ФГБОУ ВПО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Полянский Александр Андреевич

О показателях иррациональности некоторых чисел

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре теории чисел Механико–математического факультета ФГБОУ ВПО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	член–корр. РАН, профессор Юрий Валентинович Нестеренко
Официальные оппоненты:	Салихов Владислав Хасанович, доктор физико–математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО Брянский государственный технический университет) Злобин Сергей Алексеевич, кандидат физико–математических наук (ООО "Аби ИнфоПоиск", руководитель группы анализа документов)
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 15 ноября 2013 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при ФГБОУ ВПО Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, $8^{й}$ этаж).

Автореферат разослан 15 октября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.84 при ФГБОУ ВПО МГУ,
доктор физико–математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена эффективным приближениям действительных чисел рациональными дробями, одному из ключевых направлений теории диофантовых приближений. В ней доказываются оценки сверху для так называемых показателей иррациональности и квадратичных показателей иррациональности некоторых трансцендентных чисел, а также оценивается показатель совместного приближения чисел $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$ рациональными дробями.

Для любого иррационального числа можно ввести характеристику того, насколько хорошо оно приближается рациональными числами.

Показатель иррациональности *числа* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *определяется как точная верхняя грань множества таких чисел* $\varkappa$, *что неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < |q|^{-\varkappa} \tag{1}$$

имеет бесконечное количество решений в рациональных числах p/q. *Обозначается показатель иррациональности через* $\mu(\alpha)$.

При $\varkappa > \mu(\alpha)$ неравенство (1) имеет конечное число решений, а при $\varkappa < \mu(\alpha)$ — бесконечное.

Следствие из теоремы Дирихле утверждает, что для любого $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ выполняется неравенство $\mu(\alpha) \geqslant 2$, см. § 2 главы 2 в книге А. Б. Шидловского[1].

Дж. Сондоу[2] доказал, что если известно разложение числа $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в цепную дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, то справедлива формула

$$\mu(\alpha) = 1 + \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} = 2 + \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n},$$

где p_n/q_n — n-ая подходящая дробь числа α.

Пользуясь разложением числа e в цепную дробь $[2; \overline{1, 2\lambda, 1}]_{\lambda=1,2,\ldots}$, нетрудно доказать, что $\mu(e) = 2$. Аналогично для всех чисел

$\alpha = [b_0; b_1, \ldots, b_s, \overline{c_1 + \lambda d_1, \ldots, c_m + \lambda d_m}]_{\lambda=1,2,\ldots}$, где среди d_i есть ненулевые, можно показать, что $\mu(\alpha) = 2$. Фактически Б. Г. Тасоевым[3] доказан более сильный результат.

[1] А. Б. Шидловский, *Диофантовы приближения и трансцендентные числа.* Физматлит, Москва, 2007. с. 266

[2] J. Sondow, Irrationality Measures, Irrationality Bases, and a Theorem of Jarnik. http://arxiv.org/abs/math.NT/0406300.

[3] Б. Г. Тасоев, О рациональных приближениях некоторых чисел. *Матем. заметки*, (2000) **67**:6, 931 – 937.

В 1955 г. К. Рот[4] доказал, что $\mu(\alpha) = 2$ для любого действительного алгебраического иррационального числа α. Следует отметить, что для алгебраических чисел степени больше 2 цепные дроби практически не изучены.

Особый интерес представляют собой доказательства оценок сверху для показателей иррациональности логарифмов алгебраических чисел, см. обзор В. В. Зудилина[5].

В 1964 г. А. Бейкер[6] доказал неравенство, из которого следует, что

$$\mu(\ln 2) \leqslant 12,5.$$

Позже эта оценка улучшалась в работах Л. В. Данилова[7], К. Аллади и М. Робинсона[8], Г. В. Чудновского[9,10], Е. Рейсата[11], Дж. Рина[12], Е. Рухадзе[13], М. Хаты[14]. В 2009 г. Р. Марковеккио[15], пользуясь групповым методом Рина–Виолы[16,17], доказал оценку

$$\mu(\ln 2) \leqslant 3,57455\ldots.$$

В 2010 г. Ю. В. Нестеренко[18] упростил доказательство этого факта, при этом он использовал несобственные комплексные интегралы типа Меллина–Барнса (см. главу 5 в книге Ю. Люка[19]).

