_q)'$ по предположению является нормально распределенным со средним $vec(M) = (m'_1, \ldots, m'_q)'$ и положительно определенной ковариационной матрицей Λ. Предположим, что $(pq \times pq)$-матрица Λ может быть задана в виде произведения Кронекера двух положительно определенных матриц, т.е. $\Lambda = \Psi \otimes \Sigma$, где $(q \times q)$-матрица $\Psi = (\psi_{ij})$ и $(p \times p)$-матрица $\Sigma = (\sigma_{ij})$, и матрицы Ψ, Σ по предположению являются положительно определенными. Таким образом, случайная матрица X имеет многомерное нормальное распределение

$$X \sim N^p_q(M, \Lambda), \;\; \Lambda = \Psi \otimes \Sigma.$$

В монографии М. С. Сриваставы и С. Г. Хатри[21] используется эквивалентное обозначение

$$X \sim N_{p,q}\left(M, \Sigma, \Psi\right),$$

которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

[21] M.S. Srivastava, C.G. Khatri. *An Introduction to Multivariate Statistics.* — North Holland, New York, 1979.

Лемма 1.3 *Пусть* $Y \sim N_{p,q}(M, A, B)$, *где* A, B — *неотрицательно определенные матрицы (обозначение:* $A \succcurlyeq 0$, $B \succcurlyeq 0$ *или* $A \in \mathbb{PS}_p$, $B \in \mathbb{PS}_q$*). Тогда* $Y' \sim N_{q,p}(M', B, A)$.

Далее в Разделе 1.5 с использованием указанной леммы 1.3 при предположении об одинаковой распределенности наблюдений методом С.Н. Роя получены состоятельные и несмещенные оценки параметров модели.

Теорема 1.1 *Пусть* $X_1, \ldots, X_N$ *суть независимые одинаково распределенные* $N_{p,q}(M, \Sigma, \Psi_\rho)$, *где* $\Psi_\rho = (\psi_{ij})$, $\psi_{ii} = 1$, $i = \overline{1, q}$. *Тогда*

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{(N-1)q} \sum_{j=1}^{N} (X_j - \overline{X})(X_j - \overline{X})'$$

является несмещенной и состоятельной оценкой Σ *при* $N \to \infty$.

Теорема 1.2 *Пусть* $X_1, \ldots, X_N$ *суть независимые одинаково распределенные* $N_{p,q}(M, \Sigma, \Psi_\rho)$, *где* $\Psi_\rho = (\psi_{ij})$, $\psi_{ii} = 1$, $i = \overline{1, q}$. *Тогда*

$$\widehat{\psi_{kl}} = \frac{1}{Np} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{tr} \left[\widehat{\Sigma}^{-1} (x_{kj} - \overline{x}_{(k)})(x_{lj} - \overline{x}_{(l)})' \right]$$

является состоятельной оценкой ψ_{kl}, $k \neq l$, $k, l = \overline{1, q}$ *при* $N \to \infty$.

В Разделе 1.6 рассматривается общий случай без предположения об одинаковой распределенности многомерных наблюдений.

С использованием леммы 1.3 показано, что если некоторая случайная обратимая матрица $\widehat{\Sigma}$ является состоятельной оценкой параметра Σ, то случайная матрица

$$\widehat{\Psi} = \frac{1}{Np} \sum_{j=1}^{N} (X_j - \overline{X})' \widehat{\Sigma}^{-1} (X_j - \overline{X}), \tag{1}$$

является состоятельной оценкой параметра Ψ. Аналогично, если некоторая случайная обратимая матрица $\widehat{\Psi}$ является состоятельной оценкой параметра Ψ, то случайная матрица

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{Nq} \sum_{k=1}^{N} (X_k - \overline{X}) \widehat{\Psi}^{-1} (X_k - \overline{X})', \tag{2}$$

является состоятельной оценкой матрицы Σ. В работе М.С. Сриваставы, Т. Нахтман, Д. фон Розена[22] показано, что система уравнений (1) и (2) с неизвестными матрицами $\widehat{\Psi}$ и $\widehat{\Sigma}$ может быть решена алгоритмически при некоторых дополнительных ограничениях.

В Разделе 1.7 разработаны методы проверки линейных гипотез для зависимых наблюдений с рассматриваемой ковариационной структурой.

[22] M.S. Srivastava, T. Nahtman, D. von Rosen. "Estimation of interclass correlations in familial data". — *Math. Meth. of Statist.*, Vol. 17, No. 4, pp. 357-370, 2008.

Приведенная ниже теорема показывает, что распределение $N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$, где $\Sigma \succ 0$, $\Psi \succ 0$ можно сделать свободным от параметров Σ и Ψ с помощью линейных преобразований.

Теорема 1.3 *Пусть* $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$*, где* $\Sigma \succ 0$*,* $\Psi \succ 0$*. Тогда*

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} X \Psi^{-\frac{1}{2}} \sim N_{p,n}(\Sigma^{-\frac{1}{2}} M \Psi^{-\frac{1}{2}}, I_p, I_n).$$

Следующая основная теорема описывает разложение случайной матрицы наблюдений в сумму проекций на ортогональные подмодули.

