ФГБОУ ВПО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Петрушов Олег Алексеевич

О поведении преобразования Лапласа некоторых мер вблизи границы области сходимости

Специальность
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, кафедра теории чисел.

Научный руководитель:	член-корреспондент РАН, профессор Нестеренко Юрий Валентинович
Официальные оппоненты:	Попов Антон Юрьевич доктор физико-математических наук (ФГБОУ ВПО „Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова“, профессор)
	Королёв Максим Александрович кандидат физико-математических наук (ФГБУН „Математический институт имени В. А. Стеклова РАН“)
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО „Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского“

Защита состоится 15 ноября 2013 г в 16 часов 45 мин на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при ФГБОУ ВПО Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 15 октября 2013 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Актуальность темы.

Проблемы асимптотического поведения сумм значений теоретико-числовых функций тесно связаны с исследованием аналитических свойств преобразования Лапласа некоторых мер.

Преобразованием Лапласа меры $d\nu(t)$ называется интеграл Римана-Стильтьеса

$$F[\nu](s) = \int_0^\infty e^{-st} d\nu(t). \tag{1}$$

Например, функция $\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$ представима в виде (1) с $\nu(t) = \sum_{n<e^t} \lambda(n)$, где $\lambda(n)$ – функция Лиувилля, а представление (1) для $\frac{1}{\zeta(s)}$ выполняется с $\nu(t) = \sum_{n<e^t} \mu(n)$, где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса. Естественно, что аналитические свойства функций $\nu(t)$ и $F[\nu](s)$ тесно связаны между собой. Известна классическая тауберова теорема Харди-Литтлвуда[1].

Пусть $\nu(x)$ – неубывающая функция, интеграл (1) сходится при $\Re s > 0$. Если при $s \to 0+$ выполняется асимптотическое равенство

$$F[\nu](s) \sim \frac{A}{s^\gamma}, A > 0, \gamma > 0,$$

то

$$\nu(x) \sim \frac{Ax^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \text{ при } x \to +\infty.$$

В 1967 году И.Катаи[2] доказал общую теорему. В терминах преобразования Лапласа она в предположении о мероморфности $F[\nu](s)$ в определённой полуплоскости, разложении Лорана в некотором полюсе $\theta + it_0$, $\theta > 0$, $t_0 \neq 0$ и поведении $F[\nu](s)$ в неких областях даёт оценку:

Для достаточно большого T имеем

$$\max_{T \le x \le \kappa T} \frac{\nu(x)}{e^{\theta x} x^{k-1}} > \delta,$$

$$\min_{T \le x \le \kappa T} \frac{\nu(x)}{e^{\theta x} x^{k-1}} < -\delta,$$

где $\delta > 0$, $\kappa > 1$ – константы, которые вычисляются по поведению $F[\nu](s)$, k – кратность полюса.

Эта теорема при применении к $\nu(x) = \sum_{n<e^x} \mu(n)$, где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса даёт следующий результат.

---

[1] D. Widder. The Laplace transform. Prinston Univ. press, 1941. стр 192

[2] I. Katai. On investigations in the comparative prime number theory, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **18**(1967), no 3–4, 379–391

Пример 1. *Пусть* $M(x) = \sum_{n<x} \mu(n)$. *Тогда существуют эффективно вычисляемые постоянные* $\kappa > 1$, $\delta > 0$ *такие, что для каждого достаточно большого* T *на промежутке* $[T, T^\kappa]$ *найдутся* x_1, x_2, *удовлетворяющие неравенствам*

$$M(x_1)x_1^{-1/2} \geq \delta,\ M(x_2)x_2^{-1/2} \leq -\delta,$$

В диссертации доказываются теоремы об осцилляции $\nu(x)$ при более слабых ограничениях на особенность и область аналитичности $F[\nu](s)$.