---

[4] K. F. Roth, Rational Approximations to Algebraic Numbers. *Mathematika*, (1955) **2**, 1 – 20.

[5] В. В. Зудилин, Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмов. *Чебышёвский сборник*, (2004) **5**:2, 49 – 65.

[6] A. Baker, Approximations to the logarithms of the certain rational numbers. *Acta Arithm.*, (1964) **10**, 315 — 323.

[7] Л. В. Данилов, Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках. *Матем. заметки*, (1978) **24**:4, 449 – 458.

[8] K. Alladi, M. Robinson, On centain irrational value of the logarithm. *Lect. Notes Math.*, (1979) **751**, 1 – 9.

[9] G. V. Chudnovsky, Approximations rationnelles des logarithmes de nombres rationnels. *C.r. Acad. sci., Ser.A*, (1979) **228**:21, 607 – 609.

[10] G. V. Chudnovsky, Number theoretic applications of polynomians with rational coeffitients defined by extremality conditions. *Progr.Math.*, (1983) **35**, 61 – 105.

[11] E. Reyssat, Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels. *Progr. in Math., vol. 31*, Birkhauser, Boston, 1983. p. 235 – 245.

[12] G. Rhin, Approximants de Pade et mesures effectives d'irrationalite. *Seminaire de Theorie des Nombres*, Paris, 1985–86. *Progress in Math., vol. 71*, Birkhauser, Boston, 1987. p. 155 — 164.

[13] Е. А. Рухадзе, Оценка снизу для приближения $\ln 2$ рациональными числами. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, (1987) **6**, 25 – 29.

[14] M. Hata, Legendre type polynomials and irrationality measures. *J. reine and angew. Math.*, (1990) **407**, 99 – 125.

[15] R. Marcovecchio, The Rhin-Viola method for $\log 2$. *Acta Arith.*, (2009) **139**:2, 147 – 184.

[16] G. Rhin, C. Viola, On a permutation group related to $\zeta(2)$. *Acta Arith.*, (1996) **77**, 23 – 56.

[17] G. Rhin, C. Viola, The group structure for $\zeta(3)$. *Acta Arith.*, (2001) **97**, 269 – 293.

[18] Ю. В. Нестеренко, Некоторые замечания о $\zeta(3)$. *Матем. заметки*, (1996) **59**:6, 865 – 880.

[19] Ю. Люк, *Специальные математические функции и их аппроксимация.* Мир, Москва, 1980. 608 с.

В 1983 г. Е. Рейсатом[11] было доказано неравенство

$$\mu(\ln 3) \leqslant 14,7.$$

Позже эту оценку улучшил Дж. Рин[12]. В 2007 г. В. Х. Салихов[20] доказал, что

$$\mu(\ln 3) \leqslant 5,125. \tag{2}$$

В 1978 г. Л. В. Данилов[7] получил неравенство

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leqslant 9,35.$$

Позже эта оценка улучшалась в работах К. Аллади и М. Робинсона[21], Г. В. Чудновского[22,23], А. К. Дубицкаса[24], Дж. Рина[12], М. Хаты[14,25]. В 2011 г. В. А. Андросенко и В. Х. Салихов[26] пользуясь методом из работы Р. Марковеккио[15], доказали, что

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leqslant 4,60106\ldots. \tag{3}$$

Несколько изменив интеграл из статьи Ю. В. Нестеренко[18], М. Г. Башмакова[27,28] в 2010–2011 гг. предложила доказательство оценок сверху для показателей иррациональности чисел вида

$$\alpha_k = \sqrt{2k+1}\ln\frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k},\ \text{где } k = 1, 2l \text{ при } l \in \mathbb{Z}, l > 0.$$

В частности, было доказано

$$\mu(\alpha_1) \leqslant 11,918552\ldots,\quad \mu(\alpha_2) \leqslant 3,71331\ldots,$$

[20] В. Х. Салихов, О мере иррациональности $\log 3$. *Докл. РАН*, (2007) **417**:6, 753 – 755.

