Московский Государственный Университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-Математический Факультет

На правах рукописи

Лыков Александр Андреевич

СЛАБО СЛУЧАЙНЫЕ МНОГОЧАСТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2013

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
профессор
Малышев Вадим Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор
Оселедец Валерий Иустинович
Финансовый университет при
правительстве Российской Федерации
доктор физико-математических наук
Жижина Елена Анатольевна
Институт проблем передачи информации РАН
ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 25 октября 2013 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университет имени М. В. Ломоносова по адресу Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 24 сентября 2013 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин.

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации

Предположим, что движение некоторой системы N d-мерных частиц описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Предметом изучения неравновесной статистической механики служит эволюция вероятностных мер на фазовом пространстве, порождаемая данной системой дифференциальных уравнений. Особенность задач статистической механики обусловлена тем, что число частиц очень велико ($N \sim 10^{23}$). В равновесной статистической механики исследуются свойства специального класса инвариантных относительно динамики мер, определяемых постулатом Гиббса[1], который утверждает, что в состоянии термодинамического равновесия системы с большим числом частиц описываются распределением Гиббса. Данный постулат позволяет выводить многие физические законы, в частности, обосновать равновесную термодинамику.

Обширную часть статистической механики занимают кинетические уравнения, предназначенные для приближенного описания временной эволюции системы в более простых переменных (например, моментные функции вероятностной меры, средние значения физических величин). Задача установления связи кинетических уравнений с уравнениями, описывающими движение большой системы частиц находится среди основных в статистической механики. Одной из первых работ внесших существенный вклад в данную проблематику является монография Боголюбова [2].

Как уже было отмечено, ключевой особенностью статистической механики является то обстоятельство, что число частиц системы огромно. Поэтому возникает естественное желание строить всю теорию изначально в предположении, что система состоит из бесконечного числа частиц. Математическое описание многих вопросов статистической механики с точки зрения "бесконечночастичного"подхода можно найти в работе 1 (номер сноски).

Труднейшей и до сих пор полностью не решенной задачей статистической механики является сходимость к равновесному распределению. Исходя из кинетического уравнения Больцмана ещё сам Больцман в 1872 г. доказал сходимость идеального газа к распределению Максвелла с помощью известной H-теоремы. С другой стороны, если рассматривать в качестве основы уравнения движения микроскопической системы, то проблема сходимости для общих систем не поддаётся математикам более ста лет. В книге В. В. Козлова[3] содержится ряд утверждений и доказательств о сходимости для некоторых классов моделей и при различных ”эргодических” предположениях на систему. Необходимо отметить, что изложение многих вопросов статистической механики в указанной работе сопровождается глубоким историческим обзором. В настоящей работе рассматриваются системы с квадратичным взаимодействием. Перейдём к точным формулировкам.

[1] Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., *Динамические системы статистической механики и кинетические уравнения. Гл. 10. Динамические системы статистической механики*, Динамические системы - 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 2, ВИНИТИ, М., 1985, 235-284.

[2] Боголюбов Н. Н., *Проблемы динамической теории в статистической физике*, М. - Л.: ОГИЗ, Гстехиздат, 1946.

[3] Козлов В. В., *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре*, Москва-Ижевск, 2002.

Рассмотрим фазовое пространство с N степенями свободы

$$L = \mathbb{R}^{2N} = \{\psi = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}: \ q = (q_1, ..., q_N)^T, \ p = (p_1, ..., p_N)^T \in \mathbb{R}^N\},$$

где T обозначает транспонирование, таким образов ψ является вектор-столбцом. Введём на L евклидово скалярное произведение $(\psi, \psi')_2 = \sum_{i=1}^{N}(q_i q_i' + p_i p_i')$. L разлагается в прямую сумму

$$L = l_N^{(q)} \oplus l_N^{(p)} \tag{1}$$

ортогональных подпространств координат и импульсов с индуцированными скалярными произведениями $(q, q')_2$ и $(p, p')_2$ соответственно. Определим гамильтониан (энергию) формулой:

$$H(\psi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} V(i,j) q_i q_j = \frac{1}{2}\left((p,p)_2 + (q, Vq)_2\right) \tag{2}$$

где $V = (V(i,j))$ — положительно определенная $(N \times N)$-матрица с вещественными элементами. Под положительной определённостью матрицы V понимается, что $V = V^T$ и $(Vq, q)_2 > 0$ для всех $q \in \mathbb{R}^N, \ q \neq 0$.

Рассмотрим на L гамильтонову систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i \tag{3}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{N} V(i,j) q_j \tag{4}$$

где $i = 1, ..., N$.

Данная система порождает поток $g^t, \ t \in \mathbb{R}$ (однопараметрическую группу диффеоморфизмов) на L по обычному правилу: $g^t\psi$ есть решение $\psi(t)$ системы (3)-(4) в момент времени t, если $\psi(0) = \psi$. Пусть μ — произвольная вероятностная мера на борелевских подмножествах L. Обозначим $\mu_t, \ t \in \mathbb{R}$ перенесённую меру потоком g^t:

$$\mu_t(B) = \mu\left(g^{-t}(B)\right)$$

для борелевского подмножества $B \subset L$. Важнейшим вопросом при изучении многокомпонентных систем является описание инвариантных относительно g^t вероятностных мер. Приведём примеры инвариантных мер:

1. $d\psi = dqdp$ — мера Лебега (не вероятностная, но играющая ключевую роль). Инвариантность $d\psi$ суть классическая теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма.

2. $d\mu^{(G)} = \frac{1}{Z}\exp\left(-\beta H(\psi)\right) d\psi, \ \beta > 0$ — мера Гиббса. Заметим, что, в силу квадратичности нашего гамильтониана, мера Гиббса определяет гауссовский случайный вектор, а его ковариация в (2×2)-блочной форме, соответствующей разложению (1), имеет вид:

$$C_{G,\beta} = \beta^{-1}\begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \tag{5}$$

3. $d\mu^{(k)} = \frac{1}{Z}\exp\left(-\beta H_k(\psi)\right) d\psi, \ \beta > 0, k = 1, 2, \ldots$, где введены квадратичные функции:

$$H_k(\psi) = \frac{1}{2}\left((p, V^{k-1}p)_2 + (q, V^k q)_2\right).$$

Отметим, что меры из пунктов 1 и 2 являются инвариантными для любых гамильтоновых систем, необязательно линейных.