Теорема 1.4 *Пусть* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *— случайная* $(p \times n)$*-матрица, имеющая распределение* $N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$*, где* $\Sigma \succ 0$*,* $\Psi \succ 0$*. Пусть* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_m$ *— взаимно ортогональные подмодули* $\mathbb{R}^p_n$*, прямая сумма которых образует* $\mathbb{R}^p_n$*:*

$$\mathbb{R}^p_n = \mathcal{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_m,$$

причем матричное скалярное произведение определяется матрицей Ψ^{-1}*. Рассмотрим разложение* $X \in \mathbb{R}^p_n$ *в прямую сумму ортогональных проекций на подмодули* $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m$*:*

$$X = \operatorname*{proj}_{\mathcal{L}_1}(X) + \ldots + \operatorname*{proj}_{\mathcal{L}_m}(X).$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

a) случайные $(p \times n)$*-матрицы* $\operatorname{proj}_{\mathcal{L}_i}(X)$*,* $i = \overline{1, m}$ *независимы, распределены нормально и* $E \operatorname{proj}_{\mathcal{L}_i}(X) = \operatorname{proj}_{\mathcal{L}_i}(EX)$*.*

b) $\langle \operatorname{proj}_{\mathcal{L}_i}(X), \operatorname{proj}_{\mathcal{L}_i}(X) \rangle_{\Psi^{-1}} \sim W_p(\dim \mathcal{L}_i, \Sigma, \Delta_i)$*, где случайная* $(p \times p)$*-матрица* $W_p(\dim \mathcal{L}_i, \Sigma, \Delta_i)$ *распределена по Уишарту с параметром нецентральности*

$$\Delta_i = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \langle \operatorname*{proj}_{\mathcal{L}_i}(EX), \operatorname*{proj}_{\mathcal{L}_i}(EX) \rangle_{\Psi^{-1}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}.$$

В Разделе 1.8 на основе теоремы 1.4 строится линейная модель для наблюдений с рассматриваемой ковариационной структурой, заданной в виде произведения Кронекера двух положительно определенных матриц.

Определение. *Матрица* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *следует линейной гауссовской модели с ковариационной структурой, заданной в виде произведения Кронекера двух положительно определенных матриц, если*

a) $EX \in \mathcal{U}$ *для некоторого заданного подмодуля* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p_n$*;*

b) $X = (x_1, \ldots, x_n) \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$*, где* $\Sigma \succ 0$*,* $\Psi \succ 0$*.*

Матрица Ψ при этом считается известной, а матрица Σ неизвестна. Линейной гипотезой в линейной модели назовем гипотезу

$$H : EX \in \mathcal{U}_1, \tag{3}$$

против альтернативы

$$A : EX \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1,$$

где $\mathcal{U}_1$ — заданный подмодуль $\mathcal{U}$. Разложим $\mathcal{U}$ в ортогональную сумму подмодулей:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2,$$

где матричное скалярное произведение определяется матрицей Ψ^{-1}. Рассмотрим разложение $\mathbb{R}_n^p$ на три попарно ортогональных подмодуля:

$$\mathbb{R}_n^p = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}^{\perp}.$$

Случайные матрицы

$$S_1 := \langle \operatorname*{proj}_{\mathcal{U}^{\perp}} X, \operatorname*{proj}_{\mathcal{U}^{\perp}} X \rangle_{\Psi^{-1}}, \; S_2 := \langle \operatorname*{proj}_{\mathcal{U}_2} X, \operatorname*{proj}_{\mathcal{U}_2} X \rangle_{\Psi^{-1}}$$

статистически независимы и распределены по Уишарту, где проекции и скалярный квадрат матриц определяются из теоремы 1.4. Пусть $\dim \mathcal{U} = m$, $\dim \mathcal{U}_1 = m_1$ и $\dim \mathcal{U}_2 = m_2$, тогда

$$S_1 \sim W_p(n - m, \Sigma).$$

Если гипотеза (3) верна, то имеет место

$$S_2 \sim W_p(m_2, \Sigma).$$

В качестве аргументов критических статистик могут быть использованы собственные значения матрицы $S_2 S_1^{-1}$.

В Разделе 1.9 разработанная теория иллюстрируется на примере задачи многомерного однофакторного дисперсионного анализа для наблюдений с ковариационной структурой, которая задана в виде произведения Кронекера двух положительно определенных матриц.

Вторая глава диссертации посвящена свойству монотонности функции мощности инвариантных критериев, возникающих в различных моделях многомерного гауссовского анализа.

Разделы 2.1–2.2 посвящены инвариантным критериям, возникающим при проверке линейных гипотез и гипотез о независимости многомерных признаков.