Степенной ряд $A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ после замены переменной $z = e^{-s}$ становится рядом $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}$, который является частным случаем преобразования Лапласа (1) с $\nu(t) = \sum_{n<t} a_n$, поэтому описание поведения степенного ряда $A(z)$ при стремлении по радиусу $\{z = e^{2\pi i\beta} r | r \in [0,1]\}$ к единичной окружности сводится к тому, чтобы посмотреть, как себя ведёт ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}$ при стремлении к оси Oy по промежутку $\{s = i2\pi\beta + \sigma | \sigma > 0\}$. Если при β из всюду плотного в отрезке $[0,1]$ множества выражение $F(i2\pi\beta + \sigma)$ неограничено при $\sigma \to 0+$, то особенности ряда $A(z)$ всюду плотны на единичной окружности, значит ряд $A(z)$ не продолжается за единичный круг.

Возможность аналитического продолжения и поведение вблизи единичной окружности функций, заданных степенными рядами, изучались давно.

Адамар привёл простейший пример функции, голоморфной в круге $|z| < 1$, которая не может быть продолжена за единичный круг ни в одной точке: $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$.

Если радиус сходимости степенного ряда равен 1, то невозможность продолжения за единичный круг ни в одной точке доказана в случаях лакунарности рядов (теоремы Фабри[3 4] и Мандельброита[5]), арифметических условиях (теоремы Сегё[6] и Карлсона[7]) или в случае если этот ряд отвечает тета-функции[8] или модулярной форме[9].

Например, теорема Фабри утверждает, что

если

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n} z^{\lambda_n},$$

где

$$\lambda_n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0,$$

[3] E. Fabry, Sur les points singuliers d'une fonction donnee par son developpement en serie et l'impossibilite du prolongement analytique dans des cas tres generaux, *Ann. Scient Ecole Norm. Sup. ser 3* **13**(1896), 367–399.

[4] Л. Бибербах. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967, с 80

[5] S. Mandelbroit, Sur les series de Taylor qui presentent des lacunes, *Ann. Scient Ecole Norm. Sup. ser 3.* **40**(1923), 413–462.

[6] G. Szego, Uber Potenzreihen mit endlish viellen verchsiedenen Koeffizienten *Sitzung. der Pr. Akad. der Wiss., Math.-phys. Kl* **16**(1922), 88–91

[7] F. Carlson, Uber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Mathematische Zeitschrift*, **9**(1921), 1–13.

[8] Д. Мамфорд Лекции о тета-функциях. М.: Мир, 1988

[9] Н. Коблиц. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988.

и радиус круга сходимости f равен 1, то ряд $f(z)$ не продолжается за единичный круг ни в одной точке, а теорема Сегё утверждает, что

степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n, \tag{2}$$

коэффициенты которого могут принимать лишь конечное число различных значений, или представляет рациональную функцию, или не продолжается за пределы единичного круга. В случае рациональности (2), начиная с некоторого номера, коэффициенты образуют периодическую последовательность.

Поведение степенных рядов, отвечающих L-функциям алгебраических полей, изучалось В. Н. Кузнецовым, В. В. Кривобоком, Е. В. Сецинской[10] в 2005 году.

Известен ряд работ о поведении степенных рядов с коэффициентами – значениями арифметических функций при стремлении к 1 по радиусу единичной окружности. Например, в качестве коэффициентов рассматривались $\mu(n)$ – функция Мёбиуса, $\phi(n)$ – функция Эйлера, $\Lambda(n)$ – функция Мангольдта, $\tau(n)$ – число делителей n (Г.Х.Харди, Д.Е.Литтлвуд[11], Катаи[12], С Герхолд[13], Бэнкс, Лука, Шпарлинский[14], Вигерт[15]).