[21] K. Alladi, M. L. Robinson, Legendre polynomials and irrationality. *J. Reine Angew. Math.*, (1980) **318**, 137 – 155.

[22] G. V. Chudnovsky, Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence. *Lond. Math. Sot. Lect. Note Ser.*, (1982) **56**, 11 – 82. Zbl 489.10027.

[23] G. V. Chudnovsky, Recurrences Pade approximations and their applications. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 92*, Dekker, New York, 1984. p. 215 – 238.

[24] А. К. Дубицкас, Приближения $\pi/\sqrt{3}$ рациональными дробями. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, (1987) **6**, 73 – 76.

[25] M. Hata, Rational approximations to π and some other numbers. *Acta Arith.*, (1993) **63**, 335 – 349.

[26] В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Интеграл Марковеккио и мера иррациональности $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. *Вестник БГТУ*, (2011) **34**:4, 129 – 132.

[27] М. Г. Башмакова, Оценка мер иррациональности логарифма "золотого сечения". *Чебышевский сборник*, (2010) **11**:1, 47 – 53.

[28] M. G. Bashmakova, Estimates for the exponent of irrationality for certain values of hypergeometric functions. *M. Jour. of Combin. and Number Theory*, (2011) **1**:1, 823 – 835.

$$\mu(\alpha_6) \leqslant 11,826\ldots, \quad \mu(\alpha_8) \leqslant 18,937\ldots. \tag{4}$$

Пусть число $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — квадратичная иррациональность, то есть корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a, b, c) = 1$, $a > 0$. Тогда через $H(\beta)$ будем обозначать $\max\{|a|, |b|, |c|\}$.

Для любого числа, не являющегося корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, можно ввести характеристику того, насколько хорошо оно приближается квадратичными иррациональностями.

Квадратичный показатель иррациональности *числа α, не являющегося корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, определяется как точная верхняя грань множества таких чисел $\varkappa$, что неравенство*

$$|\alpha - \beta| < H^{-\varkappa}(\beta) \tag{5}$$

имеет бесконечное количество решений в квадратичных иррациональностях β. Обозначается квадратичный показатель иррациональности через $\mu_2(\alpha)$.

При $\varkappa > \mu_2(\alpha)$ неравенство (5) имеет конечное число решений, а при $\varkappa < \mu_2(\alpha)$ — бесконечное.

В 1980 г. А. Коен[29] при помощи линейных рекуррент доказал

$$\mu_2(\ln 2) \leqslant 287,819.$$

Позже эта оценка улучшалась в работах Е. Рейсата[11] и М. Хата[30]. В 2009 г. Р. Марковеккио[15] показал, что

$$\mu_2(\ln 2) \leqslant 15,65142\ldots. \tag{6}$$

М.Г. Башмакова[27] доказала оценку квадратичного показателя иррациональности числа $\alpha_2 = \sqrt{5}\ln((3-\sqrt{5})/2)$

$$\mu_2(\alpha_2) \leqslant 33,0094\ldots. \tag{7}$$

Для двух иррациональных чисел можно ввести характеристику того, насколько хорошо можно их приблизить рациональными числами с общим знаменателем.

Показатель совместного приближения *для двух чисел α, $\beta \notin \mathbb{Q}$ определяется как точная верхняя грань множества таких чисел $\varkappa$, что неравенство*

$$\max\left\{\left|\alpha - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\beta - \frac{p_2}{q}\right|\right\} < |q|^{-\varkappa}$$

[29] H. Cohen, Acceleration de la convergence de certaines recurrences lineaires. *Seminaire de Theorie des Nombres*, Grenoble, 1980, p. 47.