В Разделах 2.3–2.5 доказывается монотонность функции мощности инвариантных критериев, являющихся монотонными выпуклыми функциями, аргументами которых являются элементарные симметрические многочлены или усеченные суммы от корней характеристического уравнения:

$$\det\left[W_p(n, \Sigma, \Delta) - h \cdot W_p(m, \Sigma)\right] = 0,$$

где $\Sigma \succ 0$, $p \leqslant m$, и участвующие в уравнении матрицы Уишарта статистически независимы. Корни данного характеристического уравнения совпадают с корнями уравнения

$$\det\left[W_p^{-\frac{1}{2}}(m, \Sigma) W_p(n, \Sigma, \Delta) W_p^{-\frac{1}{2}}(m, \Sigma) - h \cdot I_p\right] = 0,$$

которое в силу свойств матрицы Уишарта эквивалентно следующему

$$\det\left[W_p^{-\frac{1}{2}}(m,I_p)W_p(n,I_p,\Delta)W_p^{-\frac{1}{2}}(m,I_p)-h\cdot I_p\right]=0.$$

Таким образом, характеристические корни $h_1,\dots,h_p$ зависят только от параметра нецентральности Δ.

Инвариантные тесты, часто используемые в приложениях:

1. Статистика Уилкса: $\Lambda_{Wilks}=\prod\limits_{i=1}^{p}\frac{1}{1+h_i}$;
2. След Лоули-Хотеллинга: $\mathrm{Tr}_{Lawley-Hotelling}=\sum\limits_{i=1}^{p}h_i$;
3. След Пиллаи-Бартлетта: $\mathrm{Tr}_{Pillai-Bartlett}=\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{h_i}{1+h_i}$;
4. Максимальный корень Роя: $\mathrm{R}_{Roy}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p}(h_i)$.

В Разделе 2.3 приводится гипотеза о монотонности функции мощности инвариантных критериев, которая была сформулирована в работе И. Олкина, М. Д. Перлмана[23] следующим образом.

Гипотеза 2.1 *(И. Олкин, М.Д. Перлман) Пусть функция $\phi(l_1,\dots,l_p)$ монотонно не убывает по каждому аргументу, где $l_i=l_i(\Delta)$ — i-е по величине собственное значение матрицы Уишарта $W_p(n,I_p,\Delta)$. Тогда мощность теста с критической областью $(\phi(l_1,\dots,l_p)\geqslant const)$ монотонно не убывает при росте собственных значений $\delta_1,\dots,\delta_p$ параметра нецентральности Δ.*

И. Олкин и М.Д. Перлман показали, что из указанной гипотезы следует монотонность функции мощности для инвариантных критериев общего вида, а именно:

Гипотеза 2.2 *Пусть функция $\phi(h_1,\dots,h_p)$ монотонно не убывает по каждому аргументу, где $h_i=h_i(\Delta)$ — i-е по величине собственное значение матрицы $S_2(\Delta)S_1^{-1}$. Тогда мощность теста с критической областью $(\phi(h_1,\dots,h_p)\geqslant const)$ монотонно не убывает при росте собственных значений $\delta_1,\dots,\delta_p$ параметра нецентральности Δ.*

В настоящей работе следствие гипотезы 2.2 из гипотезы 2.1 доказано альтернативным способом с помощью свойств стохастических порядков случайных векторов. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1 *Пусть $S_1\sim W_p(m,I_p)$, $S_2(\Delta)\sim W_p(n,I_p,\Delta)$, $p\leqslant m$, причем матрицы S_1 и $S_2(\Delta)$ статистически независимы. Пусть вектор, составленный из выписанных по убыванию собственных значений матрицы*

[23] I. Olkin, M.D. Perlman. "Unbiasedness of invariant tests for MANOVA and other multivariate problems". — *Ann. Math. Statist.*, Vol. 8, pp. 1326-1341, 1980.

$S_2(\Delta)$, возрастает в смысле стохастического порядка случайных векторов (обозначение: $\leqslant_{st}$). Тогда векторы, составленные из выписанных по убыванию собственных значений случайных матриц

$$A(\Delta) = S_2(\Delta)(S_2(\Delta) + S_1)^{-1}, \; B(\Delta) = S_1^{-\frac{1}{2}} S_2(\Delta) S_1^{-\frac{1}{2}},$$

также стохастически возрастают.

В Разделе 2.4 исследуются критерии, которые являются монотонными по каждому аргументу функциями, зависящими от элементарных симметрических многочленов от собственных значений матриц $W_p(n, I_p, \Delta)$ и $W_p(n, I_p, \Delta) W_p(m, I_p)^{-1}$.

Следующая теорема утверждает, что инвариантные критерии, которые являются монотонными функциями от элементарных симметрических многочленов от собственных значений матрицы Уишарта, имеют монотонную функцию мощности.

Теорема 2.2 *Пусть функция $\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ монотонно не убывает по каждому аргументу, где $\sigma_i = \sigma_i(l_1(\Delta), \ldots, l_p(\Delta))$ — элементарный симметрический многочлен степени i от собственных значений $l_1(\Delta), \ldots, l_p(\Delta)$ матрицы Уишарта $W_p(n, I_p, \Delta)$. Тогда мощность теста с критической областью ($\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \geqslant const$) монотонно не убывает при росте упорядоченных по убыванию собственных значений $\delta_1, \ldots, \delta_p$ параметра нецентральности Δ.*

Обобщением теоремы 2.2 является следующее утверждение.