Арифметическая функция $\alpha(n)$ называется

мультипликативной, если $\alpha(mn) = \alpha(m)\alpha(n)$ при $(m, n) = 1$,

вполне мультипликативной, если $\alpha(mn) = \alpha(m)\alpha(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$,

аддитивной, если $\alpha(mn) = \alpha(m) + \alpha(n)$ при $(m, n) = 1$,

вполне аддитивной, если $\alpha(mn) = \alpha(m) + \alpha(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

В 2009 году П.Борвейн и М.Конс[16] доказали общий результат для вполне мультипликативных функций, принимающих два значения. Если $f(n)$ – нетривиальная вполне мультипликативная функция $\mathbb{N} \to \{-1, 1\}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^n$$

[10] В.Н. Кузнецов,В.В. Кривобок,Е.В. Сецинская, О граничных свойствах одного класса степенных рядов, *Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам*, **2005.3**, 2005, 40–47.

[11] G.H. Hardy,J.E. Littlewood, Contributions to the Theory of the Riemann Zeta-Function and the Theory of the Distribution of Primes, *Acta Mathematica*, **41**(1916) no 1, 119–196.

[12] I. Katai, On oscillations of number-theoretic functions, *Acta Arithmetica*, **13**(1967), 107–122.

[13] S. Gerhold. Asymptotic estimates for some number-theoretic power series, *Acta Arithmetica*, **142**(2010), no 2, 187–196.

[14] W.D. Banks, F. Luca, I.E. Shparlinski, Irrationality of Power Series for Various Number Theoretic Functions, *Manuscripta Math*, **117**(2005), 183–197.

[15] S. Wigert. Sur la serie de Lambert et son application a la theorie des nombres. *Acta. Math*, **41**(1916), no 1 197–218.

[16] P. Borwein M. Coons. Transcendence of Power Series for some Number Theoretic Functions. *Proc of the American Math. Soc.*, **137**(2009),no 4, 1303–1305.

– трансцендентная функция над $\mathbb{Z}[x]$. Отсюда они вывели, что функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) z^n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) z^n$$

трансцендентны над $\mathbb{Z}[x]$. Здесь $\lambda(n)$ – функция Лиувилля.

Возникают задачи об обобщении подобных результатов. Во первых рассматривать степенные ряды с коэффициентами – значениями арифметических функций при стремлении переменной к корням из единицы по радиусам единичной окружности и во вторых обобщить классы арифметических функций, для которых это можно сделать.

Цель работы.

Цель работы – доказать аналоги тауберовых теорем для преобразований Лапласа мер, не являющихся положительными и вывести из этих аналогов асимптотические оценки поведения некоторых арифметических функций и степенных рядов с коэффициентами – значениями некоторых арифметических функций при стремлении по радиусу к единичной окружности.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие основные результаты. Все они являются новыми.

1. Доказано, что если преобразование Лапласа действительной функции удовлетворяет некоторым условиям, то эта функция допускает двустороннюю омега-оценку, которая зависит от поведения преобразования Лапласа вблизи особой точки. Параметры омега-оценки эффективны. Доказанная омега-оценка является аналогом тауберовой теоремы для достаточно общих случаев мер.

2. Исследовано асимптотическое поведение при стремлении переменной к корням из единицы по радиусам единичной окружности для общих классов степенных рядов с коэффициентами – значениями мультипликативных и аддитивных функций, определяемых небольшим количеством ограничений, откуда в частности следует непродолжаемость этих степенных рядов за единичный круг.

3. Исследовано асимптотическое поведение степенных рядов с коэффициентами – значениями функции Мёбиуса при стремлении переменной к корням из единицы по радиусам единичной окружности. Впервые получены нетривиальные омега-оценки, характеризующие поведение степенного ряда с коэффициентами $\mu(n)$.

Основные методы исследования.

В работе используются методы аналитической теории чисел и мультипликативной теории чисел.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты дают способ исследования асимптотического поведения разных теоретико-числовых функций и рядов и представляют интерес для специалистов по аналитической теории чисел, арифметическим функциям и степенным рядам.

Апробация результатов.