Вопрос о сходимости к инвариантной мере является не менее важным, чем описание самих инвариантных мер. Для любой точки $\psi \in L$, замыкание орбиты $\overline{\{g^t(\psi),\ t \in \mathbb{R}\}} = M_\psi$ является гладким подмногообразием гомеоморфным тору[4], причём

$$\dim(M_\psi) \leqslant N.$$

Поэтому, не существует конечной инвариантной меры, к которой была бы сходимость. Аргументы КАМ теории[5] показывают, что при малых нелинейных возмущениях нашей системы, "почти всегда" инвариантные торы останутся, и, следовательно, аналогичные проблемы со сходимостью к инвариантной мере сохраняются и для таких систем.

Возникает вопрос: как исследовать сходимость, которая с физической точки зрения должна иметь место, если её не может быть исходя из математической теории? Заметим, что большинство физических систем не являются замкнутыми — всегда есть взаимодействие с "внешним миром". В настоящей работе проблема сходимости к равновесному распределению изучается при условии наличия подобного взаимодействия. Будет показано, что если наша система контактирует с окружающим миром совсем "малым" и случайным образом, тогда при достаточно общих предположениях можно сформулировать утверждения о сходимости к равновесию. Кроме того, будут описаны некоторые свойства равновесного состояния.

Необходимо отметить, что квадратичная модель взаимодействия в термодинамическом пределе не сможет описать такие физические свойства веществ как термическое расширение[6] и закон Фурье о распространении тепла[7]. Тем не менее, с точки зрения математического описания сходимости к равновесию, данная модель видится глубокой и интересной.

Подход к обоснованию распределения Гиббса, основанный на взаимодействии с внешней средой не является новым для математической физики. Существует большое количество работ на данную тему. Одной из первых статей посвященных этому вопросу можно считать [8]. В данной работе рассматривается модель столкновений — частицы системы, описываемой гамильтоновой динамикой с энергией $H_s(\psi)$, испытывают случайные "соударения" с внешней средой. Промежутки времени между соударениями являются независимыми случайными величинами. При соударении вероятность переместиться из точки ψ фазового пространства L в точку ψ' равна $K(\psi', \psi)$, где K вероятностное ядро. Обозначим $\mu(\psi, t)$ плотность вероятностной меры, соответствующей решению $\psi(t)$ в момент времени t. Тогда плотность μ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial \mu(\psi, t)}{\partial t} + \{\mu(\psi, t),\ H_s(\psi)\} = \int_L [K(\psi, \psi')\mu(\psi', t) - K(\psi', \psi)\mu(\psi, t)]d\psi', \tag{6}$$

где $\{,\}$ — скобка Пуассона. Авторы изучают вопрос сходимости к стационарному решению и свойства предельного распределения, в зависимости от ядра K.

[4]Самойленко А., *Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы*, Наука, Москва, 1987.

[5]Арнольд В., *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*, Успехи Мат. Наук, т. 18, 6, 1963

[6]Malyshev V., *One-dimensional mechanical networks and crystals*, Mosc. Math. J., v.6, 2, 2006, 353 – 358.

[7]Rieder Z., Lebowitz J., Lieb E., *Properties of a Harmonic Crystal in a Stationary Nonequilibrium State*, Journ. Math. Phys., v. 8, 5, 1967.

[8]Lebowitz J., Bergmann P., *Irreversible Gibbsian Ensembles*, Annals of Phys., v. 1, 1957, 1 – 23.

Уравнение (6) является интегро-дифференциальным, что в значительной степени затрудняет анализ эргодических свойств решения. Поэтому многие авторы определяют взаимодействие с внешней средой другим способом, отличным от модели столкновений. В работе [9] рассмотрена модель одномерного гармонического кристалла. Взаимодействие с внешней средой определяется следующим образом: по краям кристалла действуют независимые белые шумы, вообще говоря, с различной дисперсией. Доказывается сходимость к стационарному распределению. В случае, если дисперсии белых шумов различаются, то стационарное решение не является равновесным, т.е. в системе имеется поток тепла. В связи с этим, авторы изучают температурный профиль и поток тепла в цепочки при стационарном распределении в термодинамическом пределе $N \to \infty$. Немного меньше, чем 40 лет, появляется статья [10], посвященная обобщению результатов работы 9 (номер сноски) на случай, когда белые шумы могут действовать во все частицы кристалла, и на случай многомерного гармонического кристалла.

В рассмотренных статьях изучались модели, в которых не учитывалось влияние основной гамильтоновой системы на внешнюю среду. Имеется много работ принимающих во внимание это влияние. Например, в [11] рассматривается бесконечная линейная гамильтонова система, с матрицей взаимодействий V, со степенями свободы проиндексированными целыми числами. Зафиксируем два целых числа $M_L < M_R$. Предположим, что в начальный момент времени частицы с индексами $k < M_L$ имеют гиббсовское распределение с температурой β_L^{-1} и независимо от них частицы с индексами $k > M_R$ также имеют гиббсовское распределение с температурой β_R^{-1}. В указанной работе доказано, что при определённых условиях на матрицу V, для любого начального распределения ρ частиц с индексами $k \in [M_L, M_R]$, распределение решения соответствующей бесконечной гамильтоновой системы сходится к некоторому гауссовскому распределению, не зависящему от ρ. Кроме того, если $\beta_L = \beta_R$, то предельное распределение будет гиббсовским.