[30] M. Hata, $\mathbb{C}^2$-saddle method and Beukers‘ integral. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (2000), **352**:10, 4557 – 4583.

имеет бесконечное количество решений в рациональных числах p_1/q *и* p_2/q.

Следствие из теоремы Дирихле о совместных приближениях утверждает, что показатель совместного приближения для любых двух иррациональных чисел больше или равен $1,5$, см. § 2 главы II в книге В. Шмидта[31].

Цель работы

Построить эффективные приближения к некоторым трансцендентным числам и с их помощью доказать новые оценки сверху для показателей иррациональности, квадратичных показателей иррациональности этих чисел и показателя совместного приближения чисел $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$ рациональными дробями.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. В диссертации доказаны следующие основные результаты:

1. Доказаны новые оценки показателей иррациональности чисел
$$\alpha_k = \sqrt{2k+1}\ln\frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 0,$$
улучшающие результаты М. Г. Башмаковой[28]. См. ниже теорему 1.

2. Доказаны новые оценки квадратичных показателей иррациональности чисел α_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 2$, улучшающие результаты Р. Марковеккио[15] и М. Г. Башмаковой[27]. См. ниже теоремы 2, 7.

3. Доказаны новые оценки показателей иррациональности чисел
$$\beta_k = \sqrt{2k-1}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}, \text{ где } k = 2l \text{ при } l \in \mathbb{Z}, l > 0.$$
Оценка показателя иррациональности для числа $\beta_2 = \pi/\sqrt{3}$, которая была получена другим способом В. А. Андросенко и В. Х. Салиховым[26], совпадает с той, что предложена в диссертации. Для остальных чисел β_k показатели иррациональности оцениваются впервые. См. ниже теорему 4.

4. Впервые получены оценки квадратичных показателей иррациональности чисел β_k, где $k = 2l$ при $l \in \mathbb{Z}$, $l > 1$. См. ниже теоремы 5, 8.

[31] В. Шмидт, *Диофантовы приближения.* МИР, Москва, 1983. с. 232.

5. Впервые получена оценка показателя совместного приближения чисел $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$ рациональными дробями. См. ниже теорему 6.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы математического анализа, теории функций комплексного переменного и теории диофантовых приближений.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории диофантовых приближений.

Апробация диссертации

Результаты настоящей диссертации докладывались автором на семинаре по теории чисел под руководством Ю. В. Нестеренко, Н. Г. Мощевитина (мехмат ФГБОУ ВПО МГУ, 2010 – 2013 гг., неоднократно), на семинаре "Диофантовы приближения и трансцендентные числа" под руководством Ю. В. Нестеренко (мехмат ФГБОУ ВПО МГУ, 2010 г.), а также на следующих на научных конференциях:

1. конференция "Ломоносов–2010" (Москва, ФГБОУ ВПО МГУ, 12 – 15 апреля 2010 г.);

2. всероссийская конференция по математике, информатике и методике их преподавания (Москва, ФГБОУ ВПО МПГУ, 14 – 16 марта 2011 г.);

3. международная конференция "Diophantine Analysis" (Астрахань, ГОУ ВПО АГУ, 30 июля – 3 августа 2012 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 4 работах, список которых приведен в конце автореферата, $[1-4]$. Все работы написаны без соавторов.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы (39 наименований). Общий объем диссертации 138 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во введение к диссертации излагается история вопроса, дается обзор литературы, формулируются постановки задач и основные результаты работы.