Результаты диссертации неоднократно докладывались на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ и научных конференциях:

- Научно-исследовательский семинар по теории чисел под руководством проф. Ю.В. Нестеренко, проф. Н.Г. Мощевитина в 2012–2013 гг;

- Семинар по теории диофантовых приближений под руководством проф. Ю.В.Нестеренко в 2012–2013 гг ;

- XVII Международная конференция «Ломоносов» в Москве (2011 г, апрель, 11-15)

- VIII Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 190-летию П.Л.Чебышева и 120-летию И.М.Виноградова в Саратове (2011 г, сентябрь 12-17).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1-4]. Работа [2] опубликована в журнале рекомендованном ВАК. Работа [4] – тезис доклада на международной конференции.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из трёх глав и списка литературы.

Полный объём диссертации – 118 страниц, библиография включает 28 наименований.

Содержание главы 1 Первая глава – введение. Здесь мы приводим мотивацию наших исследований, историю проблемы, объясняем результаты и структуру работы.

Содержание главы 2. В главе 2 из свойств преобразования Лапласа $F[\nu](s)$ (см (1)) вблизи границы области аналитичности выводятся свойства функции $\nu(t)$ и рассматривается случай, когда $\nu(t)$ в равенстве (1) не монотонна, и особенность преобразования Лапласа не лежит на действительной прямой. Общий результат применяется к теоретико-числовым функциям.

В параграфе 2.1.1 доказываются теоремы об осцилляции $\nu'(x)$, $\nu(x)$ при более слабых ограничениях чем в тауберовой теореме и теореме Катаи на особенность и область аналитичности $F[\nu](x)$.

Теорема 1. *Дана действительная функция $\nu(t)$, абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[0, R]$ ($R > 0$), а интеграл (1) сходится в полуплоскости $\Re s > \sigma_1$. Предположим, что функция $F(s) = F[\nu](s)$ обладает следующими свойствами.*

1) $F(s)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность отрезка $[\sigma_0, \sigma_1]$.

2) $F(s)$ аналитически продолжается в некоторую область G такую, что $G \subseteq \{\Re s > \sigma_0\}$, и $(\sigma_0 + it_0, \sigma_0 + it_0 + a) \subseteq G$, где $a > 0$, $t_0 \neq 0$.

3) Существуют числа $c > 0$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ такие, что

$$\overline{\lim_{x\to 0+}} \frac{|F(\sigma_0 + it_0 + x)|}{x^{-\alpha}(-\ln x)^n} \geq c. \tag{3}$$

Тогда справедливы неравенства

$$\overline{\lim_{u\to +\infty}} \frac{\nu'(u)}{u^{\alpha-1}e^{\sigma_0 u}(\ln u)^n} \geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)}, \tag{4}$$

$$\underline{\lim_{u\to +\infty}} \frac{\nu'(u)}{u^{\alpha-1}e^{\sigma_0 u}(\ln u)^n} \leq -\frac{c}{\Gamma(\alpha)}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть действительная функция $\nu(t)$ имеет ограниченную вариацию на любом отрезке $[0, R]$ ($R > 0$), интеграл (1) сходится в полуплоскости $\{\Re s > \sigma_1\}$, и $F[\nu](s)$ обладает условиями 1)–3) теоремы 1. Тогда в случае $\sigma_0 > 0$ справедливы неравенства:*

$$\overline{\lim_{u\to +\infty}} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1}e^{\sigma_0 u}(\ln u)^n} \geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|}, \tag{6}$$

$$\underline{\lim_{u\to +\infty}} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1}e^{\sigma_0 u}(\ln u)^n} \leq \frac{-c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|}, \tag{7}$$

а в случае $\sigma_0 \le 0$ справедливы неравенства:

$$\overline{\lim_{u\to+\infty}} \frac{\nu(u)-\nu(0)-F(0)}{u^{\alpha-1}e^{\sigma_0 u}(\ln u)^n} \ge \frac{c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0+it_0|}, \tag{8}$$

$$\underline{\lim_{u\to+\infty}} \frac{\nu(u)-\nu(0)-F(0)}{u^{\alpha-1}e^{\sigma_0 u}(\ln u)^n} \le \frac{-c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0+it_0|}. \tag{9}$$

Теоремы 1 – 2 доказываются в параграфе 2.1.1.