Опишем основную модель настоящей работы. Выделим $1 \leq m \leq N$ различных степеней свободы

$$\Lambda^{(m)} = \{n_1, ..., n_m\} \subset \Lambda = \{1, ..., N\}, m \geq 1,$$

Множество $\Lambda^{(m)}$ мы будем называть *границей* Λ. Обозначим $|\Lambda^{(m)}| = m$. Определим *граничную матрицу* $b = (b_{ij})$ порядка $N \times m$:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \in \Lambda^{(m)} \text{ и } i = n_j, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Рассмотрим динамику, определяемую системой $2N$ стохастических дифференциальных

[9] Rieder Z., Lebowitz J., Lieb E., *Properties of a Harmonic Crystal in a Stationary Nonequilibrium State*, Journ. Math. Phys., v. 8, 5, 1967.

[10] Bonetto F., Lebowitz J., Lukkarinen J., *Fourier's Law for a Harmonic Crystal with Self-Consistent Stochastic Reservoirs*, Jour. of Stat. Phys., v. 116, 2004.

[11] Spohn H., Lebowitz J., *Stationary Non-Equilibrium States of Infinite Harmonic Systems*, Comm. Math. Phys., v. 54, 1977, 97 — 120.

уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = p_i \tag{7}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} V(i,j)q_j - \alpha\delta_i^{(m)}p_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}f_t^{(j)} \tag{8}$$

где $i = 1,...,N$, $V = (V(i,j))$ — положительно определенная $(N \times N)$-матрица с вещественными элементами, $\delta_i^{(m)} = 1$ при $i \in \Lambda^{(m)}$ и $\delta_i^{(m)} = 0$ при $i \notin \Lambda^{(m)}$. Функции $f_t^{(1)} \ldots, f_t^{(m)}$ — независимые копии некоторого вещественнозначного случайного процесса f_t. Это означает, что только степени свободы из выделенного множества $\Lambda^{(m)}$ подвергаются диссипации (определяемой множителем $\alpha > 0$) и внешним силам.

Цель и задачи исследования

Целью настоящего исследования является описание эргодических свойств решения системы (7)-(8) в зависимости от случайного процесса f_t, матрицы взаимодействий V и границы $\Lambda^{(m)}$. Кроме того, ставится задача описания свойств предельного распределения (при $t \to \infty$), в случае его существования, при термодинамическом предельном переходе, т.е. при $N \to \infty$.

Научная новизна полученных результатов

Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Введено понятие диссипативного подпространства L_- и изучены его основные свойства. В частности, установлена оценка средней размерности диссипативного подпространства для одномерного гармонического кристалла, если $m = 1$ и граница выбирается случайно и равновероятно.

2. В случае, если $f_t = \sigma\dot{w}_t$, $\sigma > 0$ — белый шум, установлено, что проекция решения системы (7)-(8) на диссипативное подпространство сходится при $t \to \infty$ по распределению к "ограничению"гиббсовского распределения на L_-, с температурой, зависящей от дисперсии белого шума σ^2 и параметра диссипации α. Установлен линейный рост энергии любой степени свободы, если $\alpha = 0$.

3. Если f_t является вещественнозначным стационарным (в широком смысле) центрированным гауссовским случайным процессом непрерывным в среднем квадратическом, с абсолютно интегрируемой ковариационной функцией, то доказана сходимость при $t \to \infty$ по распределению решения системы (7)-(8) для почти всех матриц взаимодействий V к гауссовскому вектору ξ_N с нулевым средним. Установлены такие свойства предельного распределения как: отсутствие корреляций между скоростями и координатами, наличие ненулевой ковариации между различными скоростями для "почти всех" случайных процессов f_t из указанного класса. Исследованы свойства распределения вектора ξ_N при $N \to \infty$. Доказано, что при $N \to \infty$ матрицу ковариаций вектора ξ_N можно отождествить, в определённом смысле, со следующей матрицей:

$$C_V = \frac{\pi}{\alpha}\begin{pmatrix} a(\sqrt{V})V^{-1} & 0 \\ 0 & a(\sqrt{V}) \end{pmatrix}$$

где $\sqrt{V}$ - единственный положительный корень из матрицы V, a - спектральная плотность процесса f_t.

4. Для эргодических счётных марковских цепей получена двусторонняя оценка среднего времени достижения далёкой точки, выраженная в терминах инвариантного распределения и функции Ляпунова цепи. Изучена точность полученной оценки.

Методы исследования

В работе применяются методы теории вероятностей, методы математической физики, а также методы теории матриц и линейной алгебры.

Теоретическая значимость полученных результатов

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в области теории вероятностей и математической физики.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на:

- Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академика РАН, проф. А.Н. Ширяева (Москва, 2013 г.),
- Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике ПОМИ (Санкт-Петербург, 2013),
- Семинаре Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН (Москва, 2012),
- семинаре "Многокомпонентные случайные системы и математическая физика" лаборатории больших случайных систем, МГУ имени М. В. Ломоносова (2011 - 2013, неоднократно).
- Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов" в МГУ (Москва, 2013),

Публикации

Полный список опубликованных работ автора по теме диссертации приведён в конце автореферата. Четыре работы опубликованы в журналах из списка ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из пяти глав и списка литературы. Полный объём 105 страниц из них 4 страницы занимает список литературы (49 наименований).

Краткое содержание диссертации

Глава 1 - Введение.

Во введении сформулированы основные результаты диссертации и дан краткий обзор иных моделей и подходов наиболее близких к настоящему исследованию, приводятся основные определения, необходимые для формулировки результатов.

Мы будем в основном пользоваться матричной записью системы (7)-(8). Для этого зафиксируем обозначения. Определим блочную матрицу A порядка $(2N) \times (2N)$ по формуле

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & -\alpha D \end{pmatrix} \tag{9}$$

где E - единичная $(N \times N)$-матрица, D диагональная $(N \times N)$-матрица с $D_{k,k} = 1,\ k \in \Lambda^{(m)}$ и $D_{k,k} = 0, k \notin \Lambda^{(m)}$. Тогда система (7)-(8) может быть записана в следующем матричном виде:

$$\dot{\psi} = A\psi + BF_t,\ \psi \in L, \tag{10}$$

где $(2N) \times m$ блочная матрица B определена формулой

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

и m-мерный случайный процесс $F_t = (f_t^{(1)}, \ldots, f_t^{(m)})^T$. Согласно физической интерпретации модели, случайный вектор BF_t мы будем иногда называть *внешней силой.*

Классы случайных внешних сил.