Содержание главы 1

Основными результатами первой главы являются новые оценки сверху для показателей иррациональности чисел

$$\alpha_k = \sqrt{2k+1}\ln\frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \tag{8}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 2$, и

$$\beta_k = \sqrt{2k-1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}, \tag{9}$$

где $k = 2l$ при $l \in \mathbb{Z}$, $l > 0$, и квадратичных показателей иррациональности чисел α_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 10$, и β_k, где $k = 2l$ при $l \in \mathbb{Z}$, $l > 4$ (для меньших положительных значений k более точные оценки получены в третьей главе).

Для этого исследуются функции $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$, определенные следующим образом:

$$J_l(t) = \frac{t^{-\frac{b_1n+2}{2}}}{2\pi i}\int_{L_l}\Psi_l(\zeta)d\zeta, \tag{10}$$

где

$$\Psi_1(\zeta) = A(\zeta)\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)(-t)^{-\zeta},$$
$$\Psi_2(\zeta) = A(\zeta)\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^2 t^{-\zeta},$$
$$\Psi_3(\zeta) = A(\zeta)\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^3(-t)^{-\zeta}.$$

Здесь в качестве многочлена $A(x)$ используется многочлен

$$\binom{x+b_1n+1}{c_1n+1}\binom{x+b_2n+1}{c_2n+1}\binom{x+b_3n+1}{c_3n+1}. \tag{11}$$

На целые неотрицательные параметры b_i, c_i накладываются некоторые условия, а число n — натуральное. Таким образом, $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ задают три последовательности функций. Контуры интегрирования L_1, L_2, L_3 выбираются определенным образом.

Справедливы тождества

$$J_1(t) = -U_1(t), \quad J_2(t) = U_1(t)\ln t - U_2(t), \tag{12}$$

$$J_3(t) = -\frac{1}{2}U_1(t)\ln^2 t + U_2(t)\ln t - \frac{1}{2}U_3(t) - i\pi(U_1(t)\ln t - U_2(t)). \tag{13}$$

Здесь $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ удовлетворяют равенствам

$$U_1(t) = W_1\left(t+\frac{1}{t}\right), U_2(t) = \left(t-\frac{1}{t}\right)W_2\left(t+\frac{1}{t}\right), U_3(t) = W_3\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

для некоторых $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

Чтобы получить оценки показателей иррациональности чисел α_k, мы рассматриваем линейную комбинацию

$$J_2(t) = U_1(t)\ln t - U_2(t), \tag{14}$$

с коэффициентами $U_i(t) \in \mathbb{Q}(t)$ при значениях параметра t, равных

$$\lambda_{k,1} = \frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 0. \tag{15}$$

В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа α_k. Применяется метод перевала для исследования асимптотического поведения этих последовательностей и используются известные факты о распределении простых чисел для исследования арифметических свойств рациональных дробей, приближающих числа α_k. В итоге, используя полученные результаты и применяя к этим последовательностям лемму Хаты[25] о оценках сверху показателей иррациональностей, мы доказываем теорему 1.

Теорема 1. *Справедливы оценки.*

k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$
3	$6,64610\ldots$	9	$5,23162\ldots$	14	$3,42052\ldots$	19	$4,75667\ldots$
5	$5,82337\ldots$	10	$3,45355\ldots$	15	$4,88401\ldots$	20	$3,39024\ldots$
6	$3,51433\ldots$	11	$5,08119\ldots$	16	$3,40866\ldots$		
7	$5,45247\ldots$	12	$3,43506\ldots$	17	$4,81442\ldots$		
8	$3,47833\ldots$	13	$4,97025\ldots$	18	$3,39873\ldots$		

Эти результаты усиливают соответствующие неравенства (4) из работы М. Г. Башмаковой[28]. Показатели иррациональности для чисел α_k с нечетными $k > 1$ ранее не оценивались.