Теорема 2.3 *Пусть вектор $\sigma(\delta_1, \ldots, \delta_p)$ составлен из всех главных миноров матрицы $W_p(n, I_p, \Delta)$, где $\delta_1, \ldots, \delta_p$ — выписанные по убыванию собственные значения матрицы Δ. Тогда случайный вектор $\sigma(\delta_1, \ldots, \delta_p)$ стохастически возрастает по каждому из своих аргументов.*

Далее перейдем к критериям, зависящим от элементарных симметрических многочленов от собственных значений матрицы $W_p(n, I_p, \Delta) W_p(m, I_p)^{-1}$.

Введем понятие монотонно возрастающего выпуклого порядка.

Определение. *Случайный вектор x не превосходит случайного вектора y в смысле монотонно возрастающего выпуклого порядка (обозначение: $x \leqslant_{icx} y$), если для любой выпуклой монотонно возрастающей функции $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой определены математические ожидания $E\phi(x)$ и $E\phi(y)$:*

$$E\phi(x) \leqslant E\phi(y).$$

Следующая лемма, которая может быть доказана с использованием теоремы Т.В. Андерсона[24], утверждает, что вектор, координаты которого имеют нецентральное хи-квадрат распределение, возрастает в смысле порядка $\leqslant_{icx}$ при согласованном росте параметров нецентральности координат этого случайного вектора.

[24] T.W. Anderson. "The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities". — *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 6, pp. 170-176, 1955.

Лемма 2.11 *Пусть $x_i(\gamma) = (x_{i1}, \dots, x_{ip_i})'$, $i = \overline{1,n}$ нормальный случайный p_i-вектор с математическим ожиданием $a_i(\gamma) = \gamma \cdot (a_{i1}, \dots, a_{ip_i})'$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и матрицей ковариаций Σ_i. Пусть совместное распределение случайных векторов $x_1(\gamma), \dots, x_n(\gamma)$ является гауссовским. Введем случайный вектор $u(\gamma) = (\|x_1(\gamma)\|^2, \dots, \|x_n(\gamma)\|^2)$, где $\|\cdot\|$ обозначает стандартную евклидову норму. Тогда*

1. *для любой выпуклой монотонно неубывающей функции $\phi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$*

$$\phi(u(\gamma_1)) \leqslant_{st} \phi(u(\gamma_2)), \text{ если } |\gamma_1| \leqslant |\gamma_2|;$$

2. *$u(\gamma_1) \leqslant_{icx} u(\gamma_2)$, если $|\gamma_1| \leqslant |\gamma_2|$.*

Для двух фиксированных p-векторов $a = (a_1, \dots, a_p)$ и $b = (b_1, \dots, b_p)$ будем писать $a \preccurlyeq b$, если $a_i \leqslant b_i$, $i = \overline{1,p}$, и $a \prec b$, если $a \preccurlyeq b$, и существует j, $1 \leqslant j \leqslant p$, что $a_j < b_j$.

Теперь рассмотрим случайный вектор $\sigma(\Delta) = (\sigma_1(\Delta), \dots, \sigma_p(\Delta))$, который составлен из элементарных симметрических многочленов от собственных значений матрицы $S_2(\Delta)S_1^{-1}$, где

$$S_2(\Delta) \sim W_p(n, I_p, \Delta),\ S_1 \sim W_p(m, I_p),\ p \leqslant m,$$

и матрицы $S_2(\Delta)$ и S_1 статистически независимы. Следующую теорема описывает стохастические свойства вектора $\sigma(\Delta)$.

Теорема 2.4 *Пусть Δ_1 и Δ_2 две неотрицательно определенные $(p \times p)$-матрицы с упорядоченными по убыванию собственными значениями $\delta_1 = (\delta_{11}, \dots, \delta_{1p})$, $\delta_2 = (\delta_{21}, \dots, \delta_{2p})$ соответственно. Тогда если $\delta_1 \preccurlyeq \delta_2$, то*

1. *для любой выпуклой монотонно неубывающей функции $\phi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$*

$$\phi(\sigma(\Delta_1)) \leqslant_{st} \phi(\sigma(\Delta_2));$$

2. *$\sigma(\Delta_1) \leqslant_{icx} \sigma(\Delta_2)$.*

Важным следствием данной теоремы является следующее утверждение о монотонности функции мощности широкого класса инвариантных критериев.