Если $f_t = \sigma \dot{w}_t$, то под решением $\psi(t)$ уравнения (10) с начальным условием $\psi(0) \in L$ понимается сильное решение соответствующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито, определяемое формулой:

$$\psi(t) = \sigma \int_0^t e^{(t-s)A}\ B\ dW_s + e^{tA}\psi(0),$$

где $(W_s^{(1)}, \ldots, W_s^{(m)})^T$ — стандартное m-мерное броуновское движение.

Определение 1. *Вещественнозначный стационарный (в широком смысле) центрированный гауссовский случайный процесс непрерывный в среднем квадратическом, с абсолютно интегрируемой ковариационной функцией мы будем называть SG-процессом.*

Если внешняя сила определяется SG процессом f_t, тогда решение $\psi(t)$ уравнения (10) с начальным условием $\psi(0) \in L$ задаётся формулой:

$$\psi(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} BF_s\ ds + e^{tA}\psi(0),$$

где интеграл понимается в среднем квадратическом смысле.

Для SG-процесса f_t будем обозначать $C_f(t) = E\{f_{t+s}f_s\}$ ковариационную функцию. Иногда мы будем предполагать, что C_f принадлежит пространству Шварца S. Тогда и спектральная плотность процесса

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}C_f(t)\ dt.$$

принадлежит пространству S.

Введём подмножество S_+ положительно определённых функций в пространстве S. Зададим на S_+ естественную топологию ограничения топологии из S (открытые множества в S_+ имеют вид $U \cap S_+$, где U открыто в S). Мы будем говорить что некоторое свойство выполняется *почти для всех C_f из класса S_+*, если множество, где оно выполняется, является открытым и всюду плотным подмножеством в S_+.

Классы гамильтонианов

Для любого N определим $\mathbf{H}_N$ как класс всех положительно определённых матриц над полем вещественных чисел порядка N. Любой элемент $V \in \mathbf{H}_N$ задаёт гамильтониан вида (2), поэтому иногда (если это не вызывает противоречий) мы будем отождествлять матрицу взаимодействий V и соответствующий ей гамильтониан.

Определение 2. *Ненаправленный граф $\Gamma = \Gamma_N$ с N вершинами $i = 1, ..., N$ будем называть допустимым, если выполнены следующие условия:*

1. *Γ связен;*
2. *каждую пару вершин (i, j) соединяет не более одного ребра;*
3. *все пары (i, i) являются ребрами Γ.*

Зафиксируем допустимый граф Γ с N вершинами. Пусть $\mathbf{H}_\Gamma$ - множество положительно определенных V таких что $V(i, j) = 0$, если (i, j) не является ребром Γ. Заметим, что $\mathbf{H}_N = \mathbf{H}_\Gamma$ в случае полного графа Γ с N вершинами. В частности можно рассматривать граф $\Gamma = \Gamma(d, \Lambda)$ с множеством вершин - кубом d-мерной решетки

$$\Lambda = \Lambda^{(M)} = \{(x_1, ..., x_d) \in Z^d : |x_i| \le M, i = 1, ..., d\} \subset Z^d$$

и ребрами $(i, j), |i - j| \le 1$.

Определение 3. *Определим подмножество фазового пространства L*

$$L_- = L_-(V) = \{\psi \in L :\ H(e^{tA}\psi) \to 0,\ t \to \infty\} \subset L,$$

где гамильтониан H определён в (2) с помощью матрицы $V \in \mathbf{H}_\Gamma$.

Будем называть L_- *диссипативным подпространством.*

Глава 2 - Необходимые технические результаты из теории случайных процессов.

В главе 2 приводятся необходимые конструкции и результаты из теории случайных процессов. В связи с доказательством сходимости случайных процессов даётся небольшой обзор применения функций Ляпунова к исследованию сходимости. В качестве примера применения аппарата функций Ляпунова к исследованию свойств марковских процессов, в данной главе также изучаются вопросы связанные со среднем временем достижения "далёкой" точки для счётной марковской цепи. А именно, пусть ξ_t — однородная по времени марковская цепь с дискретным временем и счетным множеством состояний S. Для точки $x \in S$ и множества $V \subset S$ введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tau_{x,V} &= \min\{t > 0 : \xi_t \in V | \xi_0 = x\}, \\ m_{x,V} &= E\tau_{x,V} \end{aligned}$$

— среднее время движения из состояния x в множество V. Будем предполагать, что наша цепь является эргодической.

Определение 4. *Функцию $L : S \to \mathbb{R}_{>0}$ будем называть функцией Ляпунова цепи ξ_t, если найдется конечное множество $A_L \subset S$ такое, что*

$$\begin{aligned} E\{L(\xi_{t+1}) - L(\xi_t) | \xi_t = x\} &\leqslant -1, \quad \forall x \notin A_L, \\ E\{L(\xi_{t+1}) | \xi_t = x\} &< \infty, \quad \forall x \in A_L. \end{aligned}$$

Множество всех функций Ляпунова цепи ξ_t обозначим Σ. В силу критерия Фостера $\Sigma \neq \emptyset$. Зафиксируем некоторое состояние $0 \in S$.

Теорема 5. *Для любой функции $L \in \Sigma$ найдутся $a > 0, b > 0$ такие, что для произвольного $x \in S$ выполняется неравенство*

$$m_{x,x} - L(x) - a \leqslant m_{0,x} \leqslant bL(x)m_{x,x}.$$

Если обозначить через π_x стационарную меру точки x, то, используя формулу $m_{x,x} = 1/\pi_x$, последние неравенства можно переписать в виде

$$\frac{1}{\pi_x} - L(x) - a \leqslant m_{0,x} \leqslant b\frac{L(x)}{\pi_x}.$$

В работе строятся примеры применения сформулированной теоремы, из которых следует, что данные оценки не могут быть улучшены без дополнительных предположений о цепи ξ_t.

Глава 3 - Доказательство теорем для однородной гамильтоновой системы.