Чтобы получить оценки квадратичных показателей иррациональности чисел α_k, мы рассматриваем линейные комбинации

$$J_2(t) = U_1(t)\ln t - U_2(t),\ 2J_3(t) + 2(i\pi + \ln t)J_2(t) = U_1(t)\ln^2 t - U_3(t) \quad (16)$$

с коэффициентами $U_i(t) \in \mathbb{Q}(t)$ при значениях параметра t, равных (15). В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа α_k и α_k^2. Применяется метод перевала для исследования асимптотического поведения этих последовательностей и используются известные факты о распределении простых чисел для исследования арифметических свойств рациональных дробей, приближающих числа α_k и α_k^2. В итоге, используя полученные результаты и применяя к этим последовательностям лемму Хаты[30] о оценках сверху квадратичных показателей иррациональностей, мы доказываем теорему 2.

Теорема 2. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
11	*297,68074...*	*15*	*50,60816 ...*	*19*	*31,98452...*
12	*9,46081...*	*16*	*8,71172...*	*20*	*8,23651...*
13	*80,82763...*	*17*	*38,51000...*		
14	*9,04083...*	*18*	*8,45082...*		

Отметим, что Р. Марковеккио[15] упоминает, что получил такую же, как и в теореме 2, оценку для $\mu_2(\ln(2/3)) = \mu_2(\alpha_{12})$.

Квадратичные показатели иррациональности для остальных чисел α_k, приведенных в теореме 2, ранее не оценивались.

Чтобы получить оценки показателей иррациональности чисел β_k, мы рассматриваем линейную комбинацию (14) при значениях параметра t, равных

$$\lambda_{k,2} = \frac{k-1-i\sqrt{2k-1}}{k} = e^{-i\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}},\ \text{где } k \in \mathbb{Z}, k > 1. \quad (17)$$

В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа β_k. Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 1, мы устанавливаем справедливость теоремы 4.

Теорема 4. *Справедливы оценки.*

k	$\mu(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu(\beta_k) \leqslant$
2	$4,60105\ldots$	8	$3,66666\ldots$	14	$3,53683\ldots$	20	$3,47757\ldots$
4	$3,94704\ldots$	10	$3,60809\ldots$	16	$3,51298\ldots$		
6	$3,76069\ldots$	12	$3,56730\ldots$	18	$3,49365\ldots$		

Отметим, что В. А. Андросенко и В. Х. Салихов[26] получили такую же оценку для $\mu\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \mu(\beta_2)$, как и в теореме 4. Но их доказательство отличается от того, что предложено в диссертации.

Показатели иррациональности для остальных чисел β_k, приведенных в теореме 4, ранее не оценивались.

Чтобы получить оценки квадратичных показателей иррациональности чисел β_k, мы рассматриваем линейные комбинации (14) при значениях параметра t, равных (17). В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа β_k и β_k^2. Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 2, мы устанавливаем справедливость теоремы 5.

Теорема 5. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$
10	$12,28656\ldots$	14	$10,34013\ldots$	18	$9,35032\ldots$
12	$11,11119\ldots$	16	$9,77530\ldots$	20	$9,01564\ldots$

Квадратичные показатели иррациональности для чисел β_k, приведенных в таблице в теореме 5, ранее не оценивались.

Содержание главы 2

Основным результатом второй главы является следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $q(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для любых p_1, p_2, $q \in \mathbb{Z}$, $q(\varepsilon) \leqslant q$, выполняется*

$$\max\left\{\left|\ln 3 - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{p_2}{q}\right|\right\} \geqslant |q|^{-\mu-\varepsilon},$$

где $\mu = 3,86041\ldots$.

Отметим, что для каждого из чисел $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$ в настоящее время доказаны менее точные оценки, см. (2) и (3). Показатель совместного приближения $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$ ранее не оценивался.

Для доказательства теоремы 6 используется общая лемма 14.