В параграфе 2.1.2 доказывается точность неравенств, полученных в теоремах 1 – 2, а именно, что оценки в правых частях равенств (4)-(5),(6)–(9) в этих теоремах не могут быть увеличены более чем в два раза.

В параграфе 2.1.3 доказываются следствия теорем 1 – 2 для рядов и интегралов Дирихле, так как ряды и интегралы Дирихле являются преобразованиями Лапласа некоторых мер.

В параграфе 2.2.1 рассматривается пример, когда теоремы Харди-Литтлвуда и Катаи неприменимы, а наша теорема применима. Пусть $f(s) = (\eta(s))^{-a}$, где $\eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$, $a > 0$, $a \notin \mathbb{Z}$. Так как $f(s) = F[\nu](s)$, где ν не монотонна, то теорема Харди-Литтлвуда неприменима. Особые точки $f(s)$ не являются полюсами, поэтому теорема Катаи также неприменима. А теорема 1 даёт следующие оценки:

Пример 2. *Пусть $\alpha(n)$ – коэффициенты разложения в ряд Дирихле функции $((1-2^{1-s})\zeta(s))^{-a}$, $C(x) = \sum_{n<x} \alpha(n)$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{C(u)}{(\ln u)^{\alpha-1}u^{-1}} \ge c,$$

$$\underline{\lim_{u\to\infty}} \frac{C(u)}{(\ln u)^{\alpha-1}u^{-1}} \le -c,$$

где $c > 0$ – некоторая эффективно вычисляемая постоянная.

С использованием результатов параграфа 2.1.3 в параграфе 2.2.2 устанавливаются связи между расположением нулей дзета-функции Римана с учётом кратностей и поведением функций

$$M_a(x) = \sum_{n<x} \frac{\mu(n)}{n^a},$$

где $0 \le a \le \frac{1}{2}$.

Теоремы 1 – 2 позволяют оценивать осцилляцию $\nu(x)$ при более общих, чем у Катаи условиях на $F[\nu](s)$.

В теореме Катаи существенно использовалось, что особая точка функции $F[\nu](s)$ – полюс. В нашем случае особая точка может быть точкой ветвления и не изолированной особой точкой.

Результаты секции 2.3 используются в главе 3.

Содержание главы 3. В главе 3 изучается поведение сумм степенных рядов с коэффициентами – значениями арифметических функций вблизи границы единичного круга. Пусть $\beta \in \mathbb{C}$, тогда при $\Re s > 1$ функция $\zeta^{\beta}(s)$ раскладывается в ряд Дирихле с некоторыми коэффициентами $\tau_{\beta}(n)$:

$$\zeta^{\beta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{\beta}(n) n^{-s}.$$

Обозначим

$$R_{\beta}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{\beta}(n) z^{n}. \tag{10}$$

В секции 3.1 изучается поведение степенных рядов (10) вблизи единичной окружности. Радиус сходимости этих рядов равен 1. Возникает вопрос о возможности продолжения этих функций за единичный круг и поведении вблизи единичной окружности.

В секции 3.1 доказывается следующая ниже теорема 3 для класса степенных рядов (10), которая влечёт за собой непродолжаемость сумм рядов (10) за единичный круг ни в одной точке. Введём ещё одно обозначение:

Пусть $g(x) \geq 0$, тогда равенство $f(x) = \Omega(g(x))$ при $x \to a$ означает, что существует $\delta > 0$ и бесконечная последовательность $t_k \to a$, такие что $|f(t_k)| > \delta g(t_k)$.

Через p будем обозначать простые числа.