Теорема 2.5 *Пусть выпуклая функция $\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ монотонно не убывает по каждому аргументу, где σ_i — элементарный симметрический многочлен степени i от собственных значений матрицы $S_2(\Delta)S_1^{-1}$. Тогда мощность теста с критической областью $(\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \geqslant const)$ монотонно не убывает при росте упорядоченных по убыванию собственных значений $\delta_1, \dots, \delta_p$ параметра нецентральности Δ.*

Следствие 2.4 *Следующие тесты имеют монотонные функции мощности.*

1. *Мощность статистики Уилкса $\Lambda_{Wilks} = \prod\limits_{i=1}^{p} \frac{1}{1+h_i}$ с критической областью $(\Lambda_{Wilks} \leqslant const)$ монотонно не убывает при росте собственных значений параметра нецентральности Δ.*

2. *Мощность статистики Лоули-Хотеллинга* $\mathrm{Tr}_{Lawley-Hotelling} = \sum\limits_{i=1}^{p} h_i$ *с критической областью* ($\mathrm{Tr}_{Lawley-Hotelling} \geqslant const$) *монотонно не убывает при росте собственных значений параметра нецентральности* Δ.

В Разделе 2.5 доказывается свойство монотонности функции мощности инвариантных критериев вида

$$h_1 + \ldots + h_k,\ k = \overline{1,p}.$$

Отметим, что собственные значения матриц $S_2(\Delta)S_1^{-1}$ и $S_1^{-\frac{1}{2}}S_2(\Delta)S_1^{-\frac{1}{2}}$ совпадают, поскольку данные матрицы являются подобными. Усеченная сумма $h_1 + \ldots + h_k$, $k = \overline{1,p}$ является решением следующей экстремальной задачи (см. Ф. Р. Гантмахер[25]):

$$h_1 + \ldots + h_k = \sup_{A'A=I_k} \mathrm{tr}(A'S_1^{-\frac{1}{2}}S_2(\Delta)S_1^{-\frac{1}{2}}A),$$

где $A = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}_k^p$, $k \leqslant p$. Рассмотрим вектор $h(\Delta)$, состоящий из усеченных сумм:

$$h(\Delta) = (h_1(\Delta), h_1(\Delta) + h_2(\Delta), \ldots, h_1(\Delta) + \ldots + h_p(\Delta)).$$

Следующую теорема описывает стохастические свойства вектора $h(\Delta)$.

Теорема 2.6 *Пусть* Δ_1 *и* Δ_2 *две неотрицательно определенные* $(p\times p)$*-матрицы с упорядоченными по убыванию собственными значениями* $\delta_1 = (\delta_{11}, \ldots, \delta_{1p})$, $\delta_2 = (\delta_{21}, \ldots, \delta_{2p})$ *соответственно. Тогда если* $\delta_1 \preccurlyeq \delta_2$, *то*

1. *для любой выпуклой монотонно неубывающей функции* $\phi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$

$$\phi(h(\Delta_1)) \leqslant_{st} \phi(h(\Delta_2));$$

2. $h(\Delta_1) \leqslant_{icx} h(\Delta_2)$.

Теорема 2.6 показывает, что функция мощности тестов, которые являются усеченными суммами собственных значений указанных матриц, монотонна. В частности имеет место важное следствие.

Следствие 2.5 *Функция мощности тестовой статистики С.Н. Роя* $\mathrm{R}_{Roy} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant p}(h_i)$ *монотонно не убывает при росте собственных значений параметра нецентральности* Δ.

Итоговым результатом Главы 2 является следующая теорема.

Теорема 2.7 *Пусть* $S_2(\Delta)$ *и* S_1 *— независимые случайные матрицы, где*

$$S_2(\Delta) \sim W_p(n, I_p, \Delta),\ S_1 \sim W_p(m, I_p),\ p \leqslant m.$$

[25] Ф.Р. Гантмахер. *Теория матриц.* — М.: Физматлит, 2004.

Пусть $h_1(d), \ldots, h_p(d)$ — собственные значения матрицы $S_2(\Delta)S_1^{-1}$, выписанные по убыванию, где $d = (d_1, \ldots, d_p)$ — упорядоченные по убыванию собственные значения параметра нецентральности Δ. Пусть также для $h_i = h_i(d)$, $i = \overline{1,p}$

$$\sigma_i(d) = \sigma_i(h_1, \ldots, h_p),\ s_i(d) = \sum_{j=1}^{i} h_j,\ i = \overline{1,p},$$

соответственно элементарные симметрические многочлены и усеченные суммы от собственных значений $h_1, \ldots, h_p$. Тогда мощность теста с критической областью $(\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_p, s_1, \ldots, s_p) \geqslant const)$ монотонно не убывает при росте упорядоченных по убыванию собственных значений $d_1, \ldots, d_p$ параметра нецентральности Δ.

Третья глава диссертации посвящена проверке конических гипотез, определение которых для случая многомерных наблюдений будет дано ниже.

В Разделах 3.1–3.3 вводятся понятия матричного и обобщенного матричного конусов, а также исследуются их основные свойства.

В Разделах 3.4–3.5 с использованием введенных понятий строится теория проверки конических гипотез в многомерном гауссовском анализе.