В третье главе доказываются утверждения относительно системы (10) при $F_t \equiv 0$, т.е. следующего уравнения

$$\dot{\psi} = A\psi, \;\; \psi \in L \tag{11}$$

Обозначим e_i - N-вектора-столбцы со всеми нулевыми компонентами, кроме i-ой, равной единице. Третья глава содержит доказательство следующего утверждения.

Утверждение 6. *Справедливы следующие утверждения*

1. *L_- является линейным подпространством L;*

2. *$L_- = \{\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in L : \ q \in l_V, p \in l_V\}$, где l_V - подпространство $\mathbb{R}^N$, порожденное векторами $V^k e_i$, $i \in \Lambda^{(m)}$; $k = 0, 1, \ldots$.*

3. *L_- и его ортогональное дополнение $L_0 = L_-^{\perp}$, инвариантны относительно оператора A;*

4. *$L_0 = \{\psi \in L : \ \frac{d}{dt} H(e^{tA}\psi) = 0, \ \forall t > 0\}$.*

Пусть $\mathbf{H}_\Gamma^{(+)}$ обозначает подмножество $\mathbf{H}_\Gamma$, состоящее из матриц взаимодействий V, для которых $L_-(V) = L$. В третьей главе устанавливается следующее утверждение.

Утверждение 7. *Для всех допустимых графов Γ множество $\mathbf{H}_\Gamma^{(+)}$ открыто и всюду плотно в $\mathbf{H}_\Gamma$.*

Далее в данной главе доказываются теоремы, связанные с вычислением и оценкой размерности диссипативного подпространства, для двух примеров гамильтонианов: одномерного гармонического кристалла (интервал) и окружности. Заметим прежде всего, что в силу утверждения 6 для любой матрицы взаимодействий $V \in \mathbf{H}_\Gamma$, где Γ произвольный допустимый граф с N вершинами, справедливо равенство:

$$\dim(L_-(V)) = 2N - \dim(L_0(V)).$$

Поэтому, проблема вычисления $\dim(L_-(V))$ равносильна нахождению $\dim(L_0(V))$.

Интервал.

Пусть гамильтониан задаётся формулой:

$$H = H_I = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} p_k^2 + \frac{\omega_0}{2}\sum_{k=1}^{N} q_k^2 + \frac{\omega_1}{2}\sum_{k=2}^{N}(q_k - q_{k-1})^2, \tag{12}$$

где $\omega_0, \omega_1 > 0$. Предположим, что $\Lambda^{(m)} = \{n_1, \ldots, n_m\}$ для некоторых $n_1, \ldots, n_m \in \{1, \ldots, N\}$.

Обозначим $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ наибольший общий делитель натуральных чисел $a_1, \ldots, a_m$. В третье главе доказана следующая теорема.

Теорема 8. *Имеет место формула:*

$$\dim(L_0) = (N, 2n_1 - 1, \ldots, 2n_m - 1) - 1.$$

Видно, что при $m > 1$ наличие двух индексов n_i и n_j, для которых $|n_i - n_j| = 1$, гарантирует, что $\dim(L_0) = 0$. Рассмотрим подробнее случай $m = 1$. Обозначим для краткости $n_1 = n$, соответствующее ему подпространство L_0 обозначим $L_0(n)$. В силу сформулированной теоремы:

$$\dim(L_0(n)) = (N, 2n - 1) - 1.$$

Если число $N = 2^r,\ r > 0$ является степенью двойки, то из формулы видно, что $\dim(L_0) = 0$ для всех n. С другой стороны, если $N = 2r + 1,\ n = r + 1$, тогда $\dim(L_0) = 2r = N - 1$ — почти половина размерности фазового пространства. Данные примеры показывают, что размерность L_0 является очень не регулярной функцией от n и N. В связи с проблемой сходимости к распределению Гиббса интерес представляет следующая величина:

$$d_N(n) = \frac{\dim(L_0(n))}{2N}.$$

Относительно введённого числа $d_N(n)$, в третье главе устанавливается следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть индекс $n = 1, \dots, N$ выбирается случайно и равновероятно, т.е.*

$$P\{n = k\} = \frac{1}{N}$$

для всех $k = 1, \dots, N$ и гамильтониан определяется формулой (12), тогда справедливы следующие утверждения:

1. *для всех $\epsilon > 0$ выполняется*
$$\mathbf{E}\{d_N(n)\} = O(N^{-1+\epsilon}).$$
2. *Для всех $M \geqslant 1$ верно*
$$\sum_{N \leqslant M} E\{d_N(n)\} = O(\log^2(M)).$$

Окружность.

Пусть гамильтониан задаётся формулой:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} p_k^2 + \frac{\omega_0}{2}\sum_{k=1}^{N} q_k^2 + \frac{\omega_1}{2}\sum_{k=2}^{N}(q_k - q_{k-1})^2 + \frac{\omega_1}{2}(q_1 - q_N)^2,$$

где $\omega_0, \omega_1 > 0$. Предположим, что $\Lambda^{(m)} = \{n_1, \dots, n_m\}$ для некоторых $n_1, \dots, n_m \in \{1, \dots, N\}$. Оказывается, что для введённого гамильтониана также удаётся явно вычислить размерность L_0. Соответствующая теорема доказана в третье главе.

Теорема 10. *Пусть $d \geqslant 0$ обозначает наибольший общий делитель чисел вида $n_x - n_y,\ x, y \in \{1, \dots, m\}$ (мы считаем, что $d = 0$, если $m = 1$). Справедливы утверждения:*

1. *Если $\frac{N}{(N,d)}$ является чётным числом, тогда*
$$\dim(L_0) = 2((N, d) - 1).$$
2. *Пусть $\frac{N}{(N,d)}$ является нечётным числом. В этом случае выполняются следующие утверждения:*
   (a) *Если $N = 2r,\ r \geqslant 1$, тогда*
   $$\dim(L_0) = (N, d) - 2.$$
   (b) *Если $N = 2r + 1\ r \geqslant 1$, тогда*
   $$\dim(L_0) = (N, d) - 1.$$

В данном случае, как и для гамильтониана (12), видно, что при $m > 1$ наличие двух индексов n_i и n_j, для которых $|n_i - n_j| = 1$, влечёт равенство $\dim(L_0) = 0$.