Теорема 3. *Если $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$, то при любом $\varepsilon > 0$ для функции $R_{\beta}(z)$ выполняется равенство*

$$R_{\beta}(e^{2\pi i \frac{l}{p}} t) = \Omega((1-t)^{-1+\varepsilon}) \text{ при } t \to 1- .$$

В секции 3.2 рассматриваются степенные ряды с мультипликативными и аддитивными коэффициентами, и доказываются общие теоремы о поведении рядов на некоторых лучах, исходящих из точки 0 и, как следствие, получается непродолжаемость этих степенных рядов за единичный круг.

В секции 3.2 исследование поведения степенного ряда $A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) z^n$ на луче $z = re^{2\pi i \phi}$ при $r \to 1-$ сводится к исследованию поведения функции от s, задаваемой рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n) e^{2\pi i \phi n}}{n^s} \tag{11}$$

при приближении к её особым точкам. При $\phi \in \mathbb{Q}$ последовательность $e^{2\pi i \phi n}$ связана с характерами Дирихле. Поэтому ряд Дирихле (11) выражается в виде линейной комбинации рядов

$$F(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)\chi(n)}{n^s}. \tag{12}$$

Определение 1. *Кручением ряда Дирихле* $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)}{n^s}$ *характером* χ *называется ряд Дирихле* $F(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)\chi(n)}{n^s}$.

Исследование ряда (11) сводится к исследованию кручений (12).

Методы, изложенные в секции 3.2, позволяют исследовать поведение степенных рядов с коэффициентами – арифметическими функциями на лучах, соединяющих 0 и $e^{2\pi i\phi}$, где $\phi\in\mathbb{Q}$, в отличие от предыдущих результатов, где исследование велось на луче, соединяющим 0 и 1. Они дают возможность исследовать поведение некоторых степенных рядов на лучах и доказывать непродолжаемость степенного ряда за единичный круг, откуда сразу следует трансцендентность степенного ряда над $\mathbb{C}(x)$.

Перейдём к описанию результатов секции 3.2.

Определение 2. *Рядом Дирихле последовательности* $\alpha(n)$ *называется* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)}{n^s}$.

В параграфах 3.2.1 – 3.2.2 исследуется структура рядов Дирихле мультипликативных и аддитивных последовательностей и доказываются некоторые теоремы о суммах, содержащих характеры.

С использованием этих результатов в параграфе 3.2.3 доказываются теоремы о поведении некоторых рядов Дирихле и их кручений.

С помощью доказанных результатов в параграфе 3.2.4 устанавливаются следующие теоремы – основные результаты секции 3.2.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha(n)$ *– вполне мультипликативная функция, принимающая положительные значения,* $\alpha(p)\le p$, *и существуют такие* A,B, $0<\frac{B}{2}<A<B$, *что для всех* p *выполняются неравенства* $A\le\alpha(p)\le B$. *Обозначим* $P_0=\sup\{p:\frac{\alpha(p)}{\sqrt{p}}\ge\frac{1}{2}\}$, $H(s)=\prod_{p\le P_0}(1-\frac{\alpha(p)}{p^s})^{-1}$, $n\ge 0$ *– порядок полюса* $H(s)$ *в* 1 *и* $\mathfrak{A}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)z^n$. *Тогда если* $\alpha(q)\ne 1$ *для некоторого простого* q *, то*

$$\mathfrak{A}(e^{\frac{2\pi il}{q}}r)=\Omega((1-r)^{-1}(-\ln(1-r))^{A+n-1-\varepsilon}),\ r\to 1-$$

каковы бы ни были $l\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon>0$.

Из теоремы 4 следует

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и, кроме того,* $\alpha(p)\ne 1$ *для бесконечно многих* p. *Тогда степенной ряд* $\mathfrak{A}(z)$ *не продолжается за единичный круг ни в одной точке.*

Теорема 5. *Пусть* $\alpha(n)$ – *комплекснозначная мультипликативная функция,* $0 < \alpha(p) \le p$. *Существуют* A, B, c, $0 < \frac{B}{2} < A < B$, $0 < c < 2$, *такие, что для всех* p *выполняются неравенства* $A \le \alpha(p) \le B$, $\alpha(p^k) = O(c^k)$. *Пусть* $\mathfrak{A}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) z^n$, $E_p(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(p^k) p^{-ks}$, *причём*

$$E_p(1) \ne 0 \text{ для всех } p, \tag{13}$$

и

$$E_q(1) \ne \frac{q}{q-1}$$

для некоторого простого q. *Тогда*

$$\mathfrak{A}(e^{\frac{2\pi i l}{q}} r) = \Omega((1-r)^{-1}(-\ln(1-r))^{A-1-\varepsilon})$$

для любых $l \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon > 0$ *при* $r \to 1-$.