Рассмотрим набор наблюдений, состоящий из n независимых гауссовских случайных p-мерных векторов $x_1, \ldots, x_n$, где $x_i \sim N_p(m_i, \Sigma)$, $i = \overline{1,n}$. Составим случайную $(p \times n)$-матрицу $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для прикладных задач интерес представляют гипотезы вида

$$m_1 \prec \ldots \prec m_n \tag{4}$$

против общей альтернативы, состоящей в том, что хотя бы одно из неравенств в цепочке (4) не выполнено. При этом частичный порядок "$\prec$" определяется некоторым выпуклым конусом $U \subset \mathbb{R}^p$:

$$(v_2 - v_1) \in U \Leftrightarrow v_1 \prec v_2.$$

Наряду с линейными гипотезами интерес представляют методы проверки, так называемых, многомерных конических гипотез вида

$$H_0 : EX = M \in \mathcal{K}$$

против альтернативы

$$H_1 : M \notin \mathcal{K},$$

где $\mathcal{K}$ — матричный конус в $\mathbb{R}_n^p$. Как будет показано, гипотезы вида (4) относятся к коническим при некоторых дополнительных ограничениях.

Определение. *Пусть K — выпуклый конус в линейном пространстве $\mathbb{R}_n^1$. Определим соответствующий выпуклый конус $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}_n^p$ следующим образом:*

$$\mathcal{K} = \left\{ X|\ X = (f_1, \ldots, f_p)', f_i \in K, i = \overline{1,p} \right\}.$$

Множество $\mathcal{K}$ будем называть матричным конусом, порожденным выпуклым конусом $K \subset \mathbb{R}^1_n$.

Лемма 3.1 *Множество $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^p_n$ является матричным конусом тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ удовлетворяет свойствам*

1. *$(X_1 + X_2) \in \mathcal{K}$ для любых $X_1, X_2 \in \mathcal{K}$.*

2. *$AX \in \mathcal{K}$ для любой $(p \times p)$-матрицы A с неотрицательными элементами и любого $X \in \mathcal{K}$.*

Таким образом, матричный конус $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^p_n$ может быть определен как левый алгебраический полумодуль над полукольцом $\mathbb{R}^p_{p+}$ квадратных $(p \times p)$-матриц с неотрицательными элементами.

Следующая лемма описывает еще один способ представления матричного конуса.

Лемма 3.5 *Пусть множество $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^p_n$ состоит из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^p$, что $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$, где U_0, U — выпуклые конусы в $\mathbb{R}^p$, инвариантные относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа. Тогда $\mathcal{K}$ — матричный конус в $\mathbb{R}^p_n$.*

Из леммы 3.5 следует, что матричный конус $\mathcal{K}$, состоящий из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \ldots, x_n)$, может быть задан с помощью системы неравенств:

$$x_1 \prec \ldots \prec x_n, \tag{5}$$

где $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$, и выпуклые конусы U_0, U инвариантны относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа.

Множество конусов в $\mathbb{R}^p$, которые инвариантны относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа описывается следующим образом.

Лемма 3.6 *Пусть выпуклый конус U в $\mathbb{R}^p$ инвариантен относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа. Тогда этот конус является одним из следующих:*

1. *пространство $\mathbb{R}^p$;*

2. *положительный ортант;*

3. *отрицательный ортант;*

4. *точка $\{0\}$.*

В связи с тем, что множество матричных конусов, которые могут быть заданы неравенством (5), ограничено леммой 3.6, возникает необходимость расширить определение матричного конуса. Это возможно в случае перехода от полукольца $\mathbb{R}^p_{p+}$ к полукольцам, содержащимся в нем.

Введем следующие обозначения:

1. D_p — полукольцо диагональных $(p \times p)$-матриц с неотрицательными элементами.

2. E_p — полукольцо скалярных $(p \times p)$-матриц вида λI_p, $\lambda \geqslant 0$, где I_p — тождественный оператор.

Отметим, что имеет место вложение полуколец: $E_p \subset D_p \subset \mathbb{R}^p_{p+}$.

В Разделе 3.2 соответствующие обобщенные матричные конусы определяются следующим образом.

Определение. *Обобщенным матричным конусом $\mathcal{K}_D \subset \mathbb{R}^p_n$ называется левый алгебраический полумодуль над полукольцом D_p.*

Определение. *Обобщенным матричным конусом $\mathcal{K}_E \subset \mathbb{R}^p_n$ называется левый алгебраический полумодуль над полукольцом E_p.*

В силу вышесказанного для определенного обобщенного матричного конуса $\mathcal{K}_D$ выполнено следующее свойство.

Лемма 3.7 *$\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p тогда и только тогда, когда существует набор выпуклых конусов $C_1, \ldots, C_p \subset \mathbb{R}^1_n$ таких, что*

$$\mathcal{K}_D = \left\{X |\ X = (g_1, \ldots, g_p)', g_i \in C_i, i = \overline{1,p}\right\}.$$

Будем говорить, что конусы $C_1, \ldots, C_p$ порождают обобщенный матричный конус $\mathcal{K}_D$.

Для обобщенных матричных конусов также выполнена лемма 3.5, однако ее условия можно ослабить следующим образом.