Лемма 14. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $l_n = q_n\alpha + p_n$, где $q_n, p_n \in \mathbb{Z}\left[i\sqrt{m}\right]$. Известно, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|q_n| = \sigma, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|l_n| = -\tau, \quad \sigma, \tau > 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $q(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для любых p, $q \in \mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$, $|q| \geqslant q(\varepsilon)$, выполняется

$$|p + q\alpha| \geqslant |q|^{-\left(\frac{\sigma}{\tau}+\varepsilon\right)}.$$

Чтобы применить лемму 14, рассматриваются функции $J_1(t)$, $J_2(t)$ из первой главы (см. (10)). Во второй главе мы исследуем линейную комбинацию (14) при значении параметра t, равном

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i\pi}{6}}. \tag{18}$$

В результате получаем последовательность чисел из $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, которые приближают число $\ln 3 + i\pi/3$. Применяется метод перевала для исследования асимптотического поведения этих последовательностей и используются известные факты о распределении простых чисел для исследования арифметических свойств чисел из $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, приближающих число $\ln 3 + i\pi/3$. Используя полученные результаты и применяя к этим последовательностям лемму 14, мы доказываем теорему 6.

Содержание главы 3

Основными результатами третьей главы являются новые оценки сверху для квадратичных показателей иррациональности чисел α_k (см. (8)), где $k = 2, 4, 6, 8, 10$, и β_k (см. (9)), где $k = 4, 6, 8$ (для бо́льших значений k более точные оценки получены в первой главе).

Для этого используются функции $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ из первой главы (см. (10)). Но вместо (11) выбирается многочлен

$$\binom{x+b_1n+1}{c_1n+1}\binom{x+b_2n+1}{c_2n+1}\binom{x+b_3n+1}{c_3n+1}\binom{x+b_4n+1}{c_4n+1}.$$

Тогда выполняются тождества (12) и (13), а $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ удовлетворяют равенствам

$$U_1(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right) W_1\left(t + \frac{1}{t}\right), \; U_2(t) = W_2\left(t + \frac{1}{t}\right),$$
$$U_3(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right) W_3\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

для некоторых функций $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

Чтобы получить оценки квадратичных показателей иррациональности чисел α_k, мы рассматриваем линейные комбинации (16) при значениях параметра t, равных (15). В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа α_k и α_k^2. Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 2, мы устанавливаем справедливость теоремы 7.

Теорема 7. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
2	*18,57994...*	*6*	*11,20381...*	*10*	*9,86485...*
4	*12,84161...*	*8*	*10,37857...*		

Эти результаты улучшают соответствующие неравенства (6) для $\mu_2(\alpha_4) = \mu_2(\ln 2)$ и (7) для $\mu_2(\alpha_2)$ из работ Р. Марковеккио[15] и М. Г. Башмаковой[27].

Квадратичные показатели иррациональности для чисел α_k, где $k = 6, 8, 10$, ранее не оценивались.

Чтобы получить оценки квадратичных показателей иррациональности чисел β_k, мы рассматриваем линейные комбинации (16) при значениях параметра t, равных (17). В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа β_k и β_k^2. Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 2, мы устанавливаем справедливость теоремы 8.

Теорема 8. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$
4	$32,26974\ldots$	6	$17,64930\ldots$	8	$14,12795\ldots$

Квадратичные показатели иррациональности для чисел β_k, приведенных в теореме 8, ранее не оценивались.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю члену–корр. РАН, профессору Юрию Валентиновичу Нестеренко за постановку задач и неоценимую помощь в работе и всем сотрудникам кафедры теории чисел за постоянное внимание.

Работы автора по теме диссертации

[1] А. А. Полянский, О квадратичном показателе иррациональности $\ln 2$. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, (2012) **1**, 25 – 30.

[2] A. Polyanskii, On the irrationality measure of certain numbers. *M. Jour. Comb. and Number Theory*, (2011) **1**:4, 80 – 90.

[3] А. А. Полянский, О квадратичных показателях иррациональности некоторых чисел. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, (2013) **5**, 25 – 29.

[4] А. А. Полянский, О показателях иррациональности некоторых чисел. ч. II. Деп. в ВИНИТИ, №181 — В 2013, с. 1 – 21.