Константа в O *в условии теоремы предполагается независимой от* p *и* k.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и, кроме того,* $E_p(1) \ne \frac{p}{p-1}$ *для бесконечно многих* p. *Тогда степенной ряд* $\mathfrak{A}(z)$ *не продолжается за единичный круг ни в одной точке.*

В параграфе 3.2.5 доказана асимптотическая теорема, важная для исследования степенных рядов многих мультипликативных последовательностей. Рассмотрим пример её применения.

Пример 3. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$, $-a \notin \mathbb{N}_0$, $\sigma_a(n) = \sum_{d|n} n^a$ *и* $\mathfrak{S}_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) z^n$. *Пусть* $l \not\equiv 0 (mod\ p)$, *тогда при* $u \to 0+$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$\mathfrak{S}_a(e^{\frac{2\pi i l}{p}} e^{-u}) = \Gamma(a+1)\zeta(a+1)p^{-a-1}u^{-a-1} +$$
$$+\zeta(1-a)p^{a-1}u^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

где c_k – *некоторые явно указанные числа, зависящие от* a, k, l, p.

Доказывается это утверждение в параграфе 3.2.7.

В параграфе 3.2.6 с использованием результатов параграфов 3.2.1 и 3.2.2 доказываются следующие теоремы:

Теорема 6. *Пусть* $\alpha(n)$ – *комплекснозначная аддитивная функция,* $\mathfrak{A}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) z^n$, $G_p(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(p^k) - \alpha(p^{k-1})) p^{-ks}$. *Пусть*

$$|\alpha(p^{k+1}) - \alpha(p^k)| \le C \text{ для всех простых } p, k \in \mathbb{N}.$$

Тогда если $G_q(1) \ne 0$ *для данного простого* q, *то при любом* $l \not\equiv 0 (mod\ q)$ *верно неравенство*

$$\overline{\lim_{r \to 1-}} (1-r) |\mathfrak{A}(e^{\frac{2\pi i l}{q}} r)| \ge |G_q(1)|. \tag{14}$$

Следствие 3. *Пусть справедливы условия теоремы 6 и, кроме того, $G_p(1) \neq 0$ для бесконечно многих p. Тогда степенной ряд $\mathfrak{A}(z)$ не продолжается за единичный круг ни в одной точке.*

Если $\alpha(n)$ – вполне аддитивная функция, то теорема 6 допускает уточнение:

Теорема 7. *Пусть $\alpha(n)$ – комплекснозначная вполне аддитивная функция, $\mathfrak{A}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)z^n$, $|\alpha(p)| \leq C$ для всех p. Тогда каково бы ни было простое число q, такое, что $\alpha(q) \neq 0$ для данного простого q, при любом $l \in \mathbb{Z}_q \setminus \{0\}$ справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{r \to 1-}} (1-r)|\mathfrak{A}(e^{\frac{2\pi i l}{q}} r)| \geq \frac{|\alpha(q)|}{q-1} \tag{15}$$

для любого $l \not\equiv 0 (mod\ q)$.

При условии вполне аддитивности функции $\alpha(n)$ следствие 3 допускает уточнение.

Следствие 4. *Пусть справедливы условия теоремы 7 и, кроме того, $\alpha(p) \neq 0$ для бесконечно многих p. Тогда степенной ряд $\mathfrak{A}(z)$ не продолжается за единичный круг ни в одной точке.*

Результаты параграфов 3.2.4 – 3.2.6 показывают, что, наложив определённые условия на арифметическую структуру коэффициентов степенного ряда, можно получить класс рядов, непродолжаемых за единичный круг.