Лемма 3.10 *Пусть множество $\mathcal{K}_D \subset \mathbb{R}^p_n$ состоит из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^p$, что $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$, где U_0, U — выпуклые конусы в $\mathbb{R}^p$, инвариантные относительно умножения координат на неотрицательные числа. Тогда $\mathcal{K}_D$ является обобщенным матричным конусом над полукольцом D_p в $\mathbb{R}^p_n$.*

Лемма 3.11 *Пусть множество $\mathcal{K}_E \subset \mathbb{R}^p_n$ состоит из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^p$, что $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$, где U_0, U — выпуклые конусы в $\mathbb{R}^p$. Тогда $\mathcal{K}_E$ является обобщенным матричным конусом над полукольцом E_p в $\mathbb{R}^p_n$.*

Из лемм 3.10 и 3.11 следует, что обобщенный матричный конус, состоящий из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \ldots, x_n)$, может быть задан с помощью системы неравенств:

$$x_1 \prec \ldots \prec x_n,$$

где $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$.

В случае обобщенного матричного конуса $\mathcal{K}_D$ над полукольцом D_p выпуклые конусы U_0, U инвариантны относительно умножения координат на неотрицательные числа.

В случае обобщенного матричного конуса $\mathcal{K}_E$ над полукольцом E_p выпуклые конусы U_0, U произвольны.

Дадим определение двойственного матричного конуса.

Определение. *Пусть $\mathcal{K}$ — матричный конус в $\mathbb{R}^p_n$, порожденный замкнутым выпуклым конусом K в $\mathbb{R}^1_n$. Тогда двойственным конусом к конусу $\mathcal{K}$ называется:*

$$\mathcal{K}^{\perp} = \left\{X|\ X = (g_1, \ldots, g_p)', g_i \in K^{\perp}, i = \overline{1,p}\right\}.$$

Аналогичным образом можно определить конус в $\mathbb{R}^p_n$, который является двойственным к обобщенному матричному конусу над полукольцом D_p.

Определение. *Пусть $\mathcal{K}_D$ — обобщенный замкнутый матричный конус над полукольцом D_p, заданный в виде:*

$$\mathcal{K}_D = \left\{X|\ X = (g_1, \ldots, g_p)', g_i \in C_i, i = \overline{1,p}\right\},$$

где $C_1, \ldots, C_p$ — набор выпуклых замкнутых конусов в $\mathbb{R}^1_n$. Тогда двойственным конусом к конусу $\mathcal{K}_D$ называется:

$$\mathcal{K}_D^{\perp} = \left\{X|\ X = (g_1, \ldots, g_p)', g_i \in C_i^{\perp}, i = \overline{1,p}\right\}.$$

Далее будем работать с обобщенными замкнутыми матричными конусами $\mathcal{K}_D$, заданными в виде

$$\mathcal{K}_D = \left\{X|\ X = (g_1, \ldots, g_p)', g_i \in C_i, i = \overline{1,p}\right\}, \tag{6}$$

где $C_1, \ldots, C_p$ — набор замкнутых выпуклых конусов в $\mathbb{R}^1_n$.

В Разделе 3.3 вводится понятие проекции на обобщенный замкнутый матричный конус в $\mathbb{R}^p_n$.

Определение. *Пусть $\mathcal{K}_D$ — обобщенный замкнутый матричный конус в $\mathbb{R}^p_n$ над полукольцом D_p, заданный в (6). Тогда для $X = (f_1, \ldots, f_p)' \in \mathbb{R}^p_n$, $f_i \in \mathbb{R}^1_n$, $i = \overline{1,p}$ проекцией на $\mathcal{K}_D$ называется*

$$\operatorname*{proj}_{\mathcal{K}_D}(X) = (\operatorname*{proj}_{C_1}(f_1), \ldots, \operatorname*{proj}_{C_p}(f_p))'.$$

В Разделе 3.4 на базе введенных понятий исследуются методы проверки конических гипотез для набора зависимых наблюдений, совместное распределение которых имеет ковариационную структуру, заданную в виде произведения Кронекера двух положительно определенных матриц.

Рассмотрим набор наблюдений, состоящий из n гауссовских случайных p-мерных векторов $x_1, \ldots, x_n$, где $x_i = (\xi_i + m_i) \sim N_p(m_i, q_{ii} \cdot \Sigma)$, $\Sigma \succ 0$, $i = \overline{1,n}$. Составим случайную $(p \times n)$-матрицу $X = \Xi + M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $M = EX = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Будем предполагать, что

$$X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, Q).$$

В случае, если положительно определенная матрица Q совпадает с λI_n, $\lambda > 0$, гауссовские векторы x_i, $i = \overline{1,n}$ являются независимыми.

Нашей целью является построение статистики для проверки гипотезы

$$H_0 : M \in \mathcal{K}_D \tag{7}$$

против альтернативы

$$H_1 : M \notin \mathcal{K}_D,$$

где $\mathcal{K}_D$ — обобщенный замкнутый матричный конус над полукольцом D_p.

Определение. *Будем называть обобщенный матричный конус $\mathcal{K}_D$ над полукольцом D_p многогранным, если порождающие его выпуклые конусы C_i, $i = \overline{1,p}$, из* (6) *являются многогранными.*

Распределение критической статистики опишем в случае, когда рассматриваемый обобщенный замкнутый матричный конус является многогранным.