Глава 4 - Доказательство теорем для гамильтоновой системы с диссипацией и воздействием белым шумом.

Четвёртая глава посвящена доказательству утверждений относительно системы (10), где F_t определяется белым шумом, т.е. при $f_t = \sigma \dot{w}_t,\ \sigma > 0$. Ввиду утверждения 6 любой начальный вектор $\psi(0)$ можно единственным образом представить в виде:

$$\psi(0) = \psi_0 + \psi_-, \quad \psi_0 \in L_0, \quad \psi_- \in L_-.$$

Тогда решение уравнения (10) с начальным вектором $\psi(0)$ можно представить в виде

$$\psi(t) = \psi^{(0)}(t) + \psi^{(-)}(t),$$

где функции $\psi^{(0)}(t),\ \psi^{(-)}(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{\psi}^{(0)}(t) = A\psi^{(0)}(t), \quad d\psi^{(-)}(t) = A\psi^{(-)}(t)\ dt + \sigma B\ dW_t \tag{13}$$

с начальными условиями $\psi^{(0)}(0) = \psi_0$ и $\psi^{(-)}(0) = \psi_-$ соответственно, поскольку сумма этих уравнений дает уравнение (10). В главе 4 доказывается следующее утверждение.

Утверждение 11. *Для всех $t \in [0, \infty)$ имеют место включения*

$$\psi^{(0)}(t) \in L_0, \quad \psi^{(-)}(t) \in L_-$$

Из уравнений (13) следует, что функция $\psi^{(0)}(t)$ является детерминированной, причём, в силу утверждения 6, энергия решения $\psi^{(0)}(t)$ не зависит от времени. Следовательно, о сходимости к инвариантной мере для $\psi^{(0)}(t)$ не имеет смысла говорить (по тем же причинам, что и для линейной гамильтоновой системы). С другой стороны, $\psi^{(-)}(t)$ является случайным гауссовским процессом. В четвёртой главе устанавливается следующая теорема, описывающая свойства процесса $\psi^{(-)}(t)$

Теорема 12. *Для любого $\psi(0)$ имеет место сходимость по распределению*

$$\psi^{(-)}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \xi,$$

где $\xi \in L_-$, а его распределение абсолютно непрерывно относительно меры Лебега на L_- (определённой евклидовой структурой) и задаётся плотностью относительно этой меры

$$p_\xi(\psi) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{2\alpha}{\sigma^2} H(\psi)\right),\ \psi \in L_-.$$

Предел средней энергии имеет следующий явный вид:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}\{H(\psi^{(-)}(t))\} = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \dim L_-.$$

Возникает естественный вопрос: какую роль в сходимости играет диссипация? Нельзя ли от неё отказаться, не повлияв на сходимость? В главе 4 доказывается, что в случае $\alpha = 0$ энергия любой частицы в системе линейно растёт с ростом t. Сформулируем соответствующие определения и теорему. Пусть $\psi = (q, p)^T \in L$, для $i = 1, \dots, N$ обозначим

$$T_i(\psi) = \frac{1}{2} p_i^2, \quad U_i(\psi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} V(i,j) q_i q_j$$

кинетическую и потенциальную энергии, соответственно, для i-ой степени свободы. Зафиксируем допустимый граф Γ с N вершинами.

Определение 13. *Матрицу взаимодействий $V \in \mathbf{H}_\Gamma$ будем называть неприводимой, если для любых двух вершин i, j графа Γ существует $n \geqslant 0$, такой, что $(V^n)(i,j) \neq 0$.*

Утверждение 14. *Пусть $V \in \mathbf{H}_\Gamma$ — неприводимая матрица взаимодействий. Если $\alpha = 0$, тогда для любого начального условия $\psi(0)$ и для всех $i = 1, \ldots, N$ справедливы формулы*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{E}\{T_i(\psi(t)\}}{t} = c_i > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{E}\{U_i(\psi(t)\}}{t} = c_i > 0,$$

для некоторых констант $c_1, \ldots, c_N$, не зависящих от начальных условий.

Также в данной главе устанавливается теорема о предельном поведении матрицы ковариаций процесса $\psi(t)$ в случае, если $L_- = L$. Обозначим $C_G = C_{G,2\alpha}$, где матрица $C_{G,\beta}$ определена в формуле (5). Введём матрицу ковариаций процесса $\psi(t)$:

$$C_\psi(t+s,t) = \mathbf{E}\{(\psi(t+s) - \mathbf{E}\{\psi(t+s)\})\,(\psi(t) - \mathbf{E}\{\psi(t)\})^T\}. \tag{14}$$

Теорема 15. *Пусть $V \in \mathbf{H}_\Gamma^+$ для некоторого допустимого графа Γ с N вершинами. Для матрицы $C_\psi(t+s,t)$ ковариаций решения $\psi(t)$ при любых начальных условиях $\psi(0)$ и любого $s \in \mathbb{R}^1$ справедлива формула*

$$C_\xi(s) = \lim_{t\to+\infty} C_\psi(t+s,t) = \begin{cases} \sigma^2\ e^{sA}\ C_G, & s \geqslant 0, \\ \sigma^2\ C_G\ e^{-sA^T}, & s < 0. \end{cases} \tag{15}$$

Из данной теоремы вытекает, что процесс $\psi(t)$ является асимптотически стационарным.

Глава 5 - Доказательство теорем для гамильтоновой системы с диссипацией и воздействием SG процессом.

Пятая глава содержит доказательства утверждений относительно системы (10), где F_t определяется SG процессом.

Зафиксируем произвольный допустимый граф Γ с N вершинами. Пятая глава начинается с доказательства следующей теоремы.

Теорема 16. *Пусть f_t является SG-процессом. Тогда для всех матриц взаимодействий $V \in \mathbf{H}_\Gamma^{(+)}$ имеет место:*

1. *существует случайный гауссовский $(2N)$-вектор с нулевым средним ξ такой, что для любых начальных условий $\psi(0)$ распределение $\psi(t)$ сходится при $t \to \infty$ к распределению ξ;*

2. *более того, для матрицы ковариаций самого процесса $\psi(t)$, определённой в формуле (14), для любого $s \in \mathbb{R}^1$ имеет место*

$$C_\xi(s) = \lim_{t\to\infty} C_\psi(t+s,t) = W(s)C_G + C_G W(-s)^T, \tag{16}$$

где

$$W(s) = \int_0^{+\infty} e^{\tau A} C_f(\tau - s) d\tau \tag{17}$$

Далее договоримся об обозначениях. Для любой $(2N)\times(2N)$-матрицы M с вещественными элементами рассмотрим её 2×2-блочную запись, соответствующую разложению (1):

$$M=\begin{pmatrix} M^{(q,q)} & M^{(q,p)} \\ M^{(p,q)} & M^{(p,p)} \end{pmatrix}.$$

Для всех $i,j=1,\ldots,N$ введём обозначения

$$M(q_i,q_j)=M^{(q,q)}(i,j),\quad M(q_i,p_j)=M^{(q,p)}(i,j),$$
$$M(p_i,q_j)=M^{(p,q)}(i,j),\quad M(p_i,p_j)=M^{(p,p)}(i,j).$$

Обозначим $C_\xi=C_\xi(0)$. Будем называть матрицу C_ξ *предельной матрицей ковариаций.* В качестве следствия теоремы 16 в пятой главе устанавливается следующий результат.

Теорема 17. *Пусть $N\geq 2$. Имеют место следующие утверждения:*

1. *для любой $C_f\in S_+$ в предельном распределении нет корреляций между координатами и скоростями, то есть $C_\xi(q_i,p_j)=C_\xi(p_j,q_i)=0$ для любых $i,j=1,\ldots,N$;*
2. *если V не является диагональной матрицей, то для почти всех $C_f\in S_+$ существуют ненулевые корреляции между скоростями, то есть $C_\xi(p_i,p_j)\neq 0$ для некоторых $i\neq j$. Поэтому предельное распределение не будет гиббсовским.*

Оставшаяся часть работы посвящены изучению предельной ковариационной матрицы C_ξ при условии, что N велико. Ключевую роль при исследовании C_ξ играет следующая матрица:

$$C_V=\frac{\pi}{\alpha}\begin{pmatrix} a(\sqrt{V})V^{-1} & 0 \\ 0 & a(\sqrt{V}) \end{pmatrix} \tag{18}$$

где $V\in\mathbf{H}_\Gamma$ для некоторого допустимого графа Γ с N вершинами, $\sqrt{V}$ - единственный положительный корень из матрицы V. Так как спектральная плотность $a(\lambda)$ непрерывна, то матрица $a(\sqrt{V})$ корректно определена. Отметим очевидные свойства C_V.

Замечание 1. *1. C_V является неотрицательно определённой матрицей, так как спектральная плотность неотрицательна.*

2. C_V определяет гауссову меру с нулевым средним, инвариантную по отношению к "чистой"(то есть при $\alpha=0, F_t=0$) гамильтоновой динамике.

3. В случае белого шума спектральная плотность равна $a(\lambda)=\frac{1}{2\pi}$ и, значит, матрица C_V совпадает с гиббсовской (5) при $\beta^{-1}=\sigma^2/2\alpha$.

Более нетривиальным образом матрица C_V может быть получена при соответствующем скейлинге предельного распределения по параметру диссипации α. А именно, в пятой главе доказывается следующая теорема.

Теорема 18. *Пусть $V\in\mathbf{H}_\Gamma^{(+)}$ и предположим, что конечен следующий интеграл:*

$$\int_0^{+\infty} s^3|C_f(s)|ds\leqslant\infty.$$

Обозначим $\xi_{a,V}$ нормальный вектор в L с нулевым средним и матрицей ковариаций αC_V (заметим, что распределение $\xi_{a,V}$ не зависит от α). Пусть $\xi(\alpha)$ обозначает предельный вектор из теоремы 16. Тогда при $\alpha\to 0$ имеет место сходимость по распределению:

$$\sqrt{\alpha}\xi(\alpha)\to\xi_{a,V}$$

Для формулировки следующей теоремы вводятся дополнительные определения. Пусть задан некоторый связный граф Γ с множеством вершин $\Lambda, |\Lambda| = N$ и границей $\Lambda^{(m)}$. *Расстоянием* $r(i,j)$ между вершинами i и j на графе назовем наименьшую длину (число ребер) путей между ними. V называется *γ-локальной* на Γ, если $V(i,j)$ равно нулю, при $r(i,j) > \gamma$. Для матрицы V введём обозначение

$$||V||_\infty = \max_i \sum_j |V(i,j)|$$

Для всех $V \in \mathbf{H}_\Gamma^{(+)}$ предельную матрицу ковариаций можно представить в следующем виде

$$C_\xi = C_V + Y_V$$

где Y_V - остаточный член. В пятой главе устанавливается следующая теорема об оценке Y_V.

Теорема 19. *Пусть V является γ-локальным и таким что $||V||_\infty \leqslant v$ для некоторого $v > 0$. Зафиксируем произвольное число $\eta = \eta(N) \geqslant \gamma$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если $C_f \in S_+$ имеет ограниченный носитель, то есть $C_f(t) = 0$ при $|t| > \omega$, то для любой пары i, j далекой от границы, то есть на расстоянии $r(i, \Lambda^{(m)}), r(j, \Lambda^{(m)}) > \eta(N)$ имеет место следующая оценка*

$$|Y_V(q_i, q_j)|,\ |Y_V(p_i, p_j)| < |\Lambda^{(m)}| K_0 \left(\frac{K}{\eta}\right)^{\eta\gamma^{-1}}$$

   для некоторых констант $K_0 = K(C_f, v, \omega, \alpha, \gamma)$ и
   $K = K(C_f, v, \omega, \alpha, \gamma)$, не зависящих от N.

2. *для произвольной же $C_f \in S_+$ оценка имеет вид*

$$|Y_V(q_i, q_j)|,\ |Y_V(p_i, p_j)| < |\Lambda^{(m)}| C(k) \eta^{-k},$$

   для всех $k > 0$ и некоторых констант $C(k) = C(C_f, k, v, \alpha, \gamma)$, не зависящих от N.

Следствием этой теоремы является описание термодинамического предела основной модели. Для этого фиксируется ковариационная функция SG процесса $C_f(t) \in S_+$ и приводится конструкция бесконечной системы. Фиксируем допустимый граф Γ_∞ со счётным множеством вершин Λ_∞, и рассмотрим возрастающую последовательность $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset ... \subset \Gamma_n \subset ...$ допустимых подграфов таких, что $\Gamma = \cup \Gamma_n$. Пусть Λ_n - множество вершин Γ_n (мы считаем, что подграф с заданным множеством вершин наследует все ребра графа Γ между этими вершинами), $N_n = |\Lambda_n| < \infty$.

Предположим, что заданы также границы $\Lambda_n^{(m)},\ m = m(n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. существует натуральное число d такое, что для всех $i \in \Lambda_\infty$ существует номер $n(i)$ такой, что для всех $n > n(i)$ выполнено неравенство:

$$r_n(i, \Lambda_n^{(m)}) > \max\{m(n)^{\frac{1}{d}}, \gamma\},$$

   где $r_n(i, \Lambda_n^{(m)})$ обозначает расстояние от вершины i до границы $\Lambda_n^{(m)}$ на графе Γ_n,

2. для всех $i \in \Lambda_\infty$ верно, что $r_n(i, \Lambda_n^{(m)}) \to \infty$ при $n \to \infty$ — граница уходит в бесконечность.

Фиксируем также некоторую γ-локальную бесконечную матрицу V, соответствующий Γ_∞ с $||V||_\infty \leqslant v$. Введём $l^\infty(\Gamma_\infty)$ комплексное банахово пространство ограниченных последовательностей, проиндексированных вершинами графа Γ_∞:

$$l^\infty(\Gamma_\infty) = \{(x_i)_{i\in\Gamma_\infty} : \sup_{i\in\Gamma_\infty} |x_i| < \infty, \ x_i \in \mathbb{C}\}$$

Легко видеть, что матрица V определяет ограниченный линейный оператор на $l^\infty(\Gamma_\infty)$. Обозначим $\sigma(V)$ спектр оператора V. Обозначим через V_n ограничение V на Λ_n, то есть $V_n = (V(i,j))_{i,j\in\Lambda_n}$ суть квадратная матрица порядка N_n. Предположим, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ ограничения V_n являются положительно определёнными матрицами. Заметим, что условие $L_-(V_n) = L$ может не выполняться для всех n. Однако существует последовательность положительно определённых операторов $V'_n \in \mathbf{H}^+_{\Lambda_n}$ таких, что $||V_n - V'_n||_\infty \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через $C_\xi^{(n)}$ предельную матрицу ковариаций соответствующую V'_n. В пятой главе доказывается следующая теорема.

Теорема 20. *Справедливы утверждения:*

1. *для всех $i, j \in \Lambda_\infty$ существует термодинамический предел для скоростей*
$$\lim_{n\to\infty} C_\xi^{(n)}(p_i, p_j) = C_\xi^{(\infty),p}(i,j),$$
2. *если для всех $i, j \in \Lambda_\infty$ существует конечный предел:*
$$U(i,j) \doteqdot \lim_{n\to\infty} V_n^{-1}(i,j), \tag{19}$$
тогда определён термодинамический предел для координат
$$\lim_{n\to\infty} C_\xi^{(n)}(q_i, q_j) = C_\xi^{(\infty),q}(i,j)$$
3. *Предположим, что функцию $a(\sqrt{\lambda})$ можно продолжить до голоморфной функции в область комплексной плоскости, содержащую $\sigma(V)$. Тогда*
$$C_\xi^{(\infty),p}(i,j) = a(\sqrt{V}),$$
где $a(\sqrt{V})$ определяется в смысле операторного исчисления на $l^\infty(\Gamma_\infty)$.

Сделаем несколько замечаний к сформулированной теореме. Во-первых, легко видеть, что условие утверждения 3 последней теоремы заведомо выполняется, если ковариационная функция C_f имеет ограниченный носитель (в данном случае спектральная плотность является целой функцией и в силу её симметричности, функция $a(\sqrt{\lambda})$ также целая во всей комплексной плоскости). Во-вторых, термодинамический предел вообще говоря не является гиббсовским, точнее говоря, $C_\xi^{(\infty),p}(i,j) \neq 0$ для любых двух вершин $i \neq j$ в Λ_∞ таких что $a(\sqrt{V})(i,j) \neq 0$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Малышеву Вадиму Александровичу, под руководством которого проходила работа над диссертацией, за постановку задачи и постоянное внимание.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1] Лыков А. А., *Среднее время достижения далекой точки для счётных марковских цепей*, Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика, 4, 2013, 42 – 46.

[2] Лыков А. А., Малышев В. А., Музычка С. А., *Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием*, Теория вероятностей и её применения, 57, 4, 2012, 794 – 799.

Постановка задачи принадлежит Малышеву. Теорема 2 пункт 1 доказан Малышевым, пункт 2 доказан Музычкой. Все остальные результаты работы установлены Лыковым.

[3] Лыков А. А., Малышев В. А., *Роль памяти в сходимости к инвариантной мере Гиббса*, Доклады Академии Наук, том 451, 2, 2013.

Постановка задачи принадлежит Малышеву. Теорема 4 доказана Малышевым. Все остальные результаты работы установлены Лыковым.

[4] Lykov A. A., Malyshev V. A., *Harmonic chain with weak dissipation*, Markov Processes and Related Fields, v. 18, 4, 2012, 721 – 729.

Постановка задачи принадлежит Малышеву. Теорема 2 доказана Малышевым. Все остальные результаты работы установлены Лыковым.