В параграфе 3.2.7 содержатся примеры конкретных рядов, к которым применимы теоремы. Степенные ряды многих арифметических последовательностей раскладываются в асимптотические ряды при $z = e^{2\pi i \phi} e^{-t}$ и $t \to 0+$, $\phi \in \mathbb{Q}$.

К функции $\mathfrak{M}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) z^n$ не применимы общие теоремы 3 – 7, поэтому она рассматривается отдельно в секции 3.3. В параграфах 3.3.1 – 3.3.3 доказывается следующая оценка

Теорема 8. *Для любого рационального β существует $a > 0$, что при $r \to 1-$*

$$\mathfrak{M}(re^{2\pi i \beta}) = \Omega((1-r)^{-a}). \tag{16}$$

В параграфе 3.3.4 рассматриваются случаи, когда оценку при $r \to 1-$ можно усилить. В параграфе 3.3.5 выводится следствие для частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) e^{2\pi i \beta n}$.

Следствие 5. *Для любого $\beta \in \mathbb{Q}$ существует $a > 0$, что при $x \to +\infty$*

$$\sum_{n<x} \mu(n) e^{2\pi i n \beta} = \Omega(x^a). \tag{17}$$

Доказательство теоремы 8 использует следующий принцип. Если имеется такое число $\beta \in \mathbb{Q}$, что $\max_{0 \le t \le r} |\mathfrak{M}(e^{2\pi i\beta} t)|$ растёт медленно при $r \to 1-$, то можно получить некоторый степенной ряд, продолжающийся за единичный круг в точке $e^{2\pi i\beta}$, коэффициенты которого принимают конечное число значений и не являются периодическими, что противоречит теореме Сегё (см стр 1).

При $\beta = 0$ результат (17) хуже, чем у Катаи. С другой стороны при $\beta \neq 0$ методы Катаи не позволяют получить оценку (17).

В параграфе 3.3.6 для рациональных $\beta \in \mathbb{Q}$ с небольшими знаменателями мы получим безусловное усиление теоремы 8 и следствия 5.

Теорема 9. *Пусть* $\beta = \frac{l}{q} \in \mathbb{Q}$ *и* $q \le 100$*, тогда при* $r \to 1-$

$$\mathfrak{M}(re^{2\pi i\beta}) = \Omega((1-r)^{-\frac{1}{2}}).$$

Теорема 10. *Пусть* $\beta = \frac{l}{q} \in \mathbb{Q}$ *и* $q \le 100$*, тогда при* $x \to +\infty$

$$\sum_{n<x} \mu(n) e^{2\pi i n\beta} = \Omega(\sqrt{x}).$$

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф., чл-корр. РАН Ю.В.Нестеренко за постановку задачи, многочисленные полезные советы и обсуждения.

Автор благодарит проф. Н.Г. Мощевитина за плодотворные обсуждения и поддержку.

Автор очень признателен всему коллективу кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ за хорошую атмосферу и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. О.А. Петрушов. О поведении некоторых степенных рядов вблизи единичной окружности. *Чебышовский сборник*, **12**(2011), 85–95.

2. О.А. Петрушов. Асимптотические оценки функций на основе поведения их преобразования Лапласа вблизи особых точек, *Математические заметки*, **93**(2013),№6, 2013, 920–931.

3. О.А. Петрушов. О поведении некоторых степенных рядов вблизи единичной окружности.Часть 2. Деп. в ВИНИТИ, 18.06.2013. *Библиогр. аннотир. указатель "Депонир. науч. работы"*(2013) №8.

4. О.А. Петрушов. О поведении некоторых степенных рядов вблизи единичной окружности. АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ Тезисы докладов VIII Международной конференции, посвящённой 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова, Саратов 12—17 сентября 2011 г С 55–56.