Пусть матрицы, определяющие ковариационную структуру X, заданы с точностью до неизвестных множителей q^2 и σ^2, т.е. равны q^2Q и $\sigma^2\Sigma$ соответственно. Пусть для q^2 дана не зависящая от X оценка $\hat{q}^2$, и для σ^2 дана не зависящая от X и $\hat{q}^2$ оценка $\hat{\sigma}^2$, причем

$$k\hat{\sigma}^2 \sim \sigma^2\chi^2(k), \; l\hat{q}^2 \sim q^2\chi^2(l).$$

Из результатов Главы 1 следует, что распределение случайной матрицы X можно преобразовать следующим образом:

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}XQ^{-\frac{1}{2}} \sim q \cdot \sigma \cdot N_{p,n}(\Sigma^{-\frac{1}{2}}MQ^{-\frac{1}{2}}, I_p, I_n).$$

Класс обобщенных замкнутых матричных конусов над полукольцом D_p инвариантен относительно умножения на $(p \times p)$-матрицу слева. Учитывая это замечание, в качестве критической статистики рассмотрим

$$H(X) = \hat{q}^{-2} \cdot \hat{\sigma}^{-2} \cdot \left[\operatorname*{proj}_{(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathcal{K}_D)^{\perp}} (\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)\right] Q^{-1} \left[\operatorname*{proj}_{(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathcal{K}_D)^{\perp}} (\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)\right]',$$

где проецирование относится к скалярному произведению, определяемому матрицей Q^{-1}. Используя результаты, изложенные в работе Ю. Н. Тюрина[26], в Разделе 3.5 получена следующая основная теорема о распределении критической статистики.

Теорема 3.1 *Пусть $X = \Xi + M = (x_1, \ldots, x_n)$ — $(p \times n)$-матрица наблюдений, составленная из случайных p-векторов такая, что*

$$X \sim q \cdot \sigma \cdot N_{p,n}(M, \Sigma, Q),$$

где положительно определенные матрицы Q, Σ считаются известными, а параметры q, σ, M — неизвестны, причем для параметров q, σ даны оценки

$$k\hat{\sigma}^2 \sim \sigma^2\chi^2(k), \; l\hat{q}^2 \sim q^2\chi^2(l),$$

где $\hat{\sigma}^2$ не зависит от $\hat{q}^2$ и от X, а $\hat{q}^2$ не зависит от $\hat{\sigma}^2$ и от X. Тогда статистика $\mathrm{tr}(H(X))$ удовлетворяет следующим свойствам:

[26] Ю.Н. Тюрин. "Проверка конических гипотез". — *Математика. Механика. Информатика : тр. конф., посвящ. 10-летию РФФИ. — М. : Физматлит.*, с. 289-307, 2005.

1. *При гипотезе (7) для* $r \geqslant 0$

$$P\left[\operatorname{tr}(H(X)) \geqslant r\right] \leqslant P\left[\operatorname{tr}(H(\Xi)) \geqslant r\right].$$

2. *Если обобщенный замкнутый матричный конус* $\mathcal{K}_D$ *над полукольцом* D_p *является многогранным, то для* $r \geqslant 0$

$$P\left[\operatorname{tr}(H(\Xi)) \geqslant r\right] = \sum_{i=0}^{p \cdot n} d_i \cdot P\left[l \cdot k \cdot \frac{\chi^2(i)}{\chi^2(l) \cdot \chi^2(k)} \geqslant r\right],$$

где $\chi^2(i) = 0$ *при* $i = 0$.

Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность доктору физико-математических наук, профессору Юрию Николаевичу Тюрину, под руководством которого проходила работа над диссертацией, за постановку задач, многолетнюю поддержку и постоянное внимание к работе.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1] Кашицын П. А. Многомерная модель с коррелированными наблюдениями. *Теория вероятностей и ее применения*, т. 56, в. 3, с. 602–606, 2011.

[2] Кашицын П. А. О функции мощности статистических критериев, зависящих от элементарных симметрических многочленов. *Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика*, в. 3, с. 55–58, 2012.

[3] Кашицын П. А. Матричные конусы и проверка конических гипотез в многомерном гауссовском анализе. *Деп. в ВИНИТИ*, 21.03.2013, №83-В2013, 14 с.

[4] Kashitsyn P. A. Multivariate model with a Kronecker product covariance structure: S.N.Roy method of estimation. *Mathematical Methods of Statistics*, Vol. 20, No. 1, pp. 75-78, 2011.

[5] Кашицын П. А. Стохастические свойства ортогональных инвариантов матрицы Уишарта. *Тезисы Международной конференции «Теория вероятностей и ее приложения», посвященной 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко*, с. 372, 2012.

[6] Kashitsyn P. A. Multivariate model with a Kronecker product covariance structure: general linear model. *Abstracts of the 9th Tartu conference on Multivariate statistics*, pp. 35, 